

# Circuiti Elettronici

Alberto Tibaldi  
Immagini di Luca De Villa Palù

14 marzo 2009

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Diodo p-n</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1      | Modello 1: Caratteristica statica . . . . .                    | 6         |
| 1.2      | Modello 2: Prima idealizzazione del diodo . . . . .            | 6         |
| 1.3      | Modello 3: Seconda idealizzazione del diodo . . . . .          | 7         |
| 1.4      | Modello 4 . . . . .  | 9         |
| 1.5      | Modello 5: Modello di piccolo segnale . . . . .                | 9         |
| 1.6      | Conclusioni sul diodo . . . . .                                | 12        |
| <b>2</b> | <b>Il Transistore Bipolare</b>                                 | <b>13</b> |
| 2.1      | Modello di Ebers-Moll per la polarizzazione . . . . .          | 14        |
| 2.1.1    | Circuiti di polarizzazione . . . . .                           | 19        |
| 2.2      | Qualità di un circuito di polarizzazione . . . . .             | 26        |
| 2.2.1    | Metodo di Monte Carlo . . . . .                                | 26        |
| 2.2.2    | Calcolo della variazione assoluta di $I_C$ . . . . .           | 26        |
| 2.2.3    | Calcolo della variazione relativa di $I_C$ . . . . .           | 27        |
| 2.2.4    | Metodo rapido per studiare la bontà di un circuito . . . . .   | 28        |
| 2.2.5    | Necessità di un $\beta$ minimo . . . . .                       | 29        |
| 2.3      | Caratteristica statica di un BJT . . . . .                     | 30        |
| 2.3.1    | Effetto Early . . . . .  | 30        |
| 2.3.2    | Safe Operating Area . . . . .                                  | 31        |
| 2.3.3    | Circuito di transistori come amplificatore . . . . .           | 32        |
| 2.4      | Modelli di piccolo segnale . . . . .                           | 35        |
| 2.4.1    | Esempio teorico/pratico di studio di piccolo segnale . . . . . | 42        |
| <b>3</b> | <b>Stadi di Amplificazione</b>                                 | <b>46</b> |
| 3.1      | Calcolo delle impedenze . . . . .                              | 48        |
| 3.1.1    | Calcolo dell'impedenza di base, $Z_{B,in}$ . . . . .           | 49        |
| 3.1.2    | Calcolo dell'impedenza di emettitore, $Z_{E,in}$ . . . . .     | 49        |
| 3.1.3    | Calcolo dell'impedenza di collettore, $Z_{C,in}$ . . . . .     | 54        |
| 3.2      | Introduzione agli stadi di amplificazione . . . . .            | 56        |
| 3.3      | Stadio ad Emettitore Comune . . . . .                          | 56        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.3.1    | Disaccoppiamento . . . . .   | 59         |
| 3.4      | Stadio a Collettore Comune (Emitter Follower) . . . . .  | 61         |
| 3.5      | Stadio a Base Comune . . . . .   | 64         |
| 3.6      | Introduzione all'amplificazione . . . . .  | 65         |
| 3.6.1    | Ingresso tensione, uscita tensione . . . . .   | 66         |
| 3.6.2    | Ingresso corrente, uscita tensione . . . . .   | 67         |
| 3.6.3    | Ingresso tensione, uscita corrente . . . . .   | 67         |
| 3.6.4    | Ingresso corrente, uscita corrente . . . . .   | 68         |
| <b>4</b> | <b>Transistore MOS a Effetto di Campo (MOSFET)</b>   | <b>70</b>  |
| 4.1      | Caratteristica statica del MOSFET . . . . .  | 71         |
| 4.1.1    | Channel Length Modulation . . . . .  | 73         |
| 4.2      | Studio dei circuiti con MOSFET . . . . .   | 74         |
| 4.3      | Polarizzazione di un MOSFET . . . . .  | 76         |
| 4.3.1    | Esempio 0 . . . . .  | 76         |
| 4.3.2    | Esempio 1: circuito di Self-Biasing . . . . .  | 77         |
| 4.3.3    | Esempio 2 . . . . .  | 78         |
| 4.4      | Modelli di Piccolo Segnale . . . . .   | 78         |
| 4.5      | Stadi di Amplificazione con Sistemi MOS . . . . .  | 80         |
| 4.5.1    | Calcolo dell'impedenza di gate, $Z_{G,in}$ . . . . .   | 81         |
| 4.5.2    | Calcolo dell'impedenza di source, $Z_{S,in}$ . . . . .   | 81         |
| 4.5.3    | Calcolo dell'impedenza di drain, $Z_{D,in}$ . . . . .  | 82         |
| 4.5.4    | Stadio a Source Comune . . . . .   | 84         |
| 4.5.5    | Stadio a Drain Comune . . . . .  | 86         |
| 4.5.6    | Stadio a Gate Comune . . . . .   | 88         |
| <b>5</b> | <b>Modello per l'Alta Frequenza dei Transistori</b>  | <b>89</b>  |
| 5.1      | Modello di Giacoletto . . . . .  | 90         |
| 5.2      | Teorema di Miller delle tensioni . . . . .   | 93         |
| 5.3      | Stadi di amplificazione in ambito di alte frequenze . . . . .                                  | 94         |
| 5.3.1    | Stadio a emettitore comune . . . . .   | 94         |
| 5.3.2    | Stadio a collettore comune . . . . .   | 96         |
| 5.3.3    | Stadio a base comune . . . . .   | 99         |
| <b>6</b> | <b>Risposta in Frequenza di un Circuito Amplificatore</b>                                      | <b>100</b> |
| 6.1      | Esempio di calcolo di funzione di trasferimento per rete ad una<br>costante di tempo . . . . . | 102        |
| 6.2      | Esempio applicativo su reti a più costanti di tempo . . . . .                                  | 105        |
| 6.3      | Metodi generali per il calcolo dei poli . . . . .  | 107        |
| 6.3.1    | Elementi reattivi separati per maglie . . . . .  | 107        |
| 6.3.2    | Elementi reattivi separati per costanti di tempo . . . . .                                     | 108        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 6.4      | Polo ad Alta Frequenza . . . . .   | 109        |
| <b>7</b> | <b>Studio di circuiti controeazionati</b>  | <b>110</b> |
| 7.1      | Effetti della reazione . . . . .   | 112        |
| 7.1.1    | Reazione positiva / Reazione negativa (Controeazione)                            | 115        |
| 7.2      | Resistenze in ingresso/uscita di un amplificatore controeazion-<br>ato . . . . . | 117        |
| 7.3      | Metodo di Rosenstark . . . . .   | 122        |
| 7.3.1    | Calcolo del guadagno di anello $T$ . . . . .                                     | 122        |
| 7.3.2    | Calcolo del guadagno $A_\infty$ . . . . .  | 123        |
| 7.3.3    | Calcolo del guadagno $A_0$ . . . . .   | 123        |
| 7.4      | Relazione di Blackman . . . . .  | 123        |
| 7.5      | Teorema di Norton . . . . .  | 125        |
| 7.6      | Teorema di Miller . . . . .  | 127        |
| 7.7      | Teorema di Thevenin Generalizzato . . . . .                                      | 130        |
| 7.8      | Conclusioni . . . . .  | 131        |
| 7.9      | Circuito di Bootstrap . . . . .  | 131        |
| <b>8</b> | <b>Configurazioni Multi-Transistore</b>  | <b>133</b> |
| 8.1      | Configurazione Cascode . . . . .   | 133        |
| 8.1.1    | Guadagno in Tensione . . . . .   | 133        |
| 8.1.2    | Risposta in Frequenza . . . . .  | 136        |
| 8.2      | Configurazione Darlington . . . . .  | 138        |
| 8.3      | Configurazione Sziklai . . . . .   | 139        |
| 8.4      | Amplificatore Differenziale . . . . .  | 140        |
| 8.4.1    | Calcolo del guadagno $A$ . . . . .   | 141        |

# Capitolo 1

## Diodo p-n

Dallo studio dei dispositivi elettronici, sappiamo che esistono diodi di diverso tipo: diodi p-n, ossia basati per l'appunto sulla giunzione p-n, in grado di lavorare in zona diretta, o diodi in grado di lavorare in zona inversa, in zona di breakdown (quali diodi Zener); esistono inoltre altri tipi di diodi, quale il diodo Schottky, composto da una giunzione metallo-semiconduttore, che però non analizzeremo nel dettaglio.

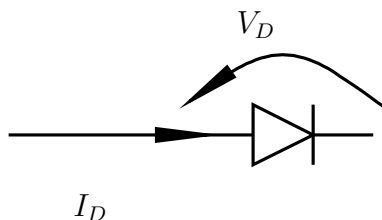


Figura 1.1: Simbolo circuitale e convenzione delle grandezze.

Il diodo p-n, che sarà quello che sarà trattato in questa sezione, è semplicemente una giunzione p-n, ossia un dispositivo realizzato mettendo a contatto un monocristallo di silicio con una zona drogata tipo n, ed una zona drogata tipo p. Dallo studio dei dispositivi elettronici, si può ricavare un'espressione modellizzante la caratteristica statica del diodo  $I_D$ :

$$I_D = I_S \left( e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1 \right)$$

Si ha dunque un andamento di tipo esponenziale della caratteristica statica del diodo; ricordiamo meglio cosa significa parlare di caratteristica statica: essa rappresenta di fatto la corrente che scorre nel diodo al variare della tensione,  $I_D(V_D)$ , considerando lente variazioni della tensione  $V_D$ : ogni punto

della caratteristica statica, si può considerare a regime, e quindi da qui il nome statica: questo tipo di caratteristica non è in grado di modellizzare fenomeni di transitorio di alcun genere, poichè ciascun punto rappresentato sulla curva è un punto a regime.

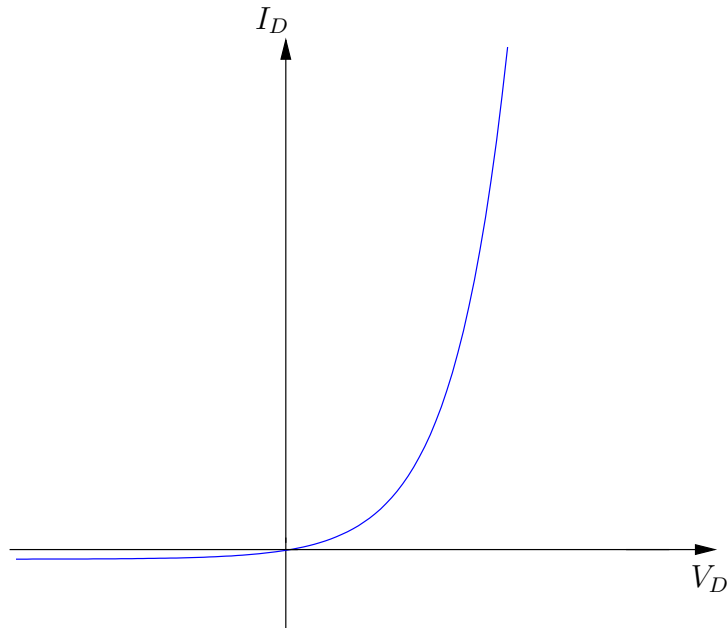


Figura 1.2: Caratteristica statica del diodo.

Nell'espressione di  $I_D$ , il  $-1$  è necessario in quanto, se non fosse presente,  $I(0) = 1$ : in questa maniera, avendo una tensione nulla, si avrebbe produzione di corrente; se si riuscisse a creare energia senza dover utilizzare del lavoro, si andrebbe contro i principi della termodinamica, la cui validità ora come ora è innegabile (per quanto ne sappiamo, inoltre, dentro al diodo non c'è un omino verde alto qualche millimetro che pedala come un forsennato per farci correre corrente). Dal momento che tuttavia questo termine serve solo in un intorno di 0, possiamo trascurarlo, dal momento che utilizzeremo tensioni e correnti sufficientemente elevate rispetto a 0. Per questo motivo, possiamo considerare una prima semplificazione dell'espressione:

$$I_D = I_S e^{\frac{V_D}{V_T}}$$

Dopo questa prima semplificazione, facciamo qualche considerazione: si suol dire, in elettronica, che il diodo si possa considerare conduttivo, acceso, ON, solo da una certa tensione in poi, che chiameremo  $V_\gamma$ . In un normale diodo a silicio, di quelli che tratteremo comunemente, essa è pari a circa

mezzo volt abbondante (possiamo quindi pensare a  $V_\gamma$  come compresa tra 0.5 V e 0.8 V).

Il nostro obiettivo, è fare le cose facili: vogliamo essere in grado di modellizzare il diodo, al fine di poterlo studiare facilmente in un contesto più ampio, quale un circuito elettronico dotato di un certo numero di altri componenti di vario tipo (resistenze, condensatori, induttori, e come vedremo anche transistori). A partire dall'unico modello che abbiamo per ora a disposizione, ossia la caratteristica statica, vogliamo cercare di studiare un certo numero di modelli, possibilmente in grado di semplificarci la vita, a costo di perdere qualche informazione (non troppo importante) sul dispositivo.

## 1.1 Modello 1: Caratteristica statica

Il primo modello di cui si può parlare è la già citata caratteristica statica: si tratta di un modello abbastanza preciso, che si può facilmente differenziare, sviluppare in serie, e quindi trattare analiticamente, ma ha un grosso, grossissimo problema: non è lineare! Risolvere equazioni che coinvolgono un esponenziale, sono infatti non lineari, e dunque analiticamente impossibili da risolvere, numericamente fattibili (con una certa difficoltà), utilizzando metodi quali bisezione, metodo delle secanti, metodo delle tangenti, o altri eventuali che si possono studiare in un corso di Analisi Numerica. Altro limite di questo modello è suggerito dal nome: statico. Dal momento che questo modello come già detto è una caratteristica statica, non ha la possibilità di prevedere rapide variazioni di corrente, e quindi effetti transitori. Un dettaglio ulteriore: nei diodi, può capitare talvolta di trovare una correzione di un fattore  $\eta$  moltiplicante il denominatore dell'argomento dell'esponenziale; tenendo conto di ciò, il modello caratteristica statica del diodo diventa:

$$I_D = I_S \left( e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1 \right)$$

## 1.2 Modello 2: Prima idealizzazione del diodo

Potremmo idealizzare il diodo, considerandolo nel seguente modo: per  $V_D < 0$ , considerare il dispositivo in zona di interdizione (come nel caso della caratteristica statica), e, per  $V_D = 0$ , assimilare l'esponenziale con una retta verticale; in questa maniera, si avrebbe che il diodo a sinistra di  $V_D = 0$  si potrebbe assimilare circuitalmente ad un circuito aperto, e a destra di  $V_D = 0$  con un

corto circuito. Si noti che questo modello ha un'idea buona come procedimento, ma rappresenta un'approssimazione un po' troppo brutale dell'andamento dell'esponenziale; vediamo se si può fare di meglio!

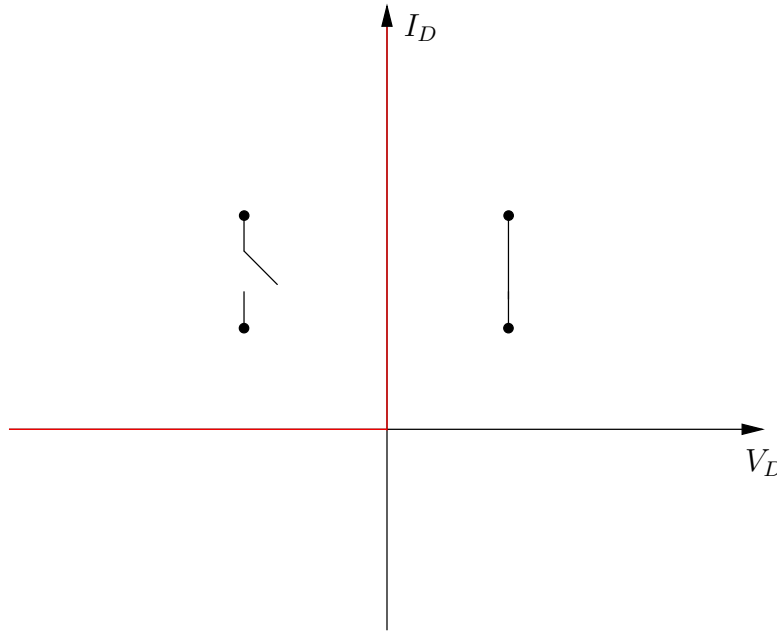


Figura 1.3: Il più semplice modello del diodo.

### 1.3 Modello 3: Seconda idealizzazione del diodo

Partendo dal modello precedente, ricordiamo una cosa interessante, detta nell'introduzione: la caduta di tensione sul diodo non è nulla, dal momento che si può considerare il diodo acceso solo con una tensione maggiore o uguale della nostra  $V_\gamma$ . Possiamo dunque pensare ad un modello leggermente più raffinato del precedente: traslando la riga verticale di un certo offset, rappresentante la caduta di tensione sul diodo,  $V_\gamma$ . Circuitualmente, possiamo dunque pensare ad un diodo come ad una batteria  $V_\gamma$ , utilizzata però come utilizzatore! Dobbiamo stare molto attenti a questo punto, perchè rischiamo di prendere una grossa cantonata, in questo senso: la batteria che introdurremmo nel diodo, rappresenta una caduta di tensione ai capi del dispositivo, e dunque una potenza assorbita, e non emessa come potrebbe farci pensare il simbolo della batteria. Se così non fosse, introducendo un diodo introdurremmo, senza bisogno di alimentazione, un oggetto mistico in grado



di produrre energia dal nulla (e da che mondo è mondo, la legge di conservazione dell'energia, purtroppo, non si può violare!). Si ricordi che la nostra elettronica, al fine di funzionare, deve assorbire potenza, essere alimentata, al fine di produrre risultati.

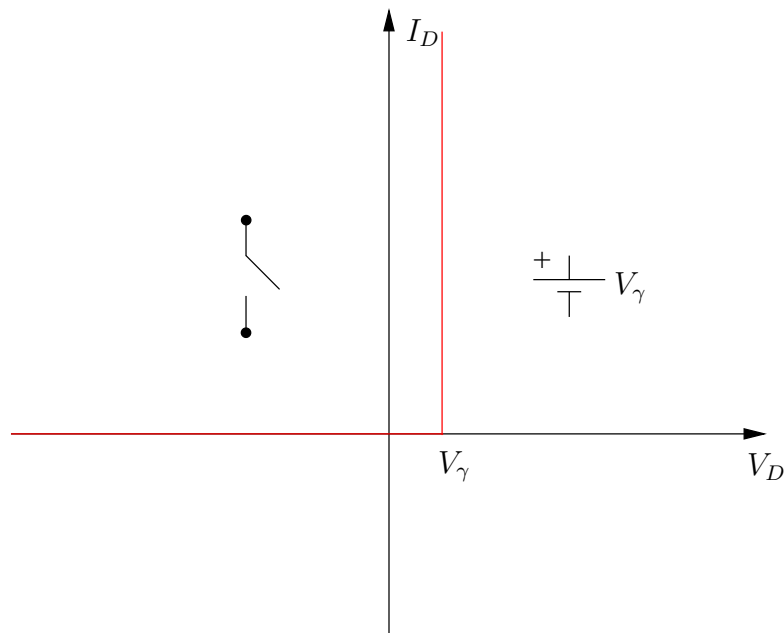


Figura 1.4: Modello del diodo con tensione di soglia.

Approfittiamo del fatto che trattiamo questo tipo di modello, per una piccola precisazione: la tensione  $V_\gamma$  è molto sensibile a grandezze di influenza di vario genere, una su tutte per esempio la temperatura  $T$ : si può dimostrare che, infatti:

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial T} \simeq -2 \div -2.5 \text{ mV/K}$$

Una piccola nota: tutto ciò che abbiamo detto finora, è vero, ma parlando per diodi di segnale, ossia nei quali scorre una corrente relativamente piccola; questi discorsi, per elettronica di potenza, andrebbero rivisti e corretti.

Parlando dunque di condizioni di segnale (che meglio discuteremo in seguito), e quindi di correnti dell'ordine dei mA, il modello 3 che stiamo descrivendo è ragionevole, per determinare lo stato del diodo, se ON o OFF, ossia se in zona diretta o zona di interdizione. Questo modello è in grado dunque di fornirci, come unica indicazione, il fatto che il diodo sia o meno acceso, e in grado di condurre corrente; per modelli in grado di fornirci altre informazioni, dovremo aspettare ancora qualche pagina, dove si inizierà

a parlare propriamente di modelli di segnale (questo infatti si può pensare come modello di polarizzazione).

## 1.4 Modello 4

Un modello (che non utilizzeremo mai) è il seguente: modellizzare il diodo mediante una resistenza, in serie ad un generatore di tensione  $V_\gamma$ . Si tratta di un modello un po' complicato, quantomeno ai nostri scopi; per questo motivo, non ne parleremo ulteriormente, e ci limiteremo a questo breve cenno.

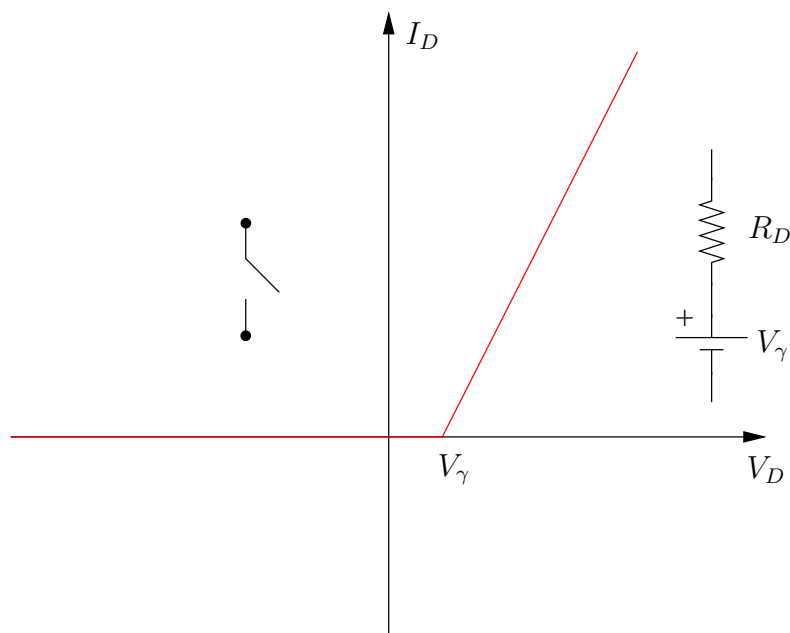


Figura 1.5: Modello del diodo che considera la sua resistenza interna in serie ad un generatore di tensione.

## 1.5 Modello 5: Modello di piccolo segnale

Il modello che stiamo per descrivere, aggregato al modello 3, sarà ciò che utilizzeremo più comunemente; non solo: concettualmente, nei futuri dispositivi che intenderemo modellizzare, ricaveremo modelli in qualche modo simili al 3 e a questo, e, combinati, permetteranno di descrivere il funzionamento del circuito con dispositivi di vario genere (diodi, BJT, MOSFET).

Supponiamo di trovarci in un circuito come quello di figura 1.5. Si ha una tensione continua  $V_1$ , piuttosto elevata, quantomeno rispetto a  $v_s$ , un segnale,

ossia una piccola tensione variabile intorno alla componente continua  $V_1$ . Sull'aggettivo 'piccola' ci sarebbe da discutere, come faremo meglio in seguito definendo i modelli di piccolo segnale per i BJT. Queste variazioni rispetto alla continua forniscono informazioni estremamente utili sul circuito, informazioni che però dobbiamo essere in grado di saper leggere, nella maniera più facile possibile.

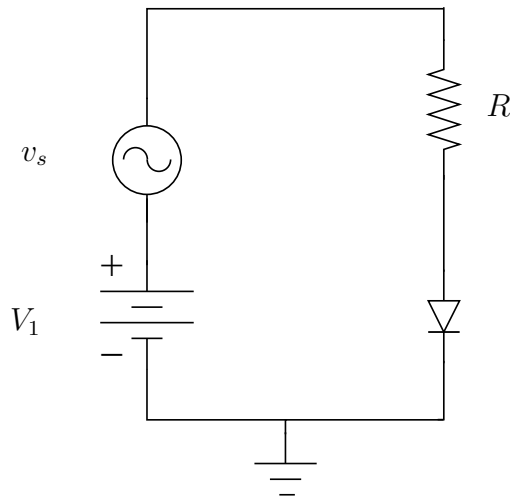


Figura 1.6: Semplice circuito con un diodo ed un segnale composto da una parte continua ed una variabile di piccola ampiezza.

Cosa possiamo fare? Un'idea è usare, al posto del diodo, uno dei modelli precedentemente studiati: il modello 1 è troppo difficile da studiare in quanto non lineare, 2 e 3 sono troppo imprecisi, in quanto eliminano la possibilità di capire quale sia l'effetto di una piccola tensione variabile rispetto a  $V_\gamma$ : il modello 2 è abbastanza privo di senso (se non per l'idea che ci ha fornito), il 3 è invece, per quanto più sensato sotto il punto di vista della polarizzazione, troppo 'dicotomico': ci dice che siamo o in zona inversa, o in zona diretta.

Potremmo ricorrere al modello prima accennato, il 4, sostituendo al posto del diodo un generatore di tensione  $V_\gamma$  ed una resistenza,  $r_d$ .

Il circuito del modello 4 ha una caratteristica fondamentale, la linearità! Dall'Elettrotecnica sappiamo che i circuiti lineari hanno un metodo di risoluzione molto utile, semplice ed interessante: la sovrapposizione degli effetti. mediante questa, possiamo capire che sostanzialmente la tensione  $V_D$  ai capi del diodo (e quindi ai capi della serie della batteria  $V_\gamma$  e del resistore  $r_d$ ) è fornita sostanzialmente da due contributi, generati dai due generatori:

$$V_D = V_{OP} + v_o$$

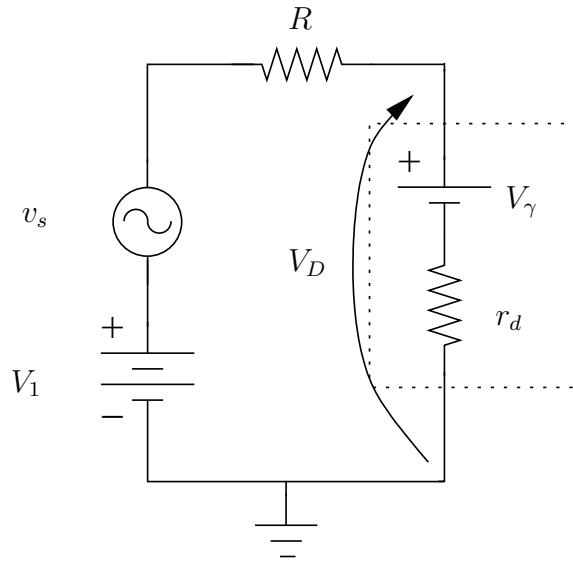


Figura 1.7: Semplice circuito con un diodo ed un segnale composto da una parte continua ed una variabile di piccola ampiezza.

$V_{OP}$  è una continua, una tensione elevata, derivante dalla tensione  $V_1$ , ripartita tra resistenza  $R$  del circuito e resistore  $r_d$ , sottratta per  $V_\gamma$  (come possiamo intuire mediante l'elettrotecnica); si tratta dunque di una tensione di alimentazione, rappresentante dunque solo un offset per la funzione; le informazioni della caratteristica deriveranno tutte e sole da  $v_o$ . Cosa facciamo in pratica? Consideriamo la caratteristica statica in un determinato punto di lavoro, e quindi sviluppiamo mediante il polinomio di Taylor troncato al primo ordine il nostro esponenziale, rappresentante la caratteristica statica, per poterlo sostituire con la retta osculatrice nel punto operativo scelto:

$$I_D \simeq I_{D,OP} + \left. \frac{\partial I_D}{\partial V_D} \right|_{V_{OP}} \cdot v_d \implies i_d \simeq \left. \frac{\partial I_D}{\partial V_D} \right|_{V_{OP}} \cdot v_d$$

$i_d$  rappresenta il segnale di corrente che scorre nel diodo:  $I_{D,OP}$  rappresenta un offset verticale sul diagramma della caratteristica statica, mentre  $i_d$  rappresenta la derivata della funzione della caratteristica statica del diodo, valutata nel punto di lavoro dettato dall'offset di tensione,  $V_{OP}$ . Ricordiamo la legge di Ohm:

$$V = R \cdot I$$

Beh, noi abbiamo una  $v_o$ , abbiamo una  $i_d$ , con un andamento di fatto lineare un un intorno di  $V_{OP}$ , dunque possiamo dire che:

$$\left. \frac{\partial I_D}{\partial V_D} \right|_{V_{OP}} = g_d$$

Ossia la derivata parziale della caratteristica statica rispetto alla tensione ai capi del diodo, valutata nel punto di lavoro, rappresenta di fatto una conduttanza, o meglio rappresenta la conduttanza che il diodo presenta in quel dato punto di lavoro. Possiamo definire, utilizzando il semplice legame tra resistenza e conduttanza, la resistenza differenziale  $r_d$  come:

$$r_d = \frac{1}{g_d}$$

Parlando di dispositivi di altro genere, parleremo ancora di piccolo segnale, facendo alcune precisazioni ed effettuando altri calcoli, che probabilmente saranno utili anche per la comprensione dei risultati sinora ottenuti.

## 1.6 Conclusioni sul diodo

Abbiamo presentato 5 modelli circuitali di un diodo a giunzione p-n; di questi, saranno, come già accennato, utilizzati soprattutto il 3 ed il 5: ci piacerebbe poter utilizzare il primo, ma questo non è lineare, e dunque non compatibile con le nozioni di Elettrotecnica; il 2 è troppo impreciso, il 4 non necessario. L'idea, come già detto, sarà quella di determinare a partire dal modello 3 il solo offset del diodo, ossia la tensione di accensione di questo, e con il 5 la resistenza differenziale, parametro fondamentale per lo studio di piccolo segnale del dispositivo elettronico.

Un piccolo suggerimento pratico, per quanto riguarda il modo di procedere, riguardo il modello 3: l'unico modo che conosciamo per il riconoscimento dello stato del diodo, è la formulazione di ipotesi di false partenze: considerando il diodo on, si può verificare che le correnti e le tensioni del circuito siano tutte regolari, ossia che le leggi di Kirchhoff siano rispettate. Nel caso di più diodi presenti nello stesso circuito elettronico, sarà necessario continuare ad effettuare ipotesi di false partenza fino alla determinazione della combinazione corretta; si noti che una sola condizione potrà essere giusta, e che il fatto che un diodo conduca bene non implica assolutamente il fatto che quella sia l'ipotesi corretta per quanto lo riguarda. Non esistono ipotesi semplificative, l'unica cosa che è possibile fare è tentare tutte le possibili combinazioni del circuito, fino a trovare e verificare quella esatta.

## Capitolo 2

# Il Transistore Bipolare

Il BJT (Bipolar Junction Transistor), è un dispositivo molto utilizzato nell'elettronica analogica (e, volendo, anche nell'ambito dell'elettronica digitale, anche se non discuteremo di questo ambito); si tratta di un oggetto tipicamente planare, costituito da un semiconduttore triplicemente drogato, ossia di una doppia giunzione: n-p-n o p-n-p .

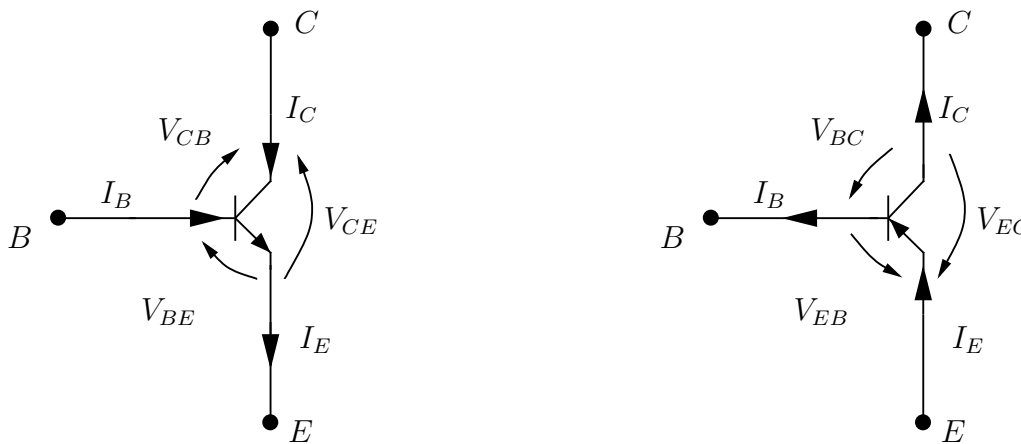


Figura 2.1: Simboli circuitali dei transistor bipolari *npn* e *pnp* con le relative convenzioni.

Studiando nei dettagli Dispositivi Elettronici, si arriva a formulare un modello statico per i transistori bipolare: il modello di Ebers-Moll. Sapendo che abbiamo a che fare con una doppia giunzione, possiamo immaginare che ciascuna di esse sarà modellizzabile mediante un diodo; ciò che però è interessante è l'effetto transistoro: utilizzando una delle giunzioni in zona inversa, e l'altra in zona diretta, è possibile aumentare la corrente inversa di saturazione della prima mediante iniezione delle cariche da parte della

giunzione in zona diretta; dal momento che abbiamo a che fare con una doppia giunzione, abbiamo 4 possibili combinazioni ON/OFF per quanto concerne le giunzioni; considerando BE la giunzione Base-Emettitore, e BC la giunzione Base-Collettore, le possibilità sono le seguenti:

- BE=OFF — BC=OFF: Il BJT viene detto in modo di funzionamento interdetto o spento (cut-off): di fatto, non si ha conduzione, in queste condizioni;
- BE=ON — BC=ON: Il BJT viene detto in zona di saturazione: si ha un guadagno pressochè nullo, dunque il BJT si comporta sostanzialmente come un corto circuito; questa zona di funzionamento, assieme alla precedente, era utilizzata in un contesto digitale: il transistor o conduce, o non conduce;
- BE=ON — BC=OFF: Il BJT viene detto in modo lineare, o RAD (Regione Attiva Diretta); in questo ambito, il transistor si comporta nella maniera più utilizzata in ambito di elettronica analogica, in quanto il dispositivo presenta l'effetto transistor in maniera più evidente. Si tratta della condizione nella quale noi utilizzeremo sempre il dispositivo.
- BE=OFF — BC=ON: Il BJT lavora in modo attivo inverso: si tratta di una zona di funzionamento duale alla precedente, dove si ha effetto transistor, ma dal momento che i BJT vengono di solito progettati per condurre dall'emettitore verso il collettore, e non viceversa, si avrà un effetto transistor meno accentuato rispetto al caso della zona RAD, e quindi sarà meno utilizzato.

Poichè come già detto non consideriamo il BJT in ambito di elettronica digitale, utilizzeremo il dispositivo praticamente solo in zona RAD, ossia in modo lineare.

## 2.1 Modello di Ebers-Moll per la polarizzazione

Introduciamo finalmente il modello di Ebers-Moll.

Il circuito modellizzante il BJT in condizioni statiche è molto complicato sotto il punto di vista delle equazioni: esse sono fortemente non lineari, in quanto ci riconduciamo alle equazioni dei diodi, contenenti esponenziali al loro interno. Quello che possiamo fare, è fare i furbi: partendo da qua, è possibile infatti ricavare modelli più facili, introducendo restrizioni a questo

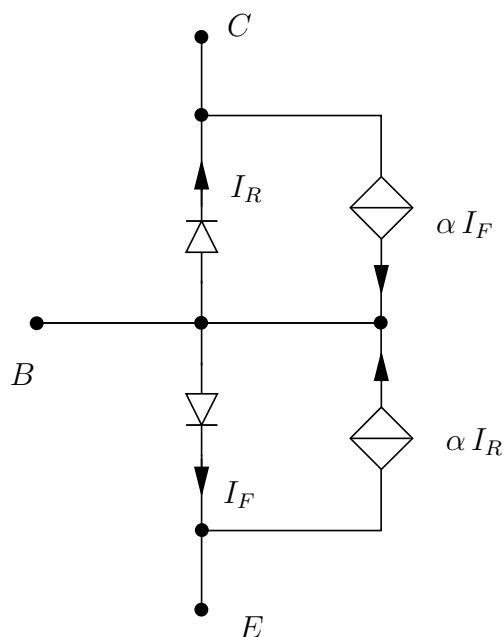


Figura 2.2: Modello di Ebers-Moll del transistor bipolare npn.

modello: avremo come al solito semplificazioni notevoli, ma anche modelli validi in un range di applicazioni limitato rispetto a quello di partenza.

Supponiamo di trovarci in zona lineare di funzionamento: in questo modo, possiamo dire che un diodo condurrà (quello tra base ed emettitore), ed uno sarà interdetto, dunque off, dunque modellabile con un circuito aperto. Il generatore pilotato relativo al diodo tra base e collettore sarà off, e dunque opporrà semplicemente impedenza infinita (dal momento che un generatore di corrente nulla si modella mediante circuito aperto). Si può dunque ricondurre ad un circuito a T il modello di Ebers-Moll.

Questo circuito è ancora non lineare, in quanto contiene ancora un diodo al suo interno; abbiamo comunque notevolmente semplificato il circuito iniziale, eliminando quantomeno un elemento di non linearità. Al modello a T di solito si sostituisce un più utilizzato modello a  $\pi$  (data la sua forma ricordante la  $\pi$  greca).

Utilizzando ora semplicemente la legge ai nodi di Kirchhoff, considerando l'emettitore come un nodo generalizzato, possiamo dire che:

$$I_B = I_E - I_C = I_E - \alpha_F I_E = I_E(1 - \alpha_F)$$

Di solito si definisce un parametro  $\beta$  indicante il guadagno in corrente del transistor in modo lineare:



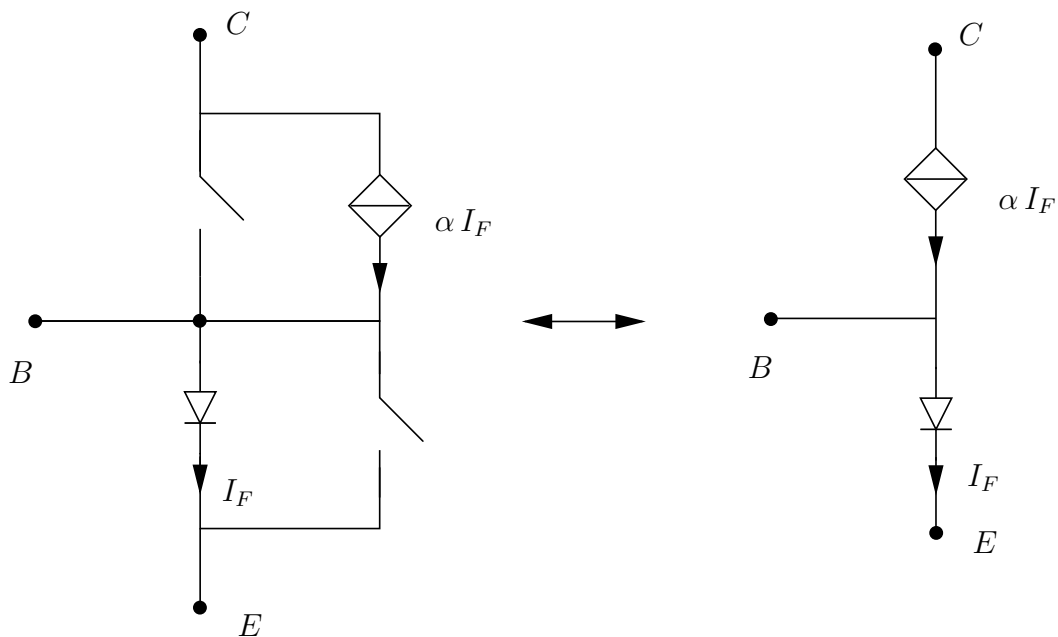


Figura 2.3: Modello di Ebers-Moll nella configurazione a T per la polarizzazione diretta.

$$\beta \triangleq \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F}$$

Da qui, otterremo che la corrente di collettore  $I_C$ , in funzione della corrente di base  $I_B$ , vale:

$$I_C = \beta I_B$$

Si può dunque dire che:

$$\beta = \frac{I_C}{I_B}$$

Per motivi di tradizione, o anche solo di comodità, in elettronica si utilizza sempre il parametro  $\beta$ , per indicare il guadagno in corrente di un transistor.

Possiamo fare di meglio! Questo circuito è ancora non lineare, in quanto il diodo è presente nel circuito. Linearizziamo il tutto, considerando i modelli del diodo precedentemente introdotti, e quindi, ai fini della sola polarizzazione, ci è possibile modellizzare il diodo mediante una batteria, rappresentante la caduta di tensione ai capi della giunzione base-emettitore BE:  $V_{BE}$ . Questa sarà la solita caduta di tensione ai capi di un diodo, circa uguale a mezzo volt abbondante.

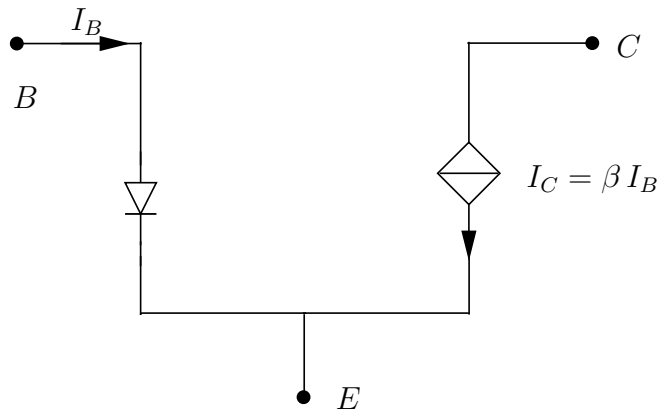


Figura 2.4: Modello di Ebers-Moll nella configurazione a  $\pi$  per la polarizzazione diretta.

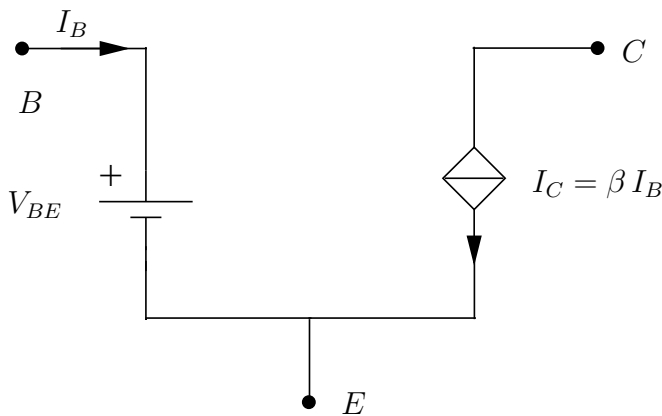


Figura 2.5: Modello di Ebers-Moll per la polarizzazione di un npn.

Questo modello è lineare, molto semplice, e semplifica dunque notevolmente i conti. Si può ritenere quasi ragionevole sotto il punto di vista concettuale, anche se non del tutto soddisfacente: esso non considera i segnali, poichè è costituito da soli generatori in continua, e dunque inserire un segnale in un circuito del genere non avrebbe senso. Questo di fatto è il modello per studiare la polarizzazione di un BJT npn, ma oltre a questo non serve a niente. Per un pnp, il discorso è molto simile, con un po' di segni cambiati: la batteria modellizzante la caduta di tensione ai capi del diodo in questo ambito è girata al contrario, con il  $+$  verso l'emettitore; nell'emettitore la corrente sarà entrante, mentre prima uscente, e in tutti gli altri terminali sarà uscente (dualmente a prima).

Abbiamo così trovato un modello che possiamo sostituire, avendo la certez-

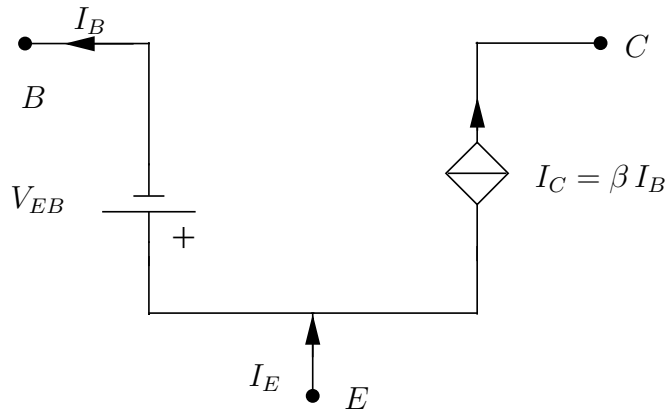


Figura 2.6: Modello di Ebers-Moll per la polarizzazione di un pnp.

za che il BJT sia in zona lineare, al componente in un circuito elettronico, ai fini di poterlo analizzare.

### Note sul modello di polarizzazione

Abbiamo terminato la trattazione del modello di polarizzazione, anche se manca un piccolo particolare: questo modello è una pessima approssimazione della realtà:  $V_{BE}$  non è costante, ma estremamente variabile con la temperatura, con la corrente di base, con la corrente di collettore:

$$V_{BE} = V_{BE}(I_B; I_C; T)$$

Per quanto riguarda le correnti, siamo fortunati: invertendo l'equazione del diodo (ossia invertendo l'esponenziale), si ottiene che la tensione del diodo,  $V_D = V_{BE}$ , è relazionata alle altre grandezze così:

$$V_D = V_T \ln \frac{I_D}{I_S}$$

Il fatto che si abbia a che fare con una relazione logaritmica, per argomenti sufficientemente elevati ( $I_D > I_S$ ), si può ritenere in prima approssimazione soddisfacente. Per la temperatura purtroppo sappiamo che non si può fare lo stesso:

$$\frac{\partial V_D}{\partial T} \simeq -2.0 \div -2.5 mV/K$$

Il problema peggiore è un altro: non solo la tensione base-emettitore è violentemente condizionata dalla temperatura  $T$ , ma lo è anche il  $\beta$  del

transistore; su questo  $\beta$  gira un alone di sventura, che lo rende influenzabile a molti, molti particolari:

- $I_C$ : dal momento che  $I_C$  è funzione di  $I_B$ , allora si ha che il  $\beta$ , definito come rapporto delle due, subisce influenze dalla  $I_C$  stessa;
- $V_{CE}$ : esiste un effetto nel BJT, detto Effetto Early, del quale si parlerà meglio in ambito di segnale, che rende il  $\beta$  soggetto a variazioni (spesso però nel BJT trascurabili);
- $T$ : come già detto, c'è una variazione molto, molto violenta al variare della temperatura  $T$ ;
- Dal transistore: nella stessa linea di produzione, con le stesse caratteristiche, si possono ottenere due transistori con  $\beta$  pari a 100 o a 900.

Si sappia perciò che è sempre vera la seguente affermazione: meglio fidarsi di una serpe incazzata in seno che del  $\beta$  di un transistore.

L'unica condizione sulla quale dovremo purtroppo garanzie è il  $\beta$  minimo del transistore, ai fini del progetto del circuito elettronico in questione (se ne parlerà in seguito con maggior dettaglio).

Ai fini di non badare al  $\beta$ , dovremo agire su di un altro fronte: la corrente utile del nostro sistema, la corrente che dovremo andare a sfruttare, è la corrente di collettore  $I_C$ ; dovremo cercare di studiare circuiti di alimentazione in grado di rendere  $I_C$  più costante possibile, variando automaticamente al variare della tensione di polarizzazione del circuito, e soprattutto del transistore, il valore di  $I_B$ .

Realizzare la polarizzazione di un transistore dunque non è un problema banale: bisogna avere costanti le tensioni  $V_{BE}$  e  $V_{BC}$ , in modo da mantenere stabile  $I_C$ , qualsiasi sia il  $\beta$  (a parte una certa soglia inferiore, come già detto).

### 2.1.1 Circuiti di polarizzazione

Prima di procedere con l'analisi di alcuni circuiti di polarizzazione di differente qualità, conviene fornire un minimo di dritte, di metodi per lavorare con i circuiti con transistori.

1. Come prima cosa, si cerchino i partitori di corrente all'interno del circuito; se è possibile, ricavare equivalenti Thevenin: con un'operazione molto semplice, si riesce ad eliminare un'equazione alla maglia, riducendo così il rango del sistema e semplificando notevolmente il nostro problema;

2. Studiare e calcolare le incognite principali della rete, e una su tutte la corrente di base  $I_B$ : a partire da essa, è possibile calcolare le altre correnti nella rete, quali  $I_C$  e  $I_E$ . In caso di circuiti complessi, sarà necessario anche considerare eventuali incognite aggiuntive, a condizione di averne al più una per equazione: il numero di equazioni deve essere uguale al numero di incognite, in modo da avere un sistema determinato;
3. Scrivere equazioni alle maglie, passanti per base ed emettitore, ma NON per il collettore: in questo primo step, dove intendiamo solamente ricercare le incognite principali della rete, non dobbiamo considerare la corrente al collettore: farlo introdurrebbe un'incognita ulteriore, ossia la corrente tra base e collettore, e quindi renderebbe molto più difficile la risoluzione del sistema. Per determinare le equazioni alle maglie, è sufficiente studiare il numero di maglie indipendenti, utilizzando un trucco derivante dalla teoria dei grafi: considerando il circuito come un grafo orientato, ad ogni maglia che si rileva se ne elimina un componente, e si prosegue in questo modo fino a quando il grafo risulta essere sconnesso, e quindi non vi sono più maglie da cercare; si ricorda che nessuna di queste maglie deve assolutamente passare per il collettore di uno dei transistori presenti nel circuito;
4. La tensione  $V_{CE}$  si ricava a partire dall'equazione della maglia non utilizzata per lo studio delle incognite; date tutte le altre incognite note, risolto dunque il sistema lineare delle maglie precedentemente incontrate,  $V_{CE}$  si otterrà banalmente sostituendo, nell'equazione della maglia che passa per il collettore, tutti i dati finora ricavati.
5. Si ricordi che la regola per vivere è il 'divide et impera': a partire da un problema grosso, molto difficile, si deve essere in grado di risolverne molti, ma più semplici.

Esaminiamo alcuni casi di circuiti per la polarizzazione di un transistor bipolare, cercando di capire, in modo estremamente qualitativo, quanto siano di buona qualità, ossia se essi siano o meno in grado di stabilizzare la corrente di collettore.

### **Esempio 0**

Dato il circuito di polarizzazione di figura 2.7, cercare di capirne la qualità, in termini di stabilità della corrente di collettore.

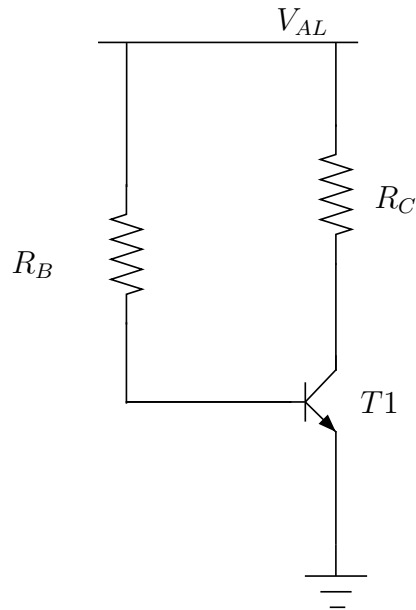


Figura 2.7: Esempio di circuito di polarizzazione di un BJT.

Essendo il primo esempio di risoluzione di circuito con transistor, cerchiamo di capire come procedere, spiegando dettagliatamente. Si ha un generatore di tensione  $V$ , collegato ad un transistor, e a due resistori, con la topologia prima presente. Per poter analizzare un circuito, è necessario determinare i parametri a riposo, ossia i parametri  $I_{CQ}$  e  $V_{CEQ}$ , quando non vi è l'applicazione di alcun segnale, ma solo la polarizzazione. A partire da questi parametri sarà poi possibile determinare i parametri di segnale, come discuteremo in seguito. Vediamo che, analizzando le maglie:

$$I_B = \frac{V_{AL} - V_{BE}}{R_B}$$

$$I_C = \beta I_B$$

A questo punto abbiamo trovato  $I_C = I_{CQ}$ ; la tensione  $V_{CE}$  si determinerà semplicemente mediante la maglia non utilizzata finora:

$$V_{CE} + V_{RC} = V_{AL} \implies V_{CEQ} = V_{AL} - V_{RC}$$

Abbiamo trovato i dati, e abbiamo capito una cosa molto brutta: questo circuito è pessimo. Se cambiassimo il  $\beta$  del circuito, per esempio lo triplacissimo, avremmo una variazione pari al 100% della corrente di collettore:

questo circuito fa esattamente il contrario di ciò che noi vorremmo, in quanto stabilizza la corrente di base, ma variando la corrente di collettore (che è l'unica corrente che ci interessa effettivamente stabilizzare). Cosa ancora peggiore che potrebbe capitare, è l'ottenere una  $V_{CE}$  negativa (cosa assurda in un transistor npn così alimentato): il transistor, con un  $\beta$  diverso da quello per il quale è stato progettato, rischierebbe addirittura di non essere in zona lineare, e di trovarsi per esempio in zona di saturazione. Ma noi non sappiamo come comportarci in zona di saturazione! Il nostro modello, è valido solo ed esclusivamente data la certezza di avere il transistor nel range di applicazione da esso previsto. Per questo motivo dovremmo tornare a Ebers-Moll, rivedere le ipotesi di partenza, e ricavare un modello in grado di prevedere il comportamento del transistor a queste situazioni. Questo tipo di circuito è fatto per lavorare solo per transistori con un  $\beta$  fisso, tale da essere mandato in zona lineare, e produrre la corrente che noi desideriamo: è esattamente l'opposto di quello che vorremmo.

Abbiamo finora studiato un circuito di polarizzazione pessimo; presentiamo tre topologie classiche, nell'ambito dei circuiti di polarizzazione realmente in grado di stabilizzare la corrente.

### Esempio 1: Circuito self-biasing

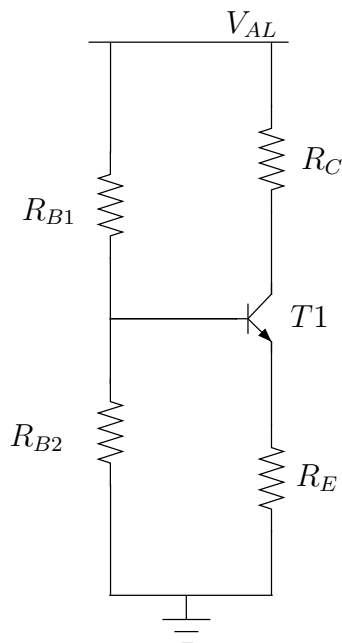


Figura 2.8: Circuito di autopolarizzazione (*self-biasing*).

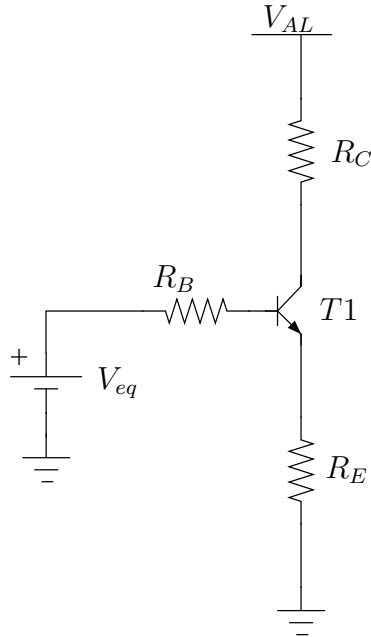


Figura 2.9: Circuito di autopolarizzazione della figura precedente dopo aver subito una *thévenata*.

In questa configurazione (figura 2.8), si può applicare Thevenin: si ha infatti un partitore tra  $R_{B1}$  e  $R_{B2}$ ; si può vedere che, ripartendo sulla resistenza collegata a 0 V, ossia  $R_{B2}$ , si può semplificare lo schema, riducendo di una maglia il circuito:

$$V_B = V_{AL} \frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}}$$

$$R_B = R_{B1} \oplus R_{B2} = \frac{R_{B1} R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}}$$

Il circuito equivalente sarà dunque semplificato.

Vediamo che c'è solo una maglia utile: calcoliamola mediante le leggi di Kirchhoff:

$$V_B - R_B I_B - V_{BE} - (\beta + 1) R_E I_B = 0$$

Risolvendo in  $I_B$  questa equazione:

$$I_B = \frac{V_B - V_{BE}}{R_B + R_E(1 + \beta)}$$



Quindi,  $V_{CEQ}$  si calcolerà con l'equazione della maglia passante per il collettore:

$$V_{AL} - I_C R_C - I_E R_E - V_{CE} = 0 \implies V_{CE} = V_{AL} - I_B \beta R_C - R_E I_B (\beta + 1)$$

Sotto il punto di vista dei calcoli, questo esercizio è molto semplice: una sola equazione alla maglia; in un esercizio numerico, sostituendo i valori numerici nelle equazioni appena scritte, si trovano tutti i dati richiesti dal problema, ossia  $I_{CQ}$  e  $V_{CEQ}$ .

### Esempio 2

Dato il circuito della figura 2.10, calcolare i valori a riposo della polarizzazione.

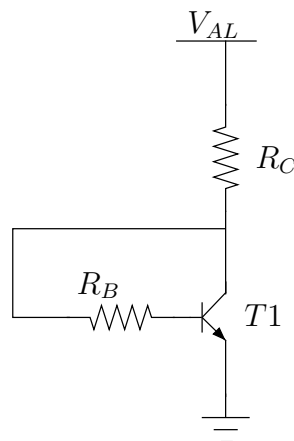


Figura 2.10: Circuito di polarizzazione con *feedback*.

In questo ambito, non si hanno partitori di corrente, e dunque è possibile saltare il primo step, passando direttamente alla ricerca delle incognite. Abbiamo solo una maglia utile (oltre alla maglia al collettore), la cui equazione sarà:

$$V_{AL} - R_C(I_B + \beta I_B) - R_B I_B - V_{BE} = 0$$

Risolvendo in  $I_B$ , si ricava:

$$I_B = \frac{V_{AL} - V_{BE}}{R_B + R_C(1 + \beta)}$$

La tensione  $V_{CE}$  si ricaverà dall'altra maglia:

$$V_{CE} = V_{AL} - V_{RC} = V_{AL} - R_C I_B (1 + \beta)$$

### Esempio 3

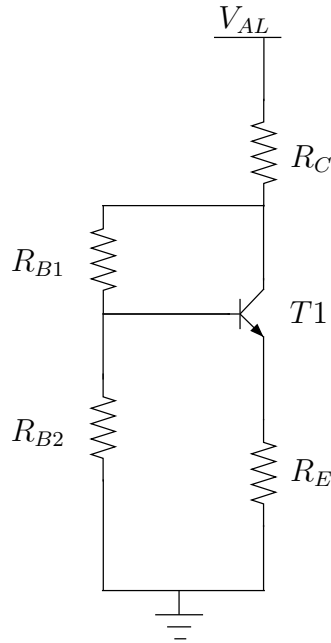


Figura 2.11: Un altro circuito di polarizzazione con *feedback*.

Occupiamoci di un terzo circuito di alimentazione utile (tenendo conto che il primo era un esempio, ma totalmente inutile ai nostri fini): questo sarà un po' più complesso dei precedenti sotto il punto di vista dei calcoli, quindi sarà buona cosa farci attenzione.

In questo circuito non sono presenti partitori di corrente, dunque sarà necessario procedere cercando più di una maglia: vediamo che, ignorando quella passante per il collettore, si hanno:

$$V_{AL} - R_C(I_B + \beta I_B + I_{RB2}) - R_{B1}(I_B + I_{RB2}) - V_{BE} - R_E I_B(\beta + 1) = 0$$

$$I_{RB2} R_{B2} - V_{BE} - R_E I_B(\beta + 1) = 0$$

Abbiamo due equazioni in due incognite: non sarà più un semplice passaggio algebrico quello che ci permetterà di ricavare l'incognita, poichè ne abbiamo due. A questo punto chi effettua i calcoli deve essere in grado di scegliere

il sistema preferito: uno molto consigliato, in problemi di questo genere, è il metodo di Cramer. Avendo a disposizione calcolatori di vario genere, in grado calcolare determinanti è dunque un metodo molto consigliato.

## 2.2 Qualità di un circuito di polarizzazione

Abbiamo presentato tre buoni circuiti di polarizzazione. L'aggettivo 'buoni' tuttavia potrebbe risultarci ancora dubbio, dal momento che non abbiamo idea di come sia possibile valutare la stabilità di un circuito. Cos'è la bontà di un circuito? La risposta è semplice: essa è un parametro che indica la variazione della corrente di collettore,  $I_C$ , al variare di diversi parametri, quali il guadagno  $\beta$  del transistor, o la  $V_{BE}$  (che comunque è sicuramente più stabile di  $\beta$ ).

Quelle che possiamo presentare qua, sono alcune idee, alcuni metodi di procedere, che possono guidarci nella nostra ricerca di un parametro che permetta di quantificare la stabilità della corrente  $I_C$ .

### 2.2.1 Metodo di Monte Carlo

Un metodo molto interessante, reso possibile dalla nascita dei simulatori circuitali quali PSpice, è il metodo di Monte Carlo: dato un circuito, nel quale è possibile cambiare continuamente transistor, si può scrivere una funzione di  $I_C$  al variare di  $\beta$ , cambiando per esempio 10000  $\beta$  del transistor, nello stesso circuito. Se la funzione  $I_C$  sarà circa costante, potremo dire che questo circuito sarà abbastanza buono per i nostri fini. Si tratta di una tecnica molto meno raffinata di quelle che analizzeremo dopo, dotate di un maggior formalismo, tuttavia ha il grosso pregio di essere globale: ci fornisce un comportamento indicativo del circuito per  $\beta$  anche molto distanti tra loro.

### 2.2.2 Calcolo della variazione assoluta di $I_C$

Un'idea più analitica che potremmo sfruttare è quella di derivare, rispetto a  $\beta$ , la corrente  $I_C$  (o fare la stessa cosa rispetto a  $V_{BE}$ ). Ciò ci fornisce una formulazione della variazione rispetto al parametro che ci interessa (prevalentemente  $\beta$ ) molto più precisa rispetto al metodo di Monte Carlo, ma puntuale, locale: la derivata va infatti considerata in un singolo punto, poichè linearizza, nell'intorno di un punto, la variazione di corrente rispetto a piccole variazioni di  $\beta$ , da un certo  $\beta$  da noi stabilito. Il risultato inoltre in un certo senso è difficile da interpretare, in quanto abbiamo un risultato in valore assoluto: sappiamo che la corrente varia di una certa grandezza, ma

non sappiamo rispetto a cosa: non siamo in grado di rapportare il risultato a nessun'altra grandezza, non rendendoci di fatto conto quanto sia grave l'instabilità rilevata. La variazione, dunque, si calcherà come:

$$\delta I_{C,\beta} = \frac{\partial I_C}{\partial \beta}$$

$$\delta I_{C,V_{BE}} = \frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}}$$

### 2.2.3 Calcolo della variazione relativa di $I_C$

Possiamo colmare facilmente la lacuna del metodo appena fornito, calcolando la sensibilità relativa:

$$\frac{\frac{\partial I_C}{I_C}}{\frac{\partial \beta}{\beta}} \implies \frac{\beta}{I_C} \frac{\partial I_C}{\partial \beta}$$

Usando un trucchetto di analisi non-standard (abbandonando i vari formalismi matematici sul fatto che si possa effettivamente o meno moltiplicare e dividere per l'operatore derivata parziale), abbiamo ottenuto un metodo in grado di fornire una misura dell'errore relativo, ossia della variazione di  $I_C$  relazionata sia al valore di  $I_C$  che al valore di  $\beta$ . Se il precedente metodo ci diceva esattamente di quanto si sbagliava, questo ci fa capire quanto sia grave l'errore che si commette, e nella fatispecie quanto sia buono il circuito, permettendoci di renderci meglio conto di ciò che capita.

Piccola nota: talvolta si suol definire la sensibilità semirelativa, come:

$$\frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}} \cdot \frac{1}{I_C}$$

Poichè questo metodo di calcolo è il più importante, proviamo ad applicarlo ad un paio di esempi che abbiamo già analizzato.

#### Esercizio pratico 1: Esempio 0

Avevamo ricavato che:

$$I_B = \frac{V_{AL} - V_{BE}}{R_B} \implies I_C = \beta I_B = \beta \frac{V_{AL} - V_{BE}}{R_B}$$

$$\frac{\partial I_C}{\partial \beta} = \frac{V_{AL} - V_{BE}}{R_B}$$

La sensibilità relativa sarà dunque:

$$\frac{\partial I_C}{\partial \beta} \frac{\beta}{I_C} = \beta \frac{V_{AL} - V_{BE}}{R_B} \cdot \beta \frac{R_B}{(V_{AL} - V_{BE})\beta} = 1$$

Se la sensibilità relativa è 1, significa che, per ogni variazione di  $\beta$ , si ha una variazione lineare (nella fattispecie identica) della corrente di collettore  $I_C$ . Abbiamo appena avuto l'ennesima conferma che questo circuito di polarizzazione sia pessimo.

### Esercizio pratico 2: Circuito di self-biasing

Avevamo già ricavato in precedenza, studiando il circuito di autopolarizzazione, che:

$$I_B = \frac{V_B - V_{BE}}{R_B + (\beta + 1)R_E}$$

Dove  $V_B$  e  $R_B$  erano state ricavate mediante un equivalente Thevenin delle due resistenze collegate al nodo di base. Calcoliamo dunque la derivata parziale rispetto al  $\beta$ , di  $I_C = \beta I_B$ :

$$\frac{\partial I_C}{\partial \beta} = \frac{(V_B - V_{BE})[R_B + (1 + \beta)R_E] - R_E\beta(V_B - V_{BE})}{[R_B + (1 + \beta)R_E]^2}$$

Calcoliamo la sensibilità relativa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_C}{\partial \beta} \frac{\beta}{I_C} &= \frac{\beta[R_B + (1 + \beta)R_E]}{\beta(V_B - V_{BE})} \cdot \frac{(V_B - V_{BE})[R_B + (1 + \beta)R_E] - R_E\beta(V_B - V_{BE})}{[R_B + (1 + \beta)R_E]^2} = \\ &= 1 - \frac{\beta R_E}{R_B + (1 + \beta)R_E} = \frac{1}{1 + \beta \frac{R_E}{R_B + R_E}} \end{aligned}$$

Da quest'ultima espressione, possiamo notare che, modificando il parametro  $R_E$ , sarà possibile meglio modificare la stabilità del circuito; più avanti, parlando di reazione, spiegheremo meglio perchè questo sia vero.

### 2.2.4 Metodo rapido per studiare la bontà di un circuito

Esistono metodi più ruspanti, ma di sicuro più difficili da utilizzare se si è alle prime armi con l'elettronica; dare suggerimenti non fa mai male, poichè iniziando a sentire alcune cose, si può in seguito affinare l'occhio e così rendersi meglio conto di cosa si possa fare.

Consideriamo per esempio il circuito di autopolarizzazione, e nella fatispicie l'espressione di  $I_C$ :

$$I_C = \beta \frac{V_B - V_{BE}}{R_B + (\beta + 1)R_E}$$

Possiamo fare i furbi, e considerare un  $\beta$  molto elevato: in questo modo, possiamo ipotizzare che  $(1 + \beta) \gg R_B$ , e quindi trascurare al denominatore il resistore  $R_B$ :

$$I_C \simeq \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{V_B - V_{BE}}{R_E}$$

Dal momento che  $\beta$  è molto grande, questo è un limite classico di Analisi I, e quindi possiamo dire che:

$$I_C \simeq \frac{V_B - V_{BE}}{R_E}$$

Quindi, a seconda di come modificheremo  $R_E$ , riusciremo a stabilizzare  $I_C$ : in questo ambito  $V_{BE}$  è un parametro scomodo in quanto variabile con temperatura ed altri fattori, ma modificando  $R_E$  potremo rendere trascurabili queste variazioni (anche se riducendo  $I_C$ ).

## 2.2.5 Necessità di un $\beta$ minimo

Consideriamo l'ormai solito esempio di circuito di autopolarizzazione: vediamo che, partendo dal circuito con le due resistenze collegate alla base (senza aver dunque ancora fatto Thevenin), il partitore  $R_{B1}$ ,  $R_{B2}$  può bloccare la tensione di base ad un valore fisso. Ciò è utile, in quanto la tensione sull'emettitore,  $V_E$ , vale:

$$V_E = V_B - V_{BE}$$

Consideriamo in prima approssimazione  $V_{BE}$  circa costante (anche se abbiamo detto che purtroppo ciò non è vero). dal momento che vogliamo che il partitore stabilizzi la corrente e la tensione di base,  $V_{AL}$  deve essere costante, la resistenza stabile, e la  $I_B$  costante. In altre parole, per capire se tutto va bene, dal momento che io disturbo il partitore, deve capitare che:

$$I_B \ll I_{RB1}$$

Quindi:

$$I_B \ll \frac{V_{AL}}{R_{B1} + R_{B2}}$$

Se introducessimo resistenze piccole in base, le tensioni di base sarebbero stabili, ma avremmo grossi consumi, in quanto si avrebbero grosse dispersioni termiche al passare della corrente. Cambiamo argomenti: abbiamo detto che vogliamo avere una  $I_B$  bassa, al di sotto di un certo valore. Dovremo dunque dire che:

$$I_{BMAX} = \frac{I_C}{\beta}$$

Sappiamo che  $\beta$  è variabile, e  $I_C$  in un buon circuito deve essere costante. Da questa relazione riusciamo a capire intuitivamente come mai ci serva avere una soglia inferiore di  $\beta$  nel circuito: se  $\beta$  fosse troppo basso, le correnti di base sarebbero troppo elevate, e così il partitore sarebbe disturbato, e la corrente di collettore instabile.

## 2.3 Caratteristica statica di un BJT

La caratteristica statica di un BJT non è esattamente quella che abbiamo sinora descritto: esistono infatti alcuni elementi aggiuntivi, finora non introdotti, ai fini di rendere più completo il nostro modello.

### 2.3.1 Effetto Early

Le caratteristiche che conosciamo del BJT, sono le correnti di collettore  $I_C$  funzioni della tensione  $V_{CE}$ : al variare della tensione  $V_{CE}$ , si riesce a determinare un andamento circa costante, al di sopra di una certa zona di funzionamento del transistor (detta zona di saturazione), raggiungendo finalmente la zona attiva diretta (o zona lineare del transistor); nella zona lineare, secondo il modello di Ebers-Moll finora proposto, dovremmo avere un andamento costante della corrente  $I_C$  al variare della tensione  $V_{CE}$ .

Cosa che il modello finora introdotto non è in grado di prevedere, è il fatto che nella realtà in zona lineare la corrente non è costante al variare della tensione, poichè vi è una leggera crescita: questo è l'effetto Early. Dal momento che abbiamo una relazione tensione/corrente lineare, con una certa pendenza, possiamo subito immaginare che l'effetto appena illustrato sia introducibile, nel modello di Ebers-Moll, mediante un resistore  $r_o$  collegato tra collettore ed emettitore.

Riscrivendo in matematica ciò che abbiamo appena detto, possiamo dire che:

$$I_C = \beta I_B \left( 1 + \frac{V_{CE}}{V_A} \right) = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} \left( 1 + \frac{V_{CE}}{V_A} \right)$$

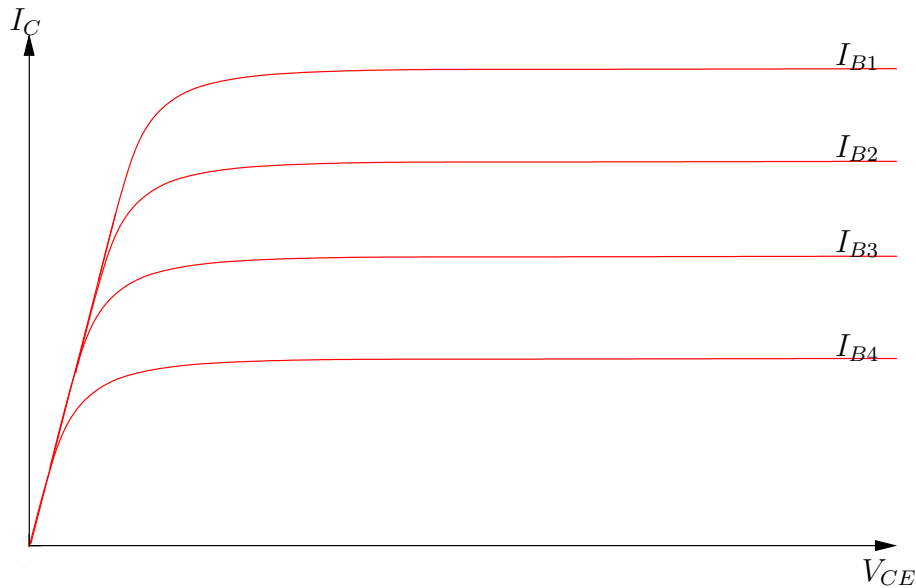


Figura 2.12: Caratteristica statica del BJT npn.

La tensione  $V_A$  rappresenta il punto di intersezione, sul dominio della tensione  $V_{CE}$ , di tutte le rette, a pendenza non nulla, rappresentanti la caratteristica del transistor bipolare. Essa sarà chiamata in futuro più semplicemente 'tensione Early'.

Questo modello è abbastanza complesso, ma è molto più completo del precedente: esso contiene l'effetto Early, e quindi è in grado di tenere conto del fatto che le regioni di svuotamento del BJT subiscano, all'aumentare della tensione applicata ai loro capi, una riduzione.

### 2.3.2 Safe Operating Area

Un altro aspetto non considerato nell'ambito del semplice modello di Ebers-Moll da noi precedentemente introdotto è il SOA (Safe Operating Area): di fatto il transistor non è in grado di sopportare qualsiasi corrente  $I_C$  al suo interno, poichè al di sopra di un certo punto di lavoro si ha rottura del transistor (rottura in senso materiale, irreversibile, non nel senso di fenomeni reversibili quali il breakdown).

Si sappia dunque, parlando di dispositivi come i transistori bipolari (cosa che però vale praticamente per qualsiasi dispositivo), che esistono dei limiti di funzionamento, sia per quanto riguarda la tensione che per quanto riguarda la corrente: al di sopra di certi valori i transistori non possono reggere,



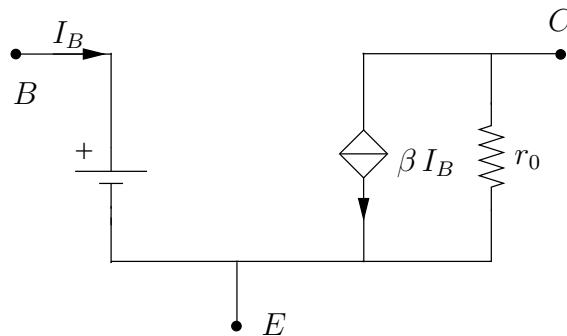


Figura 2.13: Modello del BJT in polarizzazione diretta con l'effetto Early.

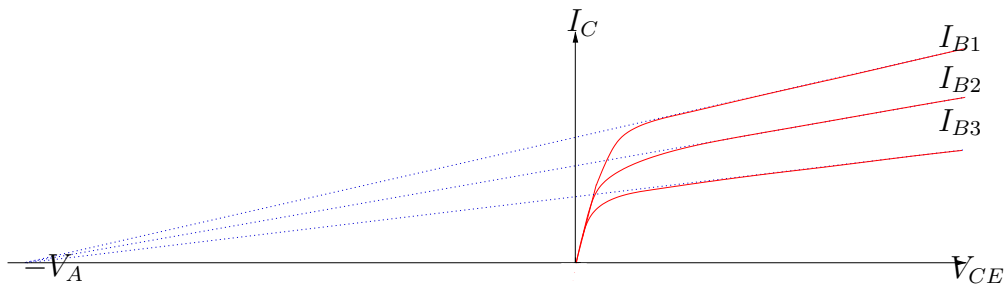


Figura 2.14: Caratteristica statica del BJT npn con effetto Early.

e quindi potrebbero smettere di funzionare (un esempio classico potrebbe essere l'effetto Joule: troppa tensione/corrente provoca un surriscaldamento del substrato distruggendolo).

### 2.3.3 Circuito di transistori come amplificatore

Fatte le premesse e precisazioni sullo studio della caratteristica statica del transistor bipolare, potremmo porci una domanda fondamentale: considerando il piano  $V_{CE}/I_C$ , è possibile lavorare in qualsiasi punto di esso? Cerchiamo di riesprimerci meglio: abbiamo un'espressione della caratteristica statica, e sappiamo che essa nel piano ha una certa crescita, per poi stabilizzarsi e rimanere quasi costante (a meno della pendenza dell'effetto Early). Si può lavorare su qualsiasi punto di lavoro, ossia possiamo utilizzare uno qualsiasi dei punti  $(V_{CE}; I_C)$  del piano, a nostro piacere?

La risposta è NO: un transistor, per funzionare, deve essere polarizzato da una rete di polarizzazione; essa stabilisce i vincoli sui punti di lavoro del transistor, decidendo come esso deve funzionare ed in quale punto di lavoro.

La rete è una normale rete lineare, con un generatore di tensione in serie ad un resistore; qui verrà collegato un generatore di corrente, ossia nella

fatispecie il BJT in questione. La rete avrà una caratteristica simile alla figura 2.13.

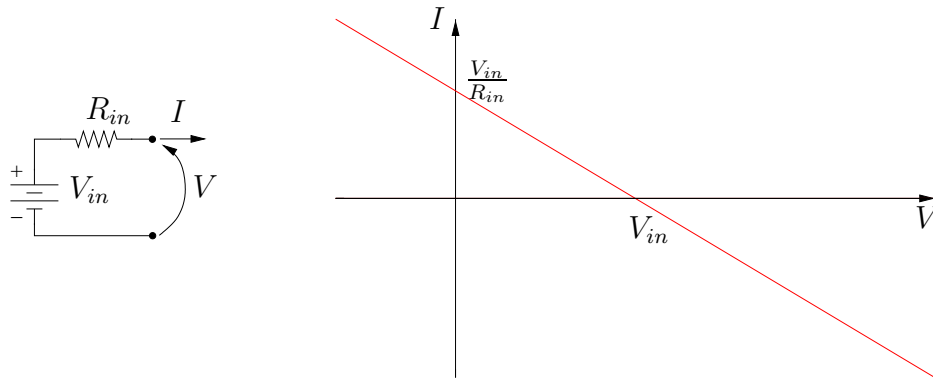


Figura 2.15: Circuito equivalente di una generica rete lineare e caratteristica corrispondente.

Possiamo pensare ad un discorso di questo genere: la rete impone una certa tensione di polarizzazione, che si può pensare come ad una sorta di retta di lavoro sul dispositivo: di tutta la caratteristica statica, di fatto si potranno considerare solo i punti della retta, poichè la polarizzazione, la tensione introdotta ai capi del transistor, è per forza quella decisa dalla rete. Il transistor si comporta come un generatore di corrente: se da un lato la rete impone una certa tensione, allora il transistor impone una certa corrente. Avendo imposizione sia di tensione  $V_{CE}$  che di corrente  $I_C$ , allora possiamo dire che non tutti i punti del piano saranno utilizzabili, poichè saranno solo possibili le coppie  $(V_{CE}; I_C)$  in grado di soddisfare le imposizioni di rete e transistor.

Per poter passare ad una fase più quantitativa dell'analisi dei possibili punti di lavoro, possiamo utilizzare la geometria analitica: sapendo che la rete è lineare, e come abbiamo anche visto nei disegni, avremo a che fare semplicemente con una retta; cosa intelligente che si può fare, dunque, è utilizzare la formula per la retta per due punti, considerando diversi punti di  $V_{CE}$ ; data  $V_{AL}$  la tensione imposta dal generatore di tensione di polarizzazione della rete, avremo che la tensione equivalente sulla rete sarà:

$$v = V_{AL} - R_C \cdot i$$

Dove  $v$  è per l'appunto la tensione imposta dalla rete, e  $i$  la corrente imposta dal generatore (dal transistor).

$$i = \frac{V_{AL}}{R_C}$$

$$i = 0 \implies v = V_{AL}$$

Al crescere della corrente imposta dal transistor, aumenta la caduta di tensione sul resistore, e così varia il punto di lavoro.

Lo studio di questa caratteristica è alla base della progettazione di amplificatori: esistono diversi tipi di amplificatori, differenziati per un parametro detto 'classe', che varia con il punto di riposo che si sceglie. Cosa vuol dire ciò? La polarizzazione di fatto stabilisce un punto di riposo, nel senso che impone una certa coppia  $(v; i)$  (o  $(V_{CE}; I_C)$ ), in cui si troverà l'amplificatore acceso, ma non eccitato da segnali di vario tipo. Un segnale (come vedremo meglio) rappresenta semplicemente, in questo ambito, una variazione dal punto di lavoro appena fissato: introducendo un segnale di tensione, o di corrente, l'amplificatore seguirà questo tipo di eccitazione, discostandosi dal punto di lavoro, per poi tornarvi al termine della sua durata. Mantenendo dunque vera l'ipotesi per la quale si deve lavorare su di un punto della retta, rappresentante l'imposizione di tensione della rete di polarizzazione, presentiamo le principali classi di amplificatori, differenziate per tipo di punto di lavoro:

- Amplificatori di classe A: si tratta di amplificatori il cui punto di riposo,  $I_{C,Q}$ , è posizionato all'incirca a metà del segmento rappresentante la retta lineare: spesso capita di dover amplificare segnali a valor medio nullo, che potrebbero dunque far variare  $I_{C,Q}$  sia in positivo che in negativo; in questo modo, si riesce a gestire le variazioni dettate dal segnale senza problemi. Il problema di questo tipo di amplificatori è il fatto che consumano: dal momento che il punto di riposo si trova ad un punto di lavoro con corrente  $I_{C,Q} > 0$ , viene dissipata potenza anche a riposo.
- Amplificatori di classe B: hanno il punto di lavoro a riposo  $I_{C,Q}$  posizionato circa a 0: quando gli amplificatori di classe B sono dunque attivi e senza segnali, la corrente che scorre dentro al collettore del transistor è circa nulla. Il grande vantaggio rispetto agli amplificatori di classe A come si può immaginare è il fatto che  $I \simeq 0$  a riposo, e dunque non vi è un grosso consumo di potenza; d'altra parte i segnali a valor medio nullo, molto spesso utilizzati, non possono essere amplificati poichè di fatto un sistema di questo genere non è in grado di permettere un abbassamento della corrente (se la corrente è già 0, come potrebbe diventare negativa, in un sistema di questo tipo?). Economico sotto il punto di vista della potenza consumata, ma completamente

inadatto all'amplificazione di molti segnali (quelli a valor medio nullo, come detto).

- Amplificatori di classe C: rappresentano una piccola variante all'amplificatore di classe B, polarizzando un circuito del tutto identico a quello del tipo B, con un circuito risonatore.
- Amplificatori push-pull: al posto di un solo transistor bipolare, se ne usano 2: uno è un npn, che si occupa di amplificare esclusivamente la parte positiva del segnale; un pnp si occupa esclusivamente della parte negativa del segnale, in maniera del tutto duale al npn. Utilizzando due transistori, quindi, si riesce ad ottenere un risultato in qualche maniera simile all'amplificatore di classe A, riuscendo ad amplificare segnali a valor medio nullo pur senza introdurre il punto di lavoro a metà della retta di impostazione della tensione.

## 2.4 Modelli di piccolo segnale

Abbiamo finora descritto il solo procedimento di polarizzazione di un transistor bipolare: ciò che abbiamo finora fatto è semplicemente fornire al transistor un punto di lavoro, in modo da poterlo utilizzare poi per amplificare segnali (quantomeno questa è una possibile applicazione che si può attribuire a dispositivi di questo genere). Come si fa dunque ad applicare un segnale in un circuito?

Consideriamo un circuito, interpretato con il modello di Ebers-Moll semplificato con modello a  $\pi$ .

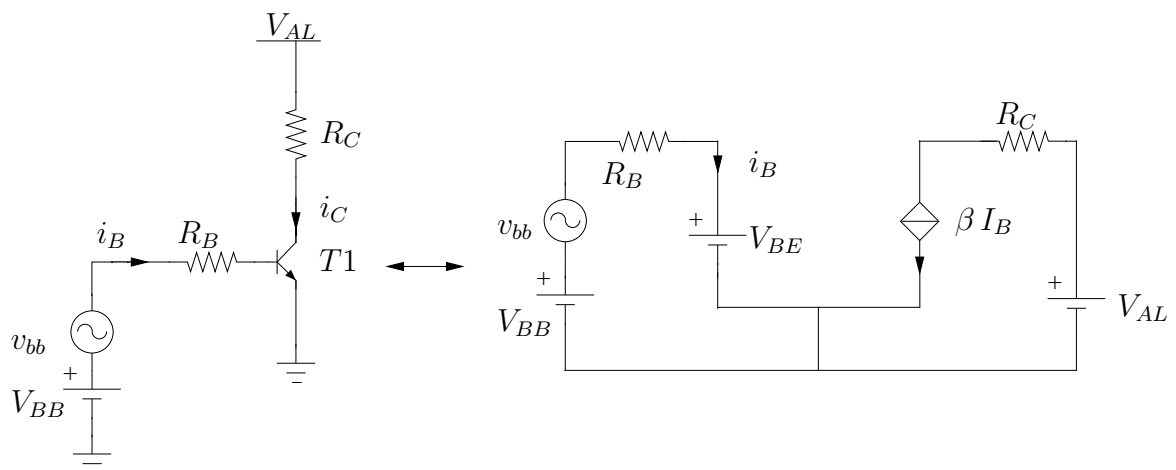


Figura 2.16: Sostituzione del modello di Ebers-Moll ad un transistor.

Un modello di questo tipo è molto complicato da utilizzare a causa degli elementi di non linearità in esso presenti, tuttavia essendo molto completo per ora andrà bene. Definiamo dunque la nostra convenzione, introducendo un certo numero di termini che utilizzeremo:

- $v_{BE}$  :  $V_{BE} + v_{be}$ ; si tratta della somma della tensione di alimentazione e del segnale. Di fatto si tratta dunque della continua  $V_{BE}$ , a partir da cui si vedono variazioni dettate dal termine variabile  $v_{be}$ .
- $i_B$ : è la corrente di base, prodotta da  $v_{BE}$ ; dal momento che vi è anche il contributo del segnale di tensione  $v_{be}$ , anche questa corrente sarà variabile.
- $I_B$ : è semplicemente la componente continua di  $i_B$ .
- $i_C$ : è la corrente di collettore, comprensiva sia della componente costante (continua) di polarizzazione, che della componente di segnale.
- $I_C$ : componente continua di  $i_C$ .

Il circuito finora presentato è un buon modello del circuito da studiare, però come sappiamo è anche molto difficile da utilizzare. Proviamo dunque, a partire da questo, a studiare la caratteristica  $i_C$ , in un suo particolare punto: sappiamo che  $i_C$  è funzione di  $v_{BE}$  (e quindi di  $v_{CE}$ ), come sappiamo sempre dai modelli finora studiati (modello del diodo, in questo caso, dal momento che per ipotesi consideriamo la giunzione base-emettitore del transistor bipolare modellizzato come un diodo), sappiamo che  $i_C$  avrà un andamento esponenziale al variare di  $v_{BE}$ :

$$i_C = \beta i_B = \beta I_0 e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}$$

Se il segnale in questione è abbastanza piccolo (si noti che per ora abbiamo solo parlato di segnale, non di piccolo segnale!), possiamo linearizzare la caratteristica nell'intorno del punto di riposo, e quindi considerare le variazioni del segnale sulla retta osculatrice del segnale nel punto di lavoro.

La tensione che varia sulle ascisse è  $v_{CE} = v_{BE} - v_{BC}$ , ma nelle espressioni di cui disponiamo, abbiamo una variazione esponenziale di  $v_{BE}$  (come già detto e visto parlando di diodo).

Cerchiamo di capire esattamente cosa stiamo facendo: noi sappiamo che la nostra caratteristica,  $i_C$ , ha una forma del tipo:

$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}}$$

Sappiamo che ci troviamo in un punto di riposo, quello che prima abbiamo calcolato parlando della sola polarizzazione ( $V_{CE,Q}; I_{C,Q}$ ): il punto di funzionamento che il sistema raggiunge, dopo essere stato alimentato. All'alimentazione, aggiungiamo un segnale, che il sistema dovrà utilizzare per qualche motivo (che non ci interessa in questo momento: ne parleremo meglio in seguito), e che farà semplicemente spostare lo stato del circuito dal punto di riposo determinato. Se questo segnale è piccolo, ossia è un piccolo segnale, è possibile utilizzare la teoria degli sviluppi di Taylor, per considerare le variazioni sulla retta approssimante nel punto di riposo l'andamento della caratteristica del diodo  $i_C(v_{CE})$ . Per linearizzare, dunque, tronchiamo lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine, ottenendo:

$$i_C = I_S e^{\frac{v_{BE}}{V_T}} = I_S e^{\frac{V_{BE} + v_{be}}{V_T}} = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} e^{\frac{v_{be}}{V_T}} = I_{C,Q} e^{\frac{v_{be}}{V_T}}$$

Considerando dunque come variabile del nostro sistema il solo segnale  $v_{be}$  (essendo comunque  $V_{BE}$  una costante è plausibilissimo), otterremo una cosa del tipo:

$$i_C \simeq I_{C,Q} \cdot \left[ 1 + \frac{v_{be}}{V_T} + \frac{1}{2!} \left( \frac{v_{be}}{V_T} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{v_{be}}{V_T} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left( \frac{v_{be}}{V_T} \right)^n \right]$$

Cosa significa, dal punto di vista puramente analitico, che un segnale è un piccolo segnale? Semplice: un segnale si può considerare 'piccolo' quando la linearizzazione è un'approssimazione ragionevole, e cioè quando la seconda armonica, il termine quadratico dello sviluppo di Taylor, è realmente trascurabile rispetto al primo; detto in matematiche:

$$\frac{1}{2!} \left( \frac{v_{be}}{V_T} \right)^2 \ll \frac{v_{be}}{V_T} \implies v_{be} \ll 2V_T$$

Se  $v_{be} \ll 2V_T$ , possiamo considerare dunque più che ragionevole l'approssimazione effettuata, considerare la linearizzazione rappresentativa dell'andamento della curva in un intorno del punto di lavoro, e così aver ragione di considerare il segnale un piccolo segnale!

Accertato dunque che il nostro sia un piccolo segnale, e quindi scartate le armoniche superiori alla seconda, vediamo che:

$$i_C \simeq I_{C,Q} \left( 1 + \frac{v_{be}}{V_T} \right) \implies i_C \simeq I_{C,Q} + \frac{I_{C,Q}}{V_T} v_{be}$$

Data dunque  $v_{be}$  variabile indipendente, abbiamo ridotto  $i_C$  ad una retta di pendenza  $\frac{I_{C,Q}}{V_T}$  e traslata verso l'alto di un termine di offset  $I_{C,Q}$ . A questo

punto, si definisce un parametro molto importante, ossia la conduttanza differenziale  $g_m$ , come:

$$g_m = \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} = \frac{I_{C,Q}}{V_T}$$

Da qui, possiamo dunque dire che:

$$i_C \simeq I_{C,Q} + g_m v_{be}$$

A questo punto, cosa si fa in un modello di piccolo segnale? Abbiamo  $i_C$ , formata da una componente continua cui si sovrappone una componente variabile; nel piccolo segnale, si eliminano tutte le componenti in continua, e si considerano esclusivamente i termini variabili. Nell'approccio che effettuiamo nello studio dei circuiti elettronici, dunque consideriamo separatamente, come due problemi diversi, lo studio della polarizzazione e lo studio del piccolo segnale; prima di tutto, cerchiamo il punto di riposo del transistor, non includendo segnali in questa prima fase; da qua, sarà possibile determinare i parametri di piccolo segnale, quale la conduttanza differenziale  $g_m$ ; in un secondo momento potremo studiare i segnali, considerando il nostro circuito come già alimentato, e riutilizzando semplicemente i parametri precedentemente ricavati dallo studio della polarizzazione: il nostro circuito ha già ricevuto da mangiare, e quindi non dobbiamo più preoccuparci di quello, quanto del fatto che ora deve lavorare su di un segnale. Per non considerare più l'alimentazione, dunque, considerato il bias point (punto di alimentazione) come la coppia tensione/corrente a riposo ( $V_{CE,Q}; I_{C,Q}$ ), effettueremo quella che in geometria analitica è una traslazione degli assi, portando come origine degli assi il bias point. In questo modo, potremo immaginare di trovarci al punto di riposo, e considerare le variazioni da esso, provocate dal segnale, approssimate ad una retta passante dall'origine (dal momento che il bias point ora rappresenta l'origine degli assi, e il piccolo segnale si faceva partendo dalla retta osculatrice della caratteristica nel punto di lavoro, e dunque tangente ad essa nel punto).

Per quanto riguarda il generatore pilotato del modello di piccolo segnale, potremo dire che esso imporrà una corrente di collettore verso emettitore pari a:

$$i_c = g_m v_{be}$$

Abbiamo stabilito un verso per la corrente imposta dal generatore pilotato, ma si vuole fare una piccola precisazione:  $v_{be}$  è variabile sia in positivo che in negativo, e dunque anche la corrente lo è: stabilire una convenzione

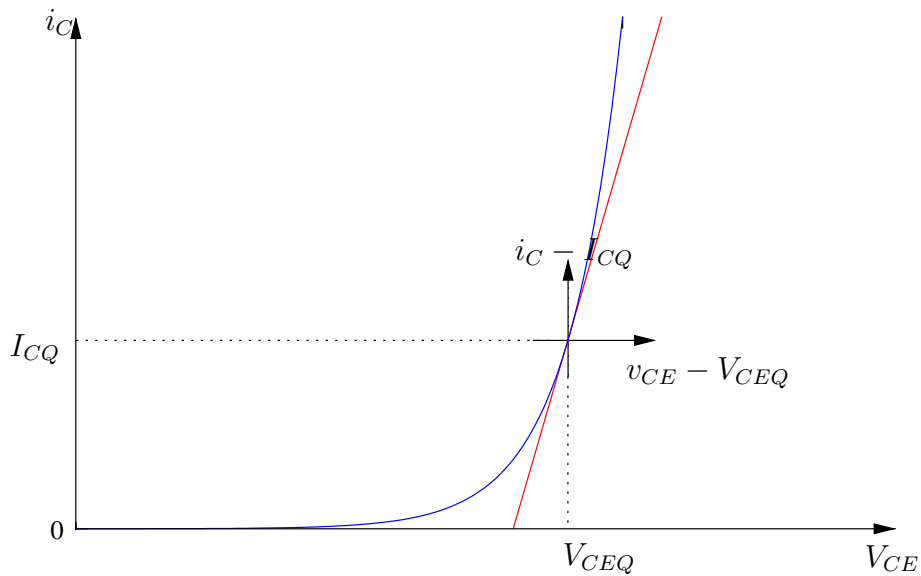


Figura 2.17: Caratteristica linearizzata del diodo per piccolo segnale.

di segno può essere certamente utile, dal momento che potrebbe fornire sicurezza al momento dello studio del circuito, ma si sappia che in realtà non si ha a che fare con una continua, ma con una variazione da essa, sia in un senso che nell'altro.

Abbiamo risolto volendo metà dei nostri problemi: nel modello di piccolo segnale  $g_m$  rappresenta, di fatto, il guadagno del transistor sul segnale, dato pilota  $v_{be}$ ; ciò che abbiamo dunque finora fatto è stato caratterizzare la parte 'destra' del modello a  $\pi$  sotto il punto di vista del segnale, ossia parlare del solo generatore pilotato (riutilizzando le nozioni che già conoscevamo). Non abbiamo considerato in quest'espressione una nostra vecchia pessima conoscenza: il  $\beta$ . Nelle espressioni finora utilizzate, non c'è traccia del  $\beta$ , ossia del guadagno del transistor. Siamo partiti dal caratterizzare la parte più interessante del transistor se vogliamo, ossia il generatore pilotato; ci resta tuttavia ancora una parte, critica, della quale non abbiamo ancora parlato (se non per cenni) in questo ambito: il diodo sulla giunzione base-emettitore. Sappiamo che la corrente  $i_B$  si può esprimere in funzione di  $i_C$ , come:

$$i_B = \frac{i_C}{\beta}$$

Data dunque  $i_C$ , dividendola per  $\beta$ , elemento che finora eravamo riusciti ad evitare di incontrare, è possibile trovare la corrente di base (comprensiva



di segnale  $i_b$ ); volendo dunque linearizzare il solo diodo in un intorno del punto di lavoro, analogamente a prima, troveremo qualcosa di molto simile:

$$\frac{\partial i_B}{\partial v_{BE}} = \frac{\partial}{\partial v_{BE}} \left( \frac{1}{\beta} i_C \right) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} = \frac{g_m}{\beta}$$

La pendenza della retta osculatrice della caratteristica del diodo, nel punto di riposo, è pari alla conduttanza differenziale, normalizzata di un divisore  $\beta$ .

Solo ora il guadagno del transistor  $\beta$  è entrato in gioco: il nostro scopo, studiando circuiti con transistori bipolari, è quello di studiare amplificazione di segnali, e dunque lo studio si deve prevalentemente concentrare su  $i_C$ . Per questo motivo il nostro approccio è stato quello di studiare prima di tutto il generatore pilotato, cercando di evidenziare il fatto che vogliamo garantire stabilità sulla corrente di collettore. Per questo motivo, garantire la stabilità del punto di lavoro  $I_{C,Q}$  è fondamentale, al fine di poter garantire la validità della linearizzazione effettuata: il nostro circuito deve essere in grado di stabilizzare  $I_{C,Q}$  indipendentemente (o quasi) da  $\beta$ , che dovrà invece influire sulla corrente di base, variandola in modo da mantenere però stabile quella di collettore.

Parlando di diodo, abbiamo detto che il modello di segnale con il quale si rappresenta un diodo in un circuito elettronico è una resistenza; introducendola, possiamo definire l'ultimo tassello del modello di piccolo segnale del transistor bipolare, come:

$$r_\pi = \frac{1}{\frac{g_m}{\beta}} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{\beta V_T}{I_{C,Q}}$$

Da qua possiamo intuire una nuova motivazione per la quale abbiamo bisogno informazioni riguardanti  $\beta$ , per quanto riguarda il suo valore minimo: se  $\beta$  è troppo piccolo,  $r_\pi$  diventa infinitesima, ma così anche la caduta di tensione ai suoi capi (che sarebbe  $v_{be}$ ); se  $v_{be}$  è troppo piccola, allora il pilota del nostro generatore pilotato tenderà ad annullarsi, e non si avrà effetto transistor.

Riassumendo, il modello di piccolo segnale così ottenuto, sarà il seguente:

$$i_C = g_m v_{be}; \quad i_B = \frac{i_C}{\beta}; \quad r_\pi = \frac{\beta}{g_m}; \quad g_m \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} = \frac{I_{C,Q}}{V_T}$$

Alcune note sul modello di piccolo segnale:

1. La conduttanza differenziale  $g_m$  è una transconduttanza (o mutua conduttanza): ciò significa che  $g_m$  è un parametro che non interessa diret-

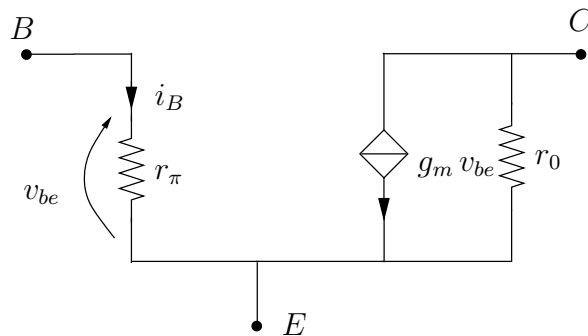


Figura 2.18: Caratteristica linearizzata del diodo per piccolo segnale.

tamente la maglia sulla quale si trova il dispositivo in questione, e per l'appunto è un parametro mutuo, separato.

2.  $r_o$  non era stata nominata prima di un certo momento, per un motivo particolare: l'effetto Early, molto spesso, per quanto riguarda circuiti elettronici basati su transistori bipolari, è trascurabile, e dunque si può omettere; in circuiti con MOS spesso una cosa del genere non è fattibile.
3. Bisogna essere assolutamente in grado di capire il modello di piccolo segnale, ed evitare errori come l'introduzione di batterie o generatori in continua di vario genere in un modello di piccolo segnale: le batterie servono esclusivamente per alimentare il circuito, per portare il circuito ad uno stato dal quale si potranno applicare segnali, ossia variazioni dal punto dettato dalle componenti continue. Il modello che abbiamo costruito si basa sul fatto che la polarizzazione del circuito è presente e funzionante: una volta 'traslato' il sistema nel bias point, non si deve più parlare di continue per alcun motivo.

Prima di terminare la trattazione a questo livello del modello di piccolo segnale, è buona cosa riassumere ciò che bisogna fare, nello studio di un circuito elettronico, al fine di studiarlo sotto il punto di vista dell'amplificazione di segnali:

1. Valutare il punto di funzionamento (bias point) del circuito;
2. Una volta verificato che il segnale è un piccolo segnale, e che quindi l'approssimazione lineare è accettabile, si possono scartare i termini di armonica superiori al secondo, e ricavare i parametri di piccolo segnale  $r_\pi$  e  $g_m$ ;

- Trasferire gli assi nel punto di lavoro, eliminando così, circuitalmente parlando, i generatori di alimentazioni in continua, dedicandosi quindi al solo studio del segnale.

### 2.4.1 Esempio teorico/pratico di studio di piccolo segnale

Consideriamo il circuito della figura 2.19.

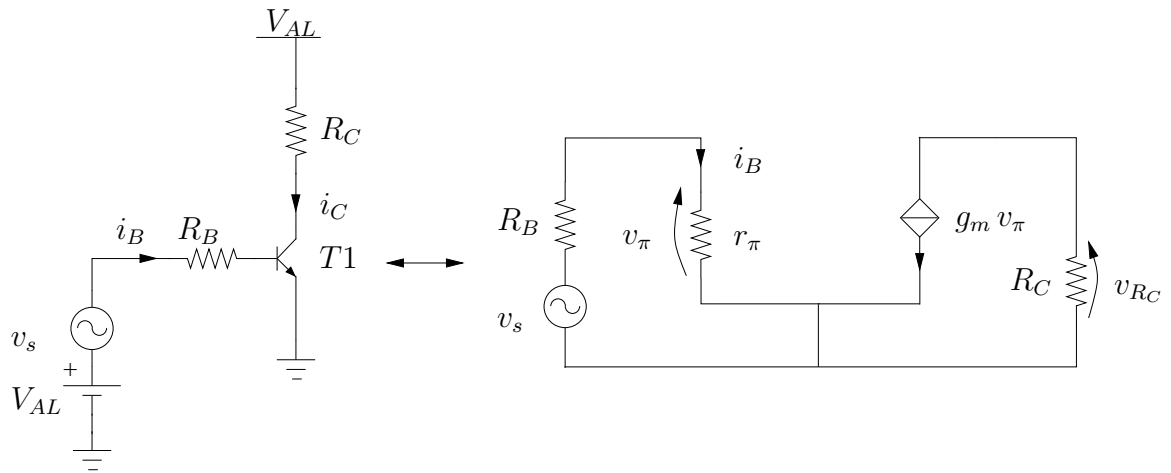


Figura 2.19: Esempio di circuito con piccolo segnale.

Supponiamo di aver già risolto la polarizzazione, e determinato i parametri di segnale quali  $r_\pi$  e  $g_m$ ; supponendo dunque che il transistor si trovi in regione lineare, possiamo direttamente applicare il modello di piccolo segnale, sostituendo al transistor il circuito a  $\pi$ , che lo modella, eliminando il contributo delle tensioni continue (poichè ricordiamo che esse sono utili esclusivamente ai fini della polarizzazione del transistor bipolare).

Considerando dunque il segnale  $v_s$ , e considerando valida l'ipotesi  $v_s \ll 2V_T$ , possiamo studiare mediante semplici nozioni di elettrotecnica il circuito risultante; calcolando il pilota  $v_\pi$ , mediante un semplice partitore di tensione, otteniamo:

$$v_\pi = v_s \cdot \frac{r_\pi}{R_B + r_\pi}$$

Notiamo già il primo guaio: il pilota  $v_\pi$  dipende da  $r_\pi$ , la quale dipende dal bias point, ma soprattutto dal  $\beta$ !

Dobbiamo liberarci della dipendenza da  $\beta$ , mediante un qualche stratagemma. Un'idea potrebbe cercar di ridurre la resistenza di base  $R_B$ : se infatti capita che  $R_B \ll r_\pi$ :

$$\frac{r_\pi}{R_B + r_\pi} \simeq \frac{r_\pi}{r_\pi} = 1$$

Purtroppo, ciò tecnologicamente è molto difficile da realizzare. Cerchiamo di vedere qualcos'altro, con una qualche osservazione intelligente. Una potrebbe ad esempio essere la seguente:

$$i_C = g_m v_\pi = g_m \frac{r_\pi}{R_B + r_\pi} v_s$$

Possiamo osservare che:

$$g_m r_\pi = \beta$$

Da ciò, si può ricavare che:

$$v_{RC} = -R_C i_C = -R_C g_m \frac{r_\pi}{r_\pi + R_B} v_s$$

Quello che abbiamo appena ultimato, è il primo calcolo di amplificazione dai noi fatto su di un circuito a transistori: se studiamo il rapporto tra la tensione di uscita  $v_o = v_{RC}$ , ed il segnale in ingresso  $v_s$ , notiamo che:

$$\frac{v_o}{v_s} < 0$$

L'amplificatore realizzato con questo tipo di topologia è un amplificatore invertente.

Facciamo ora un'osservazione interessante: supponiamo per assurdo (tecnologicamente parlando assurdo) di avere  $R_B \ll r_\pi$ :

$$i_C = g_m v_\pi = g_m \frac{r_\pi}{r_\pi + R_B} v_s \simeq g_m v_s$$

$$\frac{v_o}{v_s} \simeq -R_C g_m = \frac{I_{C,Q} R_C}{V_T} = \frac{V_{RC}}{V_T}$$

In questo modo, potremmo massimizzare il guadagno del circuito: se  $R_B \rightarrow 0$ , il guadagno del circuito amplificatore è massimo.

### Osservazioni sulla resistenza di collettore $R_C$

Supponiamo di introdurre su  $R_C$  una resistenza molto molto elevata, tendenzialmente infinita: ciò si potrebbe ad esempio effettuare, introducendo sul collettore un generatore ideale di corrente, in grado di imporre una corrente sul collettore, con una resistenza idealmente infinita. L'ipotesi di partenza,

dunque, è  $R_C \rightarrow +\infty$ . Cosa capita? Se nel modello di piccolo segnale facciamo tendere a  $+\infty$  la resistenza sul collettore, la resistenza modellizzante l'effetto Early,  $r_o$ , diventerà influente rispetto a  $R_C$ , poichè.

$$r_o = \frac{V_A + V_{CE,Q}}{I_{C,Q}}$$

Ma  $V_{CE,Q} \ll V_A$ , e quindi:

$$r_o \simeq \frac{V_A}{I_{C,Q}}$$

Se  $R_C \rightarrow +\infty$ , dunque, capiterà che, per le proprietà della somma armonica:

$$R_C \oplus r_o \simeq \infty \oplus r_o \simeq r_o$$

Potremmo pensare a questo punto di calcolare il guadagno massimo del circuito così progettato, partendo dall'uso di un ipotetico generatore ideale di corrente; questa volta, il guadagno massimo  $A_{max}$  sarà pari a:

$$A_{max} = \frac{v_o}{v_s} = r_o g_m$$

Notiamo, mediante alcune osservazioni, che:

$$r_o g_m \simeq -\frac{I_{C,Q}}{V_T} \cdot \frac{V_A}{I_{C,Q}} = -\frac{V_A}{V_T}$$

Immaginiamo che  $V_A$  sia dell'ordine dei 100 V, e  $V_T$  circa uguale a 25 mV; date le ipotesi (per quanto ideali esse siano) precedenti, vediamo che:

$$A_{max} \simeq \frac{V_A}{V_T} \sim 4000$$

Il discorso finora fatto, da quando abbiamo iniziato a parlare di generatori di corrente ideali, ci ha portati alla determinazione di un guadagno circa uguale a 4000: la realizzazione di un guadagno del genere, con un circuito come quello che abbiamo presentato, è irrealizzabile; ciò che abbiamo utilizzato tuttavia era ideale, ed eran condizioni estremamente favorevoli, e ci han permesso di renderci conto di un limite: è impossibile realizzare guadagni al di sopra di circa 4000, poichè utilizzando componenti ideali abbiamo trovato questo come limite teorico di guadagno realizzabile. Si tenga conto che non è assolutamente un risultato quantitativo: abbiamo utilizzato stime molto indicative per quanto riguarda  $V_A$  e  $V_T$ , ma comunque in grado di fornirci un'idea del guadagno massimo ottenibile con queste tecniche. Nella realtà, utilizzando particolari configurazione multi-transistore (delle quali

faremo cenno più avanti), sarà possibile effettivamente ottenere un  $\beta$  dell'ordine di grandezza appena presentato (anche se qua si parlava di un singolo transistor).

## Capitolo 3

# Stadi di Amplificazione

Abbiamo iniziato a capire quale sarà il nostro obiettivo: utilizzare circuiti basati su transistori (per ora bipolari, in seguito si introdurranno anche MOSFET) per amplificare segnali, ossia grandezze variabili (tensione/corrente) rispetto ad un punto di lavoro fisso.

Abbiamo precedentemente introdotto un modello per i transistori bipolari, a partire dal più completo modello di Ebers-Moll; possiamo fare una piccola precisazione su di questo, considerando un parametro (spesso non influente) aggiuntivo:

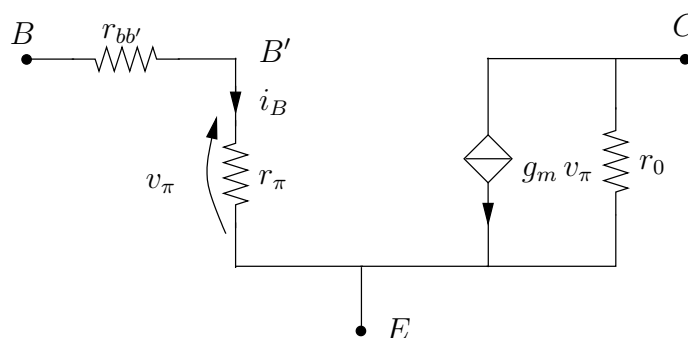


Figura 3.1: Modello a  $\pi$  con l'aggiunta della resistenza di base.

Il fatto che i transistori bipolari siano costituiti da substrati di silicio drogati, introduce il fatto che, per arrivare alla giunzione, la corrente incontra una resistenza, resistenza che si può modellizzare mediante un resistore  $r_{bb'}$ . La base rispetto all'emettitore non è molto drogata, quindi più resistiva e talvolta questo contributo potrebbe essere influente rispetto alle altre grandezze in gioco. Il modello ora descritto è funzionale, a patto di restare nei soliti vincoli: innanzitutto non si considerano fenomeni transitori, e poi (cosa della quale non si è ancora parlato), frequenza del segnale da amplificare

relativamente bassa (vedremo che segnali elevati risvegliano effetti capacitivi intrinseci al transistoro bipolare, quindi lo studio dell'alta frequenza è da studiarsi a parte, come faremo in seguito).

Il nostro obiettivo è quello di ottenere un amplificatore a partire da un circuito di questo genere. Quello che si vuole fare, dunque, è ottenere un modello di questo tipo:

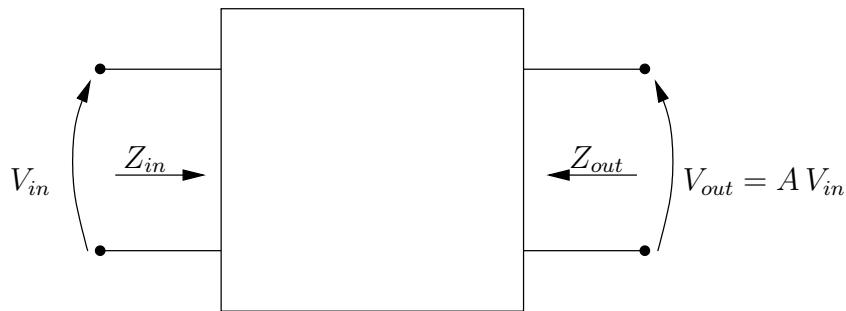


Figura 3.2: Schema generico di un amplificatore.

Il nostro desiderio è quello di esprimere l'amplificazione in termini di guadagno  $A$ , di impedenza di ingresso  $Z_i$ , e impedenza di uscita  $Z_o$ .

Stiamo continuando a parlare di amplificazione, ma cosa significa 'amplificare'? Amplifichiamo tensioni, correnti, o quale altra grandezza?

La risposta a questa domanda è abbastanza precisa: l'elettronica che stiamo trattando è attiva, ossia consuma potenza, e quindi ha bisogno di potenza entrante, di un'alimentazione. L'amplificatore è in grado di amplificare la potenza di un segnale, sfruttando la potenza assorbita dall'alimentazione.

Come possiamo utilizzare un transistoro bipolare, polarizzato mediante un circuito con una qualche topologia, come amplificatore di potenza? Innanzitutto, la prima domanda cui bisognerebbe dare risposta, è: a quale dei tre ingressi possiamo collegare il segnale?

Sostanzialmente, l'ideale sarebbe trattare (come in figura) l'amplificatore con due fili in ingresso e due in uscita, ossia come un doppio bipolo; dal momento che gli ingressi sono tre, avremo semplicemente due ingressi collegati allo stesso filo (sarà quello che chiameremo terminale comune), e i restanti due saranno terminali separati. Per rispondere alla domanda precedente, possiamo subito dire dove non ha senso collegare il segnale: dal collettore. Dal momento che il segnale di ingresso deve provocare una variazione dell'uscita, bisogna introdurre il segnale in un terminale da cui si possa comandare il transistoro. Dal momento che la tensione di comando principale è  $V_{BE}$ , ha senso comandare introducendo variazioni solo tra base ed emettitore, ossia senza andare a coinvolgere il collettore. Gli ingressi possibili saranno quindi



solo base ed emettitore; tutti e tre i terminali saranno invece potenziali uscite, a seconda del tipo di amplificatore che si intende realizzare. Le possibili configurazioni saranno:

- Ingresso: Base; Uscita: Collettore.
- Ingresso: Base; Uscita: Emettitore.
- Ingresso: Emettitore; Uscita: Collettore.

Quantomeno, le tre appena elencate rappresentano le topologie più comunemente utilizzate in ambito di amplificazione. Prima di parlare di stadi di amplificazioni, ossia delle topologie appena descritte e del loro comportamento, presentiamo alcuni risultati preliminari, in grado di facilitare notevolmente qualsiasi tipo di calcolo pratico.

### 3.1 Calcolo delle impedenze

Come possiamo immaginare, ogni volta che si studia uno stadio di amplificazione, ossia una delle tre topologie appena presentate, si dovrebbe sostituire al transistor bipolare (o ai transistori bipolari, se ce ne fosse più di uno) il modello di piccolo segnale (di solito, il modello a  $\pi$ ), e quindi risolvere un esercizio di elettrotecnica che, molto spesso, potrebbe risultare lungo e noioso. Ciò che possiamo direttamente fare, è calcolare una volta per tutte le impedenze 'viste nei morsetti del transistor': una delle regole principali dell'elettronica, è quella che dice che i componenti elettronici sono sostanzialmente miopi come delle talpe, poichè non sono in grado di vedere nulla al di fuori dei propri morsetti. Se collegassimo dunque una rete di impedenze complicatissima ad un impedenzometro e ne misurassimo il valore, e trovassimo un'impedenza equivalente formata da un condensatore in parallelo ad un resistore (per esempio), per il principio di equivalenza i due componenti sarebbero in tutto e per tutto uguali (quantomeno a parità di condizioni: parlare di impedenze talvolta può essere un po' più pesante, a causa delle diverse risposte in frequenza dei componenti).

Ciò che possiamo dunque fare è studiare le equazioni in grado di presentare le impedenze equivalenti ottenute guardando nei morsetti dei tre elettrodi del transistor bipolare: emettitore E, base B, collettore C. Una volta risolti questi problemi, avremo espressioni sempre valide (nei limiti di validità dei modelli a partire dai quali le abbiamo calcolate, ovviamente) per qualsiasi circuito, e potremo considerare il transistor semplicemente come una resistenza (o più generalmente un'impedenza).

### 3.1.1 Calcolo dell'impedenza di base, $Z_{B,in}$

Il circuito equivalente del transistor bipolare in questo caso sarà il seguente:

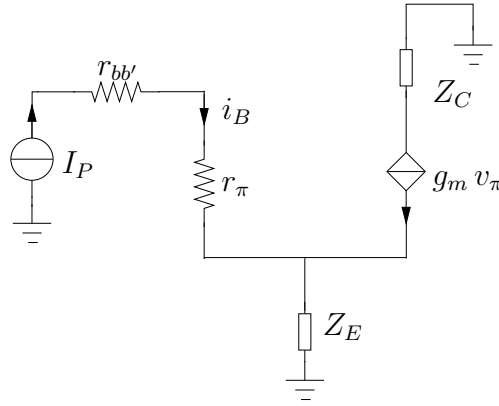


Figura 3.3: Schema per il calcolo dell'impedenza equivalente di base.

Scegliamo di alimentare mediante un generatore di corrente noto il ramo di base. Vediamo che:

$$Z_{B,in} = \frac{v_p}{i_p}$$

Vediamo che la tensione di  $v_p$  sarà semplicemente, utilizzando le equazioni di Kirchhoff:

$$v_p = v_\pi + V_{Z_E} = i_p(r_\pi + r_{bb'}) + Z_E(\beta + 1)i_p = i_p [Z_E(\beta + 1) + r_\pi + r_{bb'}]$$

Dividendo semplicemente dunque per  $i_p$  l'espressione appena calcolata di  $v_p$ , ossia della tensione che cade sul generatore di corrente di prova, vediamo che:

$$Z_{B,in} = r_\pi + r_{bb'} + Z_E(1 + \beta)$$

### 3.1.2 Calcolo dell'impedenza di emettitore, $Z_{E,in}$

Avremmo a che fare con un circuito di questo genere:

Dovremmo collegare un generatore di tensione o corrente all'emettitore del transistor, il quale è un nodo senza componenti ulteriori. La ragione ci spingerebbe, conoscendo l'elettrotecnica, a collegarvi un generatore noto di tensione. In questo particolarissimo caso, vediamo che in realtà non è l'unica strada possibile; esporremo entrambi i metodi, in quanto si potrebbero

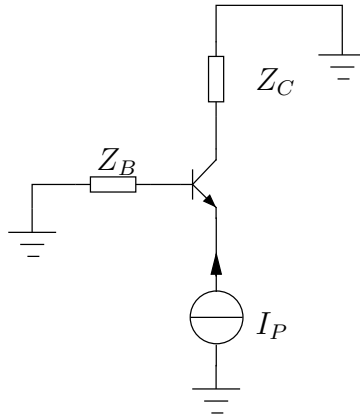


Figura 3.4: Schema per il calcolo dell'impedenza equivalente di emettitore con generatore di corrente.

introdurre idee interessanti per il calcolo di resistenze viste da un terminale (cosa che comunque tornerà utile anche più avanti).

### Introduzione di generatore noto di corrente

L'utilizzo di un generatore noto di corrente normalmente sarebbe una follia, poichè tradizionalmente ad un nodo direttamente collegato a 0 V converrebbe collegare un generatore di tensione, il quale impone sul ramo la tensione desiderata, e quindi permette di calcolare semplicemente le grandezze nel resto del circuito. Vedremo poi una piccola variante di ciò; scegliamo dunque di collegare un generatore noto di corrente, e vediamo che:

$$i_B = \frac{i_p}{\beta + 1}$$

$$i_C = \frac{\beta}{\beta + 1} i_p$$

Possiamo dunque dire che:

$$v_p = (r_\pi + r_{bb'} + Z_B) i_B = \frac{r_\pi + r_{bb'} + Z_B}{\beta + 1} i_p$$

Da qui:

$$Z_{E,in} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{r_\pi + r_{bb'} + Z_B}{\beta + 1}$$

Il fatto che conosciamo esattamente quanta corrente è presente nel collettore se essa è presente in base o in collettore, ci ha permesso di utilizzare

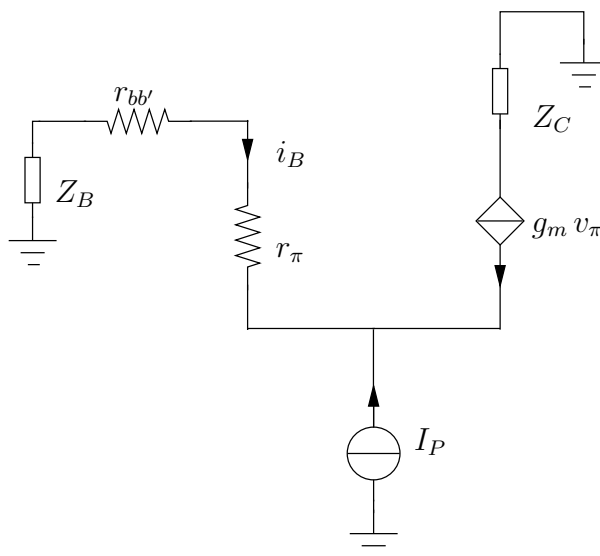


Figura 3.5: Schema per il calcolo dell'impedenza equivalente di emettitore una volta sostituito il modello del BJT.

questo trucco alquanto atipico: effettuare partizioni di corrente di questo tipo solitamente è assolutamente sconsigliato.

### Introduzione di generatore noto di tensione, e sovrapposizione degli effetti

Presentiamo ora un metodo più generale, e consigliato, se non si vogliono fare esperimenti strani (e osservazioni non banali come quella appena effettuata); introduciamo dunque un generatore noto di tensione sul nodo all'emettitore, e facciamo alcune osservazioni. Introduciamo un 'extra-credit', un elemento prima non considerato: la  $r_o$ , ossia la resistenza modellizzante l'effetto Early.

Abbiamo precedentemente detto che i componenti elettronici sono miopi come delle talpe, dunque possiamo fare i furbi, e dividere questo circuito in diversi circuiti più semplici: se ciascun circuito vede la stessa tensione ai propri capi, se cioè la separazione non comporta variazioni di corrente/tensione per i singoli componenti, non c'è motivo per non semplificarci la vita! Vediamo dunque che la tensione  $v_p$  è di fatto ai capi del ramo di base, del ramo al collettore, e del ramo contenente la resistenza Early  $r_o$ : ciò che si può fare, dunque, è semplicemente ciò:

Abbiamo tre sottocircuiti, collegati a tre generatori di corrente,  $v'_p = v''_p = v'''_p$ . La cosa estremamente gustosa di questi tre sottocircuiti, è che sono lineari! E ciò che stiamo cercando, ossia la corrente su di questi generatori,

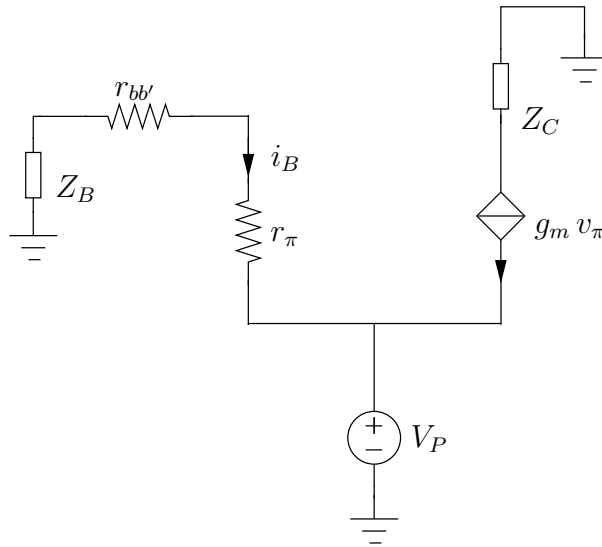


Figura 3.6: Schema per il calcolo dell'impedenza equivalente di emettitore con generatore di tensione.

è una grandezza lineare! Quello che possiamo dunque usare, è il metodo di sovrapposizione degli effetti, ossia la riproduzione elettronica del tanto famoso concetto di linearità. Ciò che possiamo fare dunque è calcolare la corrente  $i_p$  considerata come somma delle  $i_p'$ ,  $i_p''$ ,  $i_p'''$ , ciascuna eccitata da ciascuno dei tre generatori: ciò che capita infatti, è che potenzialmente:

$$i_p' = f_1(v_p'; v_p''; v_p''')$$

$$i_p'' = f_2(v_p'; v_p''; v_p''')$$

$$i_p''' = f_3(v_p'; v_p''; v_p''')$$

Ossia, ciascuna delle correnti potrebbe venire eccitata da qualsiasi generatore di tensione in qualsiasi punto della rete (anche non sullo stesso ramo).

Facciamo i conti, e vediamo che:

$$i_p' = \frac{v_p'}{r_\pi + Z_B} + 0 \cdot v_p'' + 0 \cdot v_p'''$$

In questo caso il contributo deriva solo dal generatore presente sul ramo, e si calcola semplicemente mediante la legge di Ohm (dividiamo la tensione per la resistenza presente sul ramo).

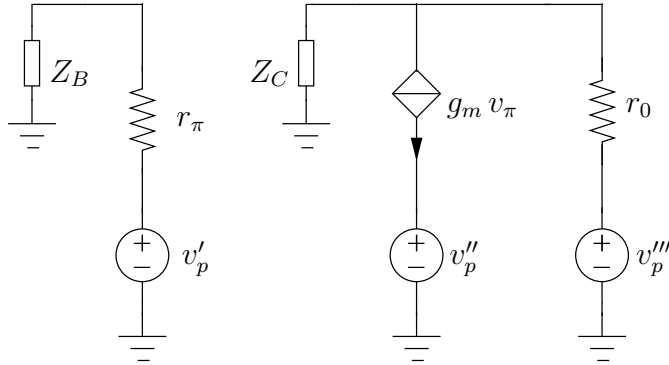


Figura 3.7: Schema per il calcolo dell'impedenza equivalente di emettitore con generatori di tensione.

La seconda corrente sarà:

$$i_p'' = 0 \cdot v_p''' + 0 \cdot v_p'' + v_p' \cdot \left( -\frac{r_\pi}{r_\pi + Z_B} \right) \cdot (-g_m)$$

Ciò che capita in questo ramo, è il seguente fatto: usando la sovrapposizione degli effetti, se il generatore di corrente, eccitato dalla tensione  $v_\pi$ , è spento, allora esso opporrà una resistenza idealmente infinita (ossia sarà come un circuito aperto), e tutta la tensione cadrà ai capi del circuito aperto; stessa cosa capiterà con  $v_p'''$ ; con  $v_p''$ , ecciteremo il generatore dipendente di corrente, mentre gli altri generatori saranno sostanzialmente cortocircuiti, e quindi, calcolando il partitore di tensione, avremo il risultato appena trovato.

Per quanto riguarda la terza corrente:

$$i_p''' = \frac{v_p'''}{r_o + Z_C} + 0 \cdot v_p'' + v_p' \cdot (-g_m) \cdot \frac{Z_C}{Z_C + r_o} = v_p' \frac{1 - g_m Z_C}{r_o + Z_C}$$

Questo comportamento si può facilmente capire avendo capito i precedenti: se  $v_p'$  è disattivato, la corrente scorrerà solo sul ramo che ci interessa, eccitata dal generatore  $v_p'''$ ;  $v_p''$  incontra l'impedenza infinita del generatore di corrente;  $v_p'$  eccita il generatore dipendente, ed un partitore di tensione sarà nuovamente in grado di fornirci il contributo di corrente, questa volta sull'altro ramo.

Applichiamo a questo punto la sovrapposizione degli effetti, ottenendo:

$$\begin{aligned} i_p &= i_p' + i_p'' + i_p''' = v_p \left[ g_m + \frac{1 - g_m Z_C}{r_o + Z_C} \right] = \\ &= v_p \left[ \frac{g_m(r_o + Z_C) + 1 - g_m Z_C}{r_o + Z_C} \right] = \frac{1 + g_m r_o}{r_o + Z_C} v_p \end{aligned}$$

A questo punto, si ottiene banalmente il risultato:

$$Z_{E,in} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{r_o + Z_C}{1 + g_m r_o}$$

### 3.1.3 Calcolo dell'impedenza di collettore, $Z_{C,in}$

Determiniamo l'ultima delle impedenze viste dai terminali del transistor:  $Z_{C,in}$ . Si tratterebbe di un conto alquanto complicato da effettuare rigorosamente, tuttavia è possibile dimostrare immediatamente a occhio il risultato, mediante un'osservazione intelligente.

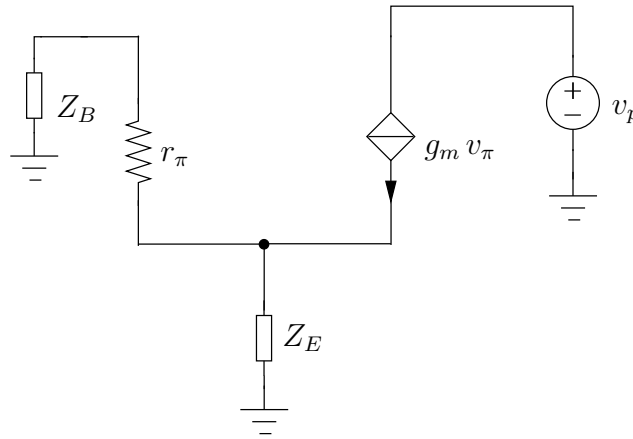


Figura 3.8: Schema per il calcolo dell'impedenza equivalente di collettore.

Vediamo che dal generatore pilotato di corrente viene imposta una corrente pari a  $g_m v_\pi$ ; una parte di essa andrà all'emettitore, ed una parte in base. Nella fattispecie, sappiamo che in base ci sarà una caduta di tensione sulla resistenza  $r_\pi$  positiva verso il basso (dal momento che la corrente che scende dal generatore pilotato si ripartisce in questo modo tra base ed emettitore). Ciò ci conduce ad una situazione piuttosto strana: per ipotesi, al fine di avere una corrente positiva verso il basso imposta dal generatore pilotato, dovremmo avere una caduta di tensione  $v_\pi$  su  $r_\pi$  positiva verso l'alto. L'unico caso che permette di risolvere questo problema, rispettando tutte le ipotesi, è  $v_\pi = 0$ . Se però il pilota è nullo, allora anche la corrente imposta dal generatore dipendente è nulla, ma quindi la corrente presente sul ramo del generatore di prova di tensione sarà nulla. Ciò che capiterà, dunque, sarà:

$$v_\pi = 0 \implies g_m v_\pi = 0 \implies Z_{C,in} = \frac{v_p}{i_p} \rightarrow +\infty$$

Ossia, dal momento che la corrente sul collettore è nulla, il collettore si modella con un'impedenza infinita, ossia con un circuito aperto, e quindi oppone una resistenza infinita a ciò che entra in esso.

Piccola nota: considerando l'effetto Early, e quindi la resistenza che lo modella,  $r_o$ , avremmo che:

$$R_{C,in} = \infty \oplus r_o \simeq r_o$$

Cosa abbiamo fatto finora dunque? A cosa servono questi esercizi di elettrotecnica?

Le tre relazioni appena calcolate sono le impedenze di ingresso dei tre morsetti del transistor bipolare, dunque impedenze equivalenti modellizzanti il comportamento del transistor visto da un dispositivo che vi invierà un segnale di qualche tipo. Avendo risolto una volta per tutte questo tipo di problema, avremo una notevole semplificazione dei conti, dal momento che ora conosciamo esattamente il comportamento del transistor per ciascun ingresso, e dunque potremo evitare di utilizzare ogni volta il modello di piccolo segnale: considerando per ipotesi di non trovarci in stato di riposo, di avere dunque il transistor già alimentato, e dati i parametri di piccolo segnale  $g_m$  e  $r_\pi$ , potremo evitare di effettuare ogni volta i conti circuitali, affidandoci ad una soluzione già nota e sempre valida, riducendo il problema in diversi sottoproblemi e semplificandoci notevolmente la vita.

Queste soluzioni sono molto più utili e versatili di quello che pensiamo: mediante alcuni accorgimenti sulle dimostrazioni, potremo parzialmente riciclarle, considerando il fatto che sul MOSFET molto spesso  $r_o$  è presente (a causa della Channel Length Modulation), ma  $r_\pi$  è sempre infinita. Riassumiamo dunque i risultati finora trovati:

$$Z_{B,in} = r_\pi + r_{bb'} + Z_E(1 + \beta)$$

$$Z_{E,in} = \frac{r_o + Z_C}{1 + g_m r_o} \xrightarrow{\text{No Early}} \frac{r_\pi + r_{bb'} + Z_B}{\beta + 1}$$

$$R_{C,in} = r_o \xrightarrow{\text{No Early}} +\infty$$

Queste equazioni saranno dunque fondamentali nello studio dei circuiti rappresentanti stadi di amplificazione di vario tipo: vedremo presto quanto sarà importante la semplificazione apportataci da queste espressioni.



## 3.2 Introduzione agli stadi di amplificazione

A partire dalle equazioni appena ricavate, in grado di fornirci utili informazioni sulle impedenze in ingresso dei vari terminali di un transistor bipolare, studiamo i tre stadi di amplificazione fondamentali del BJT, ossia le tre topologie a partire dalle quali possiamo utilizzare il transistor bipolare come amplificatore di potenza. Per ogni stadio di amplificazione, vorremo studiare tre parametri fondamentali: guadagno in tensione/corrente/potenza  $A$  (soprattutto ci interesseremo del guadagno in tensione), impedenza di ingresso  $Z_i$ , ed impedenza di uscita  $Z_o$ .

Prima di tutto, per studiare buoni amplificatori, dovremo avere un buon circuito di polarizzazione: l'eccellente sarebbe il Self-Biasing (circuito di autopolarizzazione), sul quale applicheremo un piccolo trucco per quanto riguarda l'introduzione del segnale.

Ciò che stiamo per fare, è formalmente scorretto, però ai fini di non appesantire troppo le notazioni ed il carico solo alla fine spiegheremo il procedimento giusto per la progettazione di un circuito elettronico di amplificazione: ora supponiamo di avere la polarizzazione già ultimata, e di collegare direttamente al circuito di polarizzazione la fonte di segnale, dalla quale partiremo ai fini di determinarne l'amplificazione causata dal circuito. Tutti gli alimentatori saranno d'ora in avanti considerati collegati a 0 V, e quindi ci troviamo in circuito di piccolo segnale, ed ignoreremo completamente le componenti continue di tensioni/correnti. Fatta questa dovuta introduzione, che ci permetterà di semplificare la convenzione utilizzata, introduciamo il primo degli stadi di amplificazione.

## 3.3 Stadio ad Emittitore Comune

Date le ipotesi precedentemente avanzate, consideriamo direttamente il circuito di segnale rappresentante il primo stadio di amplificazione che analizzeremo: lo stadio ad emittitore comune.

Vogliamo calcolare la tensione di uscita dello stadio,  $v_o$ : essa rappresenta la tensione in uscita dallo stadio. Per calcolarla, dovremo calcolare la caduta di tensione sul resistore tra collettore e 0 V, ossia  $R_C$ , che in questo ambito sarà il carico del nostro circuito di amplificazione; tattica utile in questo ambito sarebbe calcolare la corrente di collettore  $i_C$ , generata dal generatore di segnale  $v_s$ . Come sappiamo, per avere  $i_C$ , possiamo utilizzare  $i_B$  e la relativa relazione che lega le due correnti (la moltiplicazione per  $\beta$ ).

Come possiamo ottenere dunque  $i_B$ ? Un'idea potrebbe essere sostituire il modello di piccolo segnale nel circuito, e svolgere un lunghissimo esercizio

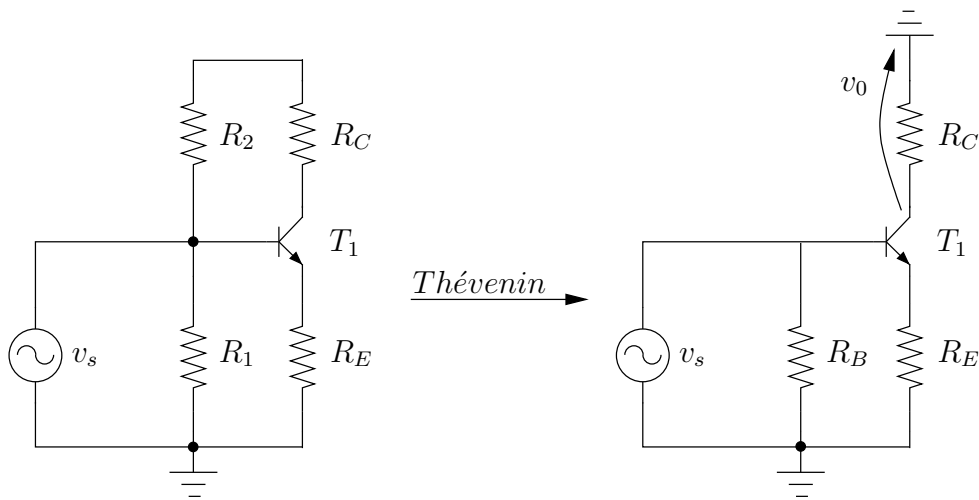


Figura 3.9: Stadio ad emettitore comune.

di elettrotecnica. L'idea furba, è andare a rivedere qualche pagina prima le espressioni delle impedenze di ingresso, nella fatispécie quella di base,  $Z_{B,in}$ :

$$Z_{B,in} = r_{\pi} + Z_E(\beta + 1)$$

Vedendo l'equivalente Thevenin del ramo di base del circuito, vediamo che  $v_s$  è in parallelo a  $R_B = R_1 \oplus R_2$ , e quindi la nostra  $v_o$  avrà un'espressione del tipo:

$$v_o = v_s \cdot \frac{1}{r_{\pi} + R_E(1 + \beta)} \cdot \beta \cdot (-1) \cdot R_C$$

Il guadagno in tensione  $A_v$  dello stadio di amplificazione a emettitore comune sarà dunque:

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} = \frac{-\beta}{r_{\pi} + R_E(1 + \beta)}$$

Si noti che questo stadio è invertente: la tensione in uscita è in opposizione di fase rispetto a quella in ingresso, poichè lo stadio 'cambia il segno' della tensione rispetto a quello di partenza.

Consideriamo alcuni andamenti asintotici dell'espressione appena ricavata, in modo da renderci conto di quale sia il suo comportamento, di come si possa gestire e migliorare, in fatto di guadagno:

- Se  $R_E \rightarrow 0$ , e  $r_{\pi} \gg R_E(1 + \beta)$ , capita che:

$$A_v \simeq \frac{-\beta R_C}{r_\pi}$$

Ricordando che però  $g_m r_\pi = \beta$ , vediamo che:

$$A_v \simeq -g_m R_C$$

Sappiamo tuttavia che:

$$g_m = \frac{I_{C,Q}}{V_T}$$

Stabilizzando dunque  $I_C$ , siamo a cavallo, dal momento che stabilizziamo il guadagno  $g_m$  (la transconduttanza), e quindi mediante il circuito di Self-Biasing possiamo andare sul sicuro.

- Se  $\beta \rightarrow +\infty$ , capiterà che:

$$r_\pi = \frac{\beta}{g_m} \implies A_v \simeq \frac{R_C}{R_E}$$

Ciò si può anche verificare in questo modo:

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{-\beta}{r_\pi + R_E(1 + \beta)} = \frac{-\beta R_C}{\frac{\beta}{g_m} + R_E(1 + \beta)} = \\ &= -\frac{\beta R_C}{\frac{\beta V_T}{I_{C,Q}} + R_E(1 + \beta)} = -\frac{\beta R_C I_{C,Q}}{\beta V_T + R_E I_{C,Q}(1 + \beta)} \simeq \\ &\simeq -\frac{I_{C,Q} R_C}{V_T + R_E I_{C,Q}} \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è giustificato, per  $\beta$  molto elevato, ossia tendente a infinito.

Dal momento che  $R_E$  è dell'ordine dei k $\Omega$ ,  $I_{C,Q}$  dei mA,  $V_T$  dei mV, allora  $R_E I_{C,Q} \gg V_T$ . Per questo motivo, potremo dire che:

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} \simeq -\frac{R_C}{R_E}$$

Cosa possiamo capire da tutto ciò? Lo stadio a emettitore comune ha un guadagno in corrente circa pari a 1 (non può essere superiore a 1, di solito si tratta in un intorno negativo di 1 quindi), ma un enorme guadagno in tensione.

Ciò che abbiamo appena mostrato è la teoria dello stadio ad emettitore comune, un'idealizzazione, diversa da come si realizza nella pratica. La diversità sta nell'ipotesi preliminare, ossia quella secondo cui ci trovavamo subito in piccolo segnale, senza considerare la polarizzazione.

### 3.3.1 Disaccoppiamento

I circuiti di polarizzazione sono molto delicati, dal momento che l'introduzione di un segnale per come l'abbiamo fatta noi crea nuove maglie, e dunque nuove ripartizioni della tensione di polarizzazione, facendo discostare dunque il valore del punto di lavoro rispetto a quello che potevamo aver analizzato nel solo circuito di polarizzazione. Ciò che bisogna introdurre dunque, è una sorta di muraglia trasparente al segnale, ma che non permette il passaggio di tensioni continue. Il componente in grado di realizzare questa muraglia è un semplice condensatore in serie: il segnale è solitamente variabile, formato da un certo numero di armoniche; l'introduzione di un condensatore in serie a regime taglia tutte le continue, poichè si carica e comporta come un circuito aperto nei confronti delle continue, ma lascia passare (abbastanza bene) le tensioni/correnti alternate, ossia i segnali. L'inserimento di questi condensatori in serie, detti condensatori di disaccoppiamento (bypass capacitors) fornirà un filtro passa-alto a frequenze relativamente basse, in modo da tagliare componenti più vicine alla continua per quanto sia possibile, frenando sicuramente la continua, ma anche un certo numero di armoniche del segnale.

Un condensatore di disaccoppiamento è dunque in grado di separare un ramo del circuito da un altro, impedendo alla continua di cadere e ripartirsi, ma permettendo al segnale di passare ed uscire dal ramo, per ripartirsi. Unico vincolo per ora (che poi in seguito affronteremo) sarà quello dell'alta frequenza: la radiofrequenza infatti potrebbe provocare effetti secondari estremamente negativi, che in parte affronteremo in questa trattazione, ma comunque in un secondo momento.

Piccola nota: se un metodo per far vedere alla continua un circuito aperto è introdurvi un condensatore in serie, per cortocircuitare un ramo alla continua sarà sufficiente introdurre un condensatore in parallelo (o un induttore): in questo modo si riesce a forzare l'andamento della continua in un ramo, che sarà visto come un corto circuito (o una resistenza).

Un circuito molto intelligente per la realizzazione pratica (con componenti

discreti ovviamente) dello stadio di amplificazione ad emettitore comune, potrebbe essere il seguente:

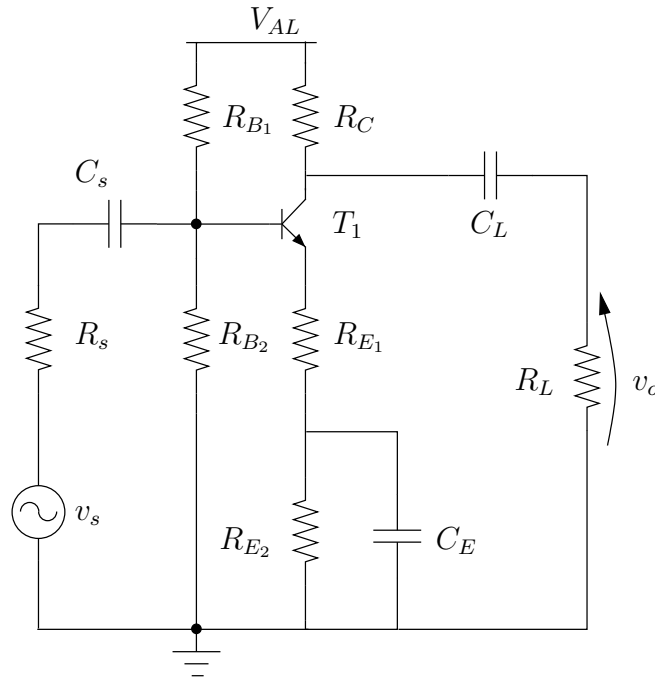


Figura 3.10: Circuito molto intelligente per lo stadio di amplificazione ad emettitore comune.

Le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  sono le resistenze di base del circuito di Self-Biasing: mediante Thevenin si potrà fare il solito trucco,  $R_B = R_1 \oplus R_2$ , ottenendo un resistore equivalente in parallelo a  $R_S$  e  $C_S$ .  $R_S$  è la resistenza interna (e quindi serie) del generatore di segnale,  $v_s$ .  $C_S$  è il condensatore che disaccoppia l'ingresso del segnale dal resto del circuito di polarizzazione.  $R_E$  è stata divisa in  $R_{E1}$  e  $R_{E2}$ , poichè in questo modo una parte del segnale sarà sempre costretta a passare per una resistenza nell'emettitore, e ad alte frequenze il condensatore tenderà ad avere un'impedenza sempre minore, diventando un corto circuito per il segnale, e quindi eliminando una componente di resistenza all'emettitore del transistor. Modificando i parametri  $C_E$  e  $R_{E2}$  sarà possibile regolare il guadagno, meglio nella fattispecie:  $R_{E1}$  sarà coinvolta sia in ambito di polarizzazione che in ambito di amplificazione di segnale, mentre  $R_{E2}$  sarà soprattutto coinvolta in ambito di polarizzazione. Modificando questi parametri si può dunque ottenere (come vedremo meglio in seguito parlando di reazione) un guadagno regolabile in base ai nostri fini.

Un condensatore, rispetto al segnale, a seconda della frequenza di variazione del segnale, può assumere un'impedenza diversa. Se la frequenza è

molto elevata, come accennato, il condensatore si 'chiuderà' rispetto al segnale, nel senso che la sua impedenza diventerà così bassa da risultar essere trascurabile rispetto alle altre impedenze presenti nel circuito. Regolando dunque in maniera intelligente questo condensatore sarà possibile ottenere un guadagno variabile con la frequenza, a seconda delle nostre necessità.  $R_C$  è la solita resistenza di collettore, in parallelo alla quale è situato il carico  $R_L$ , anch'esso disaccoppiato dal resto del circuito (per ovvi motivi) mediante il condensatore  $C_L$ .

Possiamo calcolare in questo ambito la tensione di uscita  $v_o$ , come la tensione che cade sul carico  $R_L$ , in ambito ovviamente di amplificazione di segnale, considerando tutti i condensatori chiusi (supponiamo dunque di trovarci ad una frequenza sufficientemente elevata da ridurre l'impedenza imposta dai generatori). Il metodo di calcolo è simile al precedente, anche se una topologia del genere le prime volte potrebbe spaventarci: partendo dal generatore di segnale  $v_s$ , si sceglie se lavorare con tensioni o correnti (di solito qua si useranno correnti, ma non è detto sia l'unica via ovviamente), e quindi:

$$v_o = v_s \cdot \frac{1}{R_S \oplus R_B + R_{E1}(1 + \beta)} \cdot (-\beta) \cdot \frac{R_C}{R_C + R_L} \cdot R_L$$

Per quanto riguarda le impedenze di ingresso, possiamo calcolarle 'a occhio', avendo ovviamente presenti le espressioni delle impedenze di ingresso:

$$Z_{in} = R_B \oplus Z_{B,in} = \frac{R_B \cdot (r_\pi + R_{E1}(1 + \beta))}{R_B + r_\pi + R_{E1}(1 + \beta)}$$

$$Z_{out} = R_C \oplus \infty = R_C$$

Ciò che possiamo intuire, osservando i valori di queste impedenze, è che saranno tendenzialmente medio-alte in ingresso, ed abbastanza alte in uscita (regolabili comunque mediante i parametri sopra elencati).

### 3.4 Stadio a Collettore Comune (Emitter Follower)

Lo stadio a collettore comune (detto anche emitter follower per i motivi che diremo alla fine della trattazione) può avere una forma simile a questa:

L'alimentazione si effettua con il solito circuito di Self-Biasing, il segnale verrà introdotto in base, e l'uscita sarà presa sull'emettitore: il carico questa volta sarà dunque collegato all'emettitore.

Calcoliamo subito le impedenze di ingresso e uscita di questo stadio:

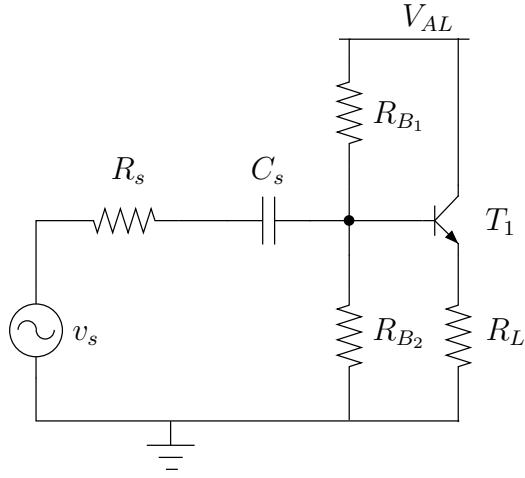


Figura 3.11: Stadio a collettore comune (*emitter follower*).

$$Z_{in} = R_B \oplus Z_{B,in} = R_B \oplus (r_\pi + (\beta + 1)R_L)$$

$$Z_{out} = Z_{E,in} = \frac{Z_B + r_\pi}{\beta + 1} = \frac{R_B \oplus R_S + r_\pi}{\beta + 1} = \frac{R_B \oplus R_S}{\beta + 1} + \frac{1}{g_m}$$

Il fatto di avere  $\beta$  libero, potrà fornirci una notevole incertezza sull'impedenza di uscita. Calcoliamo dunque la tensione sul carico,  $v_o$ :

$$v_o = v_s \cdot \frac{1}{R_S \oplus R_B + r_\pi + R_L(1 + \beta)} \cdot \frac{R_B}{R_S + R_B} \cdot (\beta + 1) \cdot R_L$$

Facciamo una piccola osservazione:

$$\frac{1}{R_S \oplus R_B + r_\pi + R_L(1 + \beta)} < 1$$

$$\frac{R_B}{R_S + R_B} < 1$$

Possiamo aspettarci che  $A_v$  sia dunque minore di 1, ossia che vi sia un'attenuazione di tensione (ovviamente se si avesse  $A_v \simeq 1$  avremmo tensione in ingresso ed in uscita circa invariate).

Proviamo a cercare un limite asintotico: se  $R_S \ll R_B$ :

$$\frac{R_B}{R_S + R_B} \simeq 1$$

$$\frac{(1 + \beta)R_L}{r_\pi + R_L(1 + \beta)} < 1$$

Avremmo comunque un guadagno minore di 1 in tensione. Tentiamo un ulteriore tipo di manipolazione di questa seconda espressione:

$$\frac{(1 + \beta)R_L}{r_\pi + R_L(1 + \beta)} = \frac{(1 + \beta)R_L}{\frac{V_T}{I_{C,Q}} + R_L(1 + \beta)} = \frac{(1 + \beta)R_L + I_{C,Q}}{V_T + R_L I_{C,Q}(1 + \beta)} < 1$$

Questo circuito è sostanzialmente un attenuatore di tensione; possiamo progettare in maniera idonea questo circuito, come visto dalle ultime manipolazioni, considerandola di poco inferiore a quella in ingresso. A cosa serve un circuito del genere dunque?

Facendo gli stessi conti effettuati per la tensione, sulla corrente, vedremo che vi è un guadagno enorme di corrente in uscita dallo stadio, ossia la corrente in ingresso viene aumentata notevolmente, senza intaccare troppo la tensione in ingresso. Supponiamo di avere infatti un circuito di questo tipo:

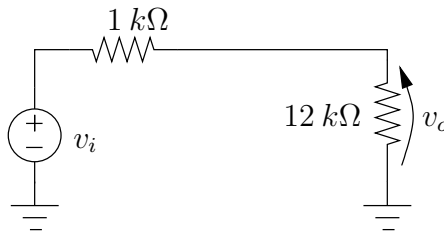


Figura 3.12: Circuito da confrontare con l'amplificatore.

Abbassando la resistenza aumentiamo la corrente nel circuito, ma riduciamo moltissimo la tensione che cade ai capi del resistore di carico. Supponendo di avere già dunque la tensione regolata al valore corretto (per esempio da uno stadio a emettitore comune), volendo ottenere anche un'amplificazione in corrente, il collettore comune fa al caso nostro. Possiamo capire da dove nasca il nome 'emitter follower': se lo stadio a emettitore comune si occupa di amplificare esclusivamente la tensione, una volta stabilito un buon punto di tensione dal primo stadio, si inserisce in cascata un secondo stadio in grado di amplificare la corrente, ottenendo dunque amplificazione di entrambe le grandezze.



### 3.5 Stadio a Base Comune

Il terzo stadio di amplificazione fondamentale, ossia lo stadio a base comune, avrà una topologia di questo genere:

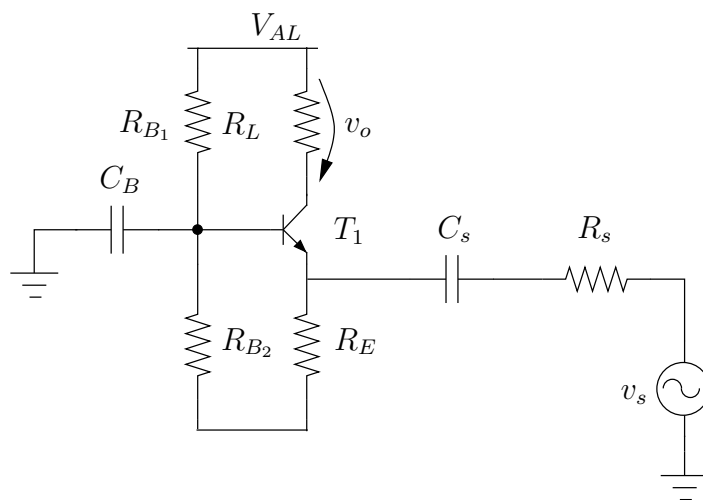


Figura 3.13: Stadio a base comune.

L'alimentazione ideale sarà come al solito ottenuta mediante circuito di autopolarizzazione; in questo ambito il segnale in ingresso sarà da inserire sull'emettitore, disaccoppiandolo mediante condensatore in serie. L'uscita sarà presa dal collettore, su di una resistenza di carico collegata dunque al nodo collettore.

Passiamo al calcolo dei parametri anche di questo tipo di circuito di amplificazione:

$$Z_{in} = R_E \oplus Z_{E,in} = R_E \oplus \frac{r_\pi + Z_B}{\beta + 1}$$

$$Z_{out} = R_C \oplus \infty = R_C$$

Vediamo ora il guadagno in tensione:

$$v_o = v_s \cdot \frac{1}{R_S + \frac{r_\pi + Z_B}{\beta + 1}} \cdot \frac{\beta}{\beta + 1} \cdot R_C$$

Vediamo dunque che:

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} \simeq \frac{R_C}{R_S + \frac{1}{g_m}}$$

Volendo, questo circuito è in grado di guadagnare in tensione (non assolutamente quanto uno stadio ad emettitore comune), ma non in corrente. L'utilità di questo stadio è differente da quella dei precedenti: esso è molto utilizzato, più che in elettronica, in ambito di elettromagnetismo, come nello studio di radiofrequenze. Questo perchè, come verificheremo più avanti parlando di alte frequenze, è in grado di spostare a frequenze più elevate l'ultimo polo (parlarne più in dettaglio ora è inutile).

In ambito di elettronica, fondamentale è l'amplificatore a emettitore comune, per aumentare la tensione, e molto utilizzato è l'emitter follower (collettore comune), per amplificare la corrente dopo aver amplificato la tensione.

Riassumendo, esponiamo i dati ricavati dalle analisi dei tre stadi fondamentali in forma ridotta:

- Emettitore Comune: impedenza medio/alta in ingresso, alta in uscita, guadagno alto in tensione, corrente stabilizzata;
- Collettore Comune: impedenza alta in ingresso, tendenzialmente bassa in uscita, guadagno alto in corrente, tensione stabilizzata;
- Base Comune: alta impedenza in ingresso, bassa impedenza in uscita, utilizzato di solito in ambito di radiofrequenze.

### 3.6 Introduzione all'amplificazione

Esistono, in sostanza, quattro tipi fondamentali di amplificatori, classificabili in base alle grandezze di ingresso ed uscita: dal momento che di solito ci preoccupiamo di amplificare o tensione o corrente, abbiamo quattro possibili tipi di amplificatori:

- Ingresso tensione, uscita tensione;
- Ingresso corrente, uscita tensione;
- Ingresso tensione, uscita corrente;
- Ingresso corrente, uscita corrente.

Analizziamo le caratteristiche fondamentali di questi quattro tipi di amplificatore, per renderci conto almeno in linea di massima di come si debba lavorare al fine di progettare un amplificatore.

Unica nota prima di incominciare l'analisi della prima di queste topologie: il progettista ha possibilità di lavorare esclusivamente su due parametri:  $R_{in}$

e  $R_{out}$ : la resistenza interna del generatore di segnale  $v_s$ ,  $R_s$ , come anche la resistenza di carico  $R_L$ , sono parametri talvolta noti a priori, ma sicuramente non modificabili dal progettista. Si sappia dunque che gli unici gradi di libertà su cui si può lavorare sono questi.

### 3.6.1 Ingresso tensione, uscita tensione

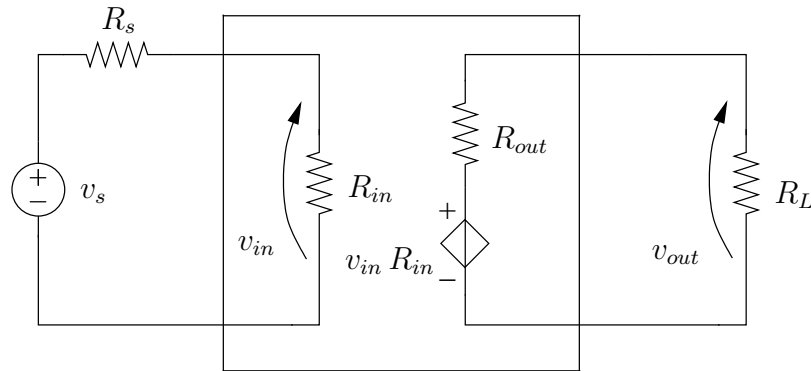


Figura 3.14: Amplificatore con ingresso ed uscita in tensione.

Il fatto che l'amplificatore debba amplificare per l'appunto tensione, portando in uscita un'ulteriore tensione, significherà che la tensione pilota  $v_{in}$ , ossia la tensione che cade sul resistore  $R_{in}$ , dovrà essere molto elevata. Perché vi sia una caduta di tensione molto elevata, servirà una resistenza molto elevata, dunque avremo bisogno di un amplificatore con impedenza di ingresso molto elevata, in modo che il partitore sia pesantemente influenzato verso  $R_{in}$ , e così si abbia una buona percentuale della tensione  $v_s$  cadente in  $R_{in}$ :

$$v_{in} = \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s}$$

Se  $R_{in} \gg R_s$ , allora  $v_{in} \simeq v_s$ .

Al contrario, la resistenza di uscita deve essere ridotta, per ottenere un'uscita in corrente, per lo stesso motivo: il partitore tra resistenza di carico  $R_L$  e resistenza di uscita dell'amplificatore  $R_{out}$  deve favorire l'uscita, e dunque:

$$v_o = \frac{R_L}{R_L + R_{out}}$$

Se  $R_{out} \ll R_L$ , avremo una caduta di tensione molto superiore sul generatore di carico, quindi  $v_{out} \simeq v_{in} R_{in}$ , e avremo realizzato un buon amplificatore tensione/tensione.

### 3.6.2 Ingresso corrente, uscita tensione

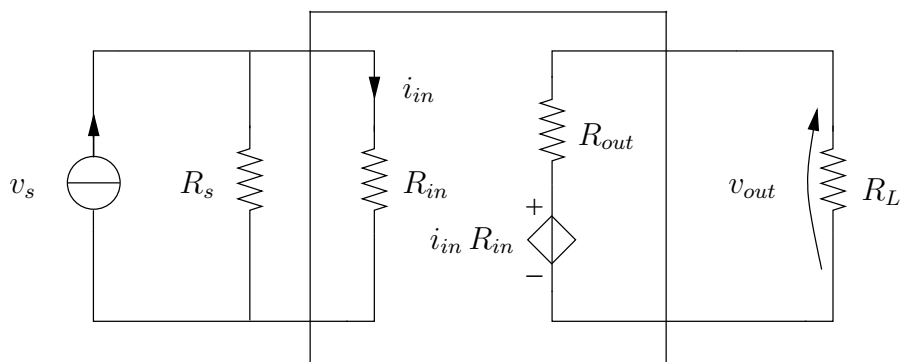


Figura 3.15: Stadio amplificatore con ingresso in corrente ed uscita in tensione.

Conoscendo l'elettrotecnica, fatto il primo esempio fatti tutti: se in ingresso abbiamo un generatore di corrente, costituito dunque da un resistore interno in parallelo al generatore considerato ideale, dovremo fare in modo da avere una  $R_{in}$  molto ridotta, in modo da avere un partitore di corrente che favorisca l'ingresso di corrente su di  $R_{in}$ , e dunque:

$$i_{in} = i_s \frac{R_s}{R_s + R_{in}}$$

Se  $R_s \gg R_{in}$ ,  $i_{in} \simeq i_s$ .

Per quanto riguarda l'uscita, il discorso sarà del tutto identico a prima: la resistenza di uscita dell'amplificatore dovrà essere decisamente inferiore di quella del carico, in modo da permettere una maggior caduta di tensione sul carico stesso,  $R_L$ .

Piccola nota culturale: l'amplificatore corrente-tensione spesso viene anche chiamato transresistenza: il suo guadagno, infatti, non è adimensionale, poichè è il rapporto tra una tensione  $v_{out}$  ed un ingresso  $i_{in}$ , e quindi dimensionalmente parlando acquisisce la stessa unità di misura di una resistenza, e si misura infatti in  $\Omega$ .

### 3.6.3 Ingresso tensione, uscita corrente

In questo ambito, avremo bisogno come nel primo caso di una resistenza di ingresso  $R_{in}$  molto elevata, in modo da avere una grossa caduta di tensione sul resistore di ingresso, e quindi un pilota molto elevato per il pilotato modellante il comportamento dell'amplificatore. Dall'altra parte del circuito,

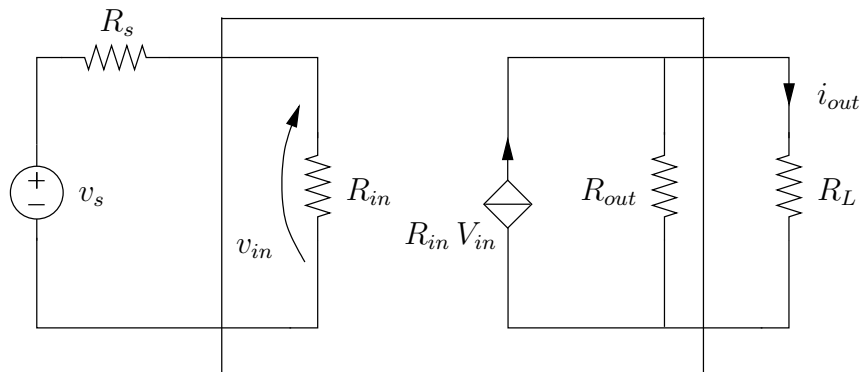


Figura 3.16: Stadio di amplificazione con ingresso in tensione ed uscita in corrente.

avremo un'uscita in corrente, generata da un generatore pilotato di corrente, e quindi la cui resistenza di uscita  $R_{out}$  sarà in parallelo ad esso. Il partitore di corrente deve essere realizzato in modo da favorire il passaggio di corrente ai capi del resistore  $R_L$ , e quindi:

$$i_{out} = R_{in} v_{in} \cdot \frac{R_{out}}{R_L + R_{out}}$$

Se avremo  $R_{out} \gg R_L$ , la corrente tenderà ad andare tutta nel resistore di carico, ottenendo così l'amplificatore desiderato.

Dualmente all'amplificatore precedente, un dispositivo di questo tipo viene chiamato transconduttanza, poichè il guadagno si esprime in termini di rapporto di una corrente e di una tensione, ottenendo dunque dimensionalmente una conduttanza, che si potrà misurare in siemens  $S$ .

### 3.6.4 Ingresso corrente, uscita corrente

A questo punto immaginare come funzioni una topologia di questo tipo non dovrebbe essere un problema: in ingresso abbiamo un generatore di corrente, con in parallelo la sua impedenza interna alla nostra resistenza  $R_{in}$ , ed in uscita il generatore pilotato di corrente con la resistenza  $R_{out}$  in parallelo a sè ed alla resistenza di carico  $R_L$ . Ai fini di realizzare un buon amplificatore corrente-corrente, dunque, dovremo avere una resistenza di ingresso  $R_{in}$  molto bassa, in modo da favorire il partitore di corrente di ingresso verso l'amplificatore, e dualmente la resistenza di uscita  $R_{out}$  molto elevata, in modo da favorire il passaggio di corrente verso il carico resistivo  $R_L$ .

### **Osservazione importante**

Quelli che abbiamo appena terminato di descrivere, sono i quattro fondamentali tipi di amplificatori elettronici realizzabili mediante circuiti di transistori; ciò che è importante capire, anche se non si hanno ancora idee precise su come lavorare, è che singoli stadi di amplificazione non sono in grado di realizzare un sistema di amplificazione appartenente ad una delle quattro topologie appena presentate, dal momento che nessuno è in grado di soddisfare pienamente queste caratteristiche, e non avrebbe neanche senso farlo, a causa di motivi che meglio analizzeremo parlando di reazione. Si sappia che certo tutto ciò che finora è stato fatto è fondamentale, ma al fine di comprendere il funzionamento reale di dispositivi quali amplificatori di segnali, funzionanti, ci mancano ancora diverse nozioni.

## Capitolo 4

# Transistore MOS a Effetto di Campo (MOSFET)

Come si sa dallo studio dei Dispositivi Elettronici, MOS sta per Metal-Oxide-Semiconductor: si tratta di un tipo di tecnologia basata sull'unione di un substrato di silicio (opportunamente drogato) ad uno strato di ossido (solitamente biossido di silicio), e questo a sua volta ad una lamina metallica (oppure gate in silicio fortemente drogati, nelle tecnologie più recenti).

Esistono sostanzialmente due classificazioni di transistori MOSFET:

- n-channel o p-channel: nel primo caso i MOSFET avranno un canale di conduzione di elettroni, nel secondo caso di lacune; ciò si ottiene mediante artifici tecnologici di diversa natura, che non tratteremo qua;
- A canale indotto o a canale preformato: i MOSFET a canale indotto (detti anche ad arricchimento) non hanno un canale: esso si forma solo mediante l'applicazione di una tensione  $V_{GS}$  sufficientemente elevata (come si è visto nel corso di Dispositivi Elettronici, e come rivedremo brevemente ora); nel caso di MOSFET a canale preformato (detti anche a svuotamento), il canale esiste a partire dalla nascita del transistore, e quindi non necessita una  $V_{GS}$  al fine di essere attivato. Questo secondo metodo viene spesso utilizzato per realizzare transistori come i JFET o i MESFET; non entriamo nel merito di dispositivi di questo genere, o di nozioni tecnologiche legate a questo tipo di distinzione, che comunque può essere utile da conoscere.

Il MOSFET (che spesso abbreviando chiameremo MOS), dispone di quattro terminali: gate (G) , bulk (o body, B), source (S), drain (D).

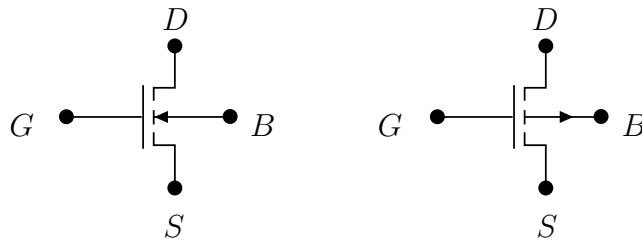


Figura 4.1: Simboli circuitali dei MOSFET a quattro terminali rispettivamente a canale n e p.

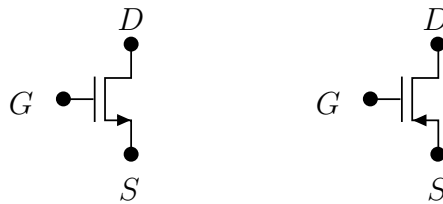


Figura 4.2: Simboli circuitali dei MOSFET a tre terminali rispettivamente a canale n e p.

Questa notazione, con la freccia entrante nel bulk (o uscente da esso), esprime il tipo di canale del MOS: se la freccia è entrante, avremo un dispositivo a canale n; se la freccia è uscente, un dispositivo a canale p.

Nell'ambito in cui noi studieremo transistori a effetto di campo di questo tipo, utilizzeremo una convenzione semplificata: considereremo i terminali bulk e source cortocircuitati, e considereremo la freccia uscente dal source per indicare un MOS a canale n, entrante per indicare un MOS a canale p.

## 4.1 Caratteristica statica del MOSFET

Analizziamo la caratteristica statica del MOSFET, come facemmo in precedenza per quanto riguarda il transistor bipolare BJT, in modo da presentare le equazioni di funzionamento del dispositivo:

Notiamo che si possono distinguere sostanzialmente cinque regioni di funzionamento del dispositivo:

1. Zona di interdizione: zona nella quale il MOSFET si trova in condizione di interdizione, e dunque è OFF;
2. Zona lineare/resistiva: è possibile approssimare ad una retta la zona di lavoro del MOSFET, e dunque si può considerare in prima approssi-



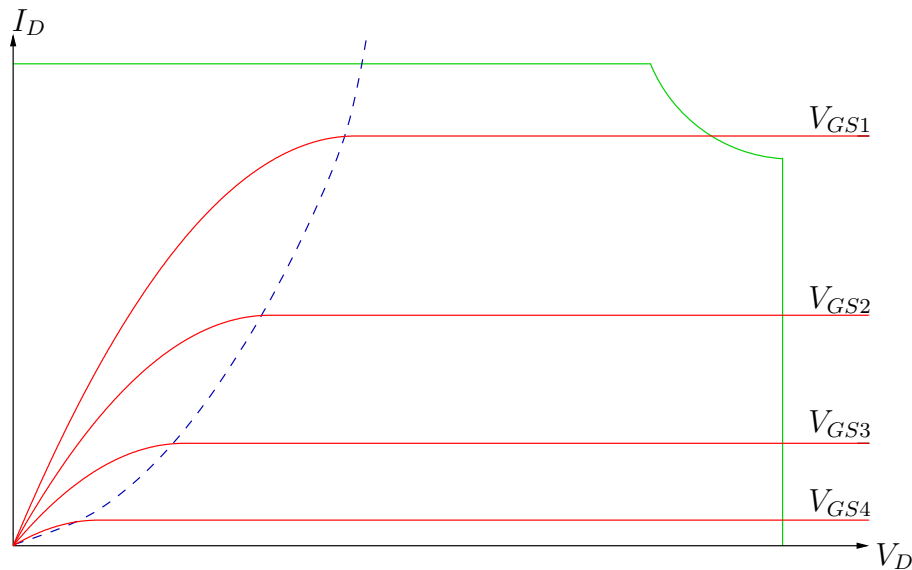


Figura 4.3: Caratteristica statica del MOSFET con limiti della regione di saturazione (*pinch-off*) in blu e della SOA in verde.

mazione resistivo il comportamento del transistor: dal momento che  $V = RI$ , possiamo dire che se la crescita della tensione al variare della corrente è costante, allora avremo un andamento lineare, e paragonabile a quello di una resistenza,

3. Zona quadratica/triodo: in questa zona di funzionamento, la caratteristica statica è parabolica, e ricorda nella fattispecie l'andamento del triodo, una particolare valvola termoionica ora non più utilizzata;
4. Zona di saturazione: la zona dove si ha maggior guadagno, la zona utile del transistor MOS: nella stragrande maggior parte dei casi, analizzeremo il comportamento di un MOSFET proprio in questo ambito;
5. SOA (Safe Operating Area): al di là di questa zona, il MOSFET va in rottura, e non sarà più utilizzabile (zona del tutto analoga a quella del transistor bipolare).

Discutiamo a questo punto le equazioni, ricavate nel corso di Dispositivi Elettronici, delle zone più importanti:

- In zona di interdizione:

$$V_{GS} < V_{Tn} \implies I_D = 0$$

- In zona quadratica, abbiamo che la tensione  $V_{GS}$  è maggiore della tensione di soglia  $V_{Tn}$ , ma  $V_{DS} < V_{GS} - V_{Tn}$ , dunque l'equazione rappresentante l'andamento della corrente  $I_D$ , ossia della corrente di drain, sarà:

$$I_D = K_n \left[ (V_{GS} - V_{Tn})V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

Dove  $K_n$  è un termine così definito:

$$K_n = \mu_n C_{OX} \frac{W}{L}; \quad C_{OX} = \frac{\varepsilon_{OX}}{T_{OX}}$$

La seconda zona di lavoro semplicemente ignora il termine quadratico dell'appena presentata equazione, poichè ancora ininfluente;

- In zona di saturazione, avremo:  $V_{GS} > V_{Tn}$ , ma anche  $V_{DS} > V_{GS} - V_{Tn}$ ; in questo ambito, il guadagno sarà circa costante, e pari al guadagno massimo ottenibile in zona quadratica, quindi:

$$I_D = \frac{K_n}{2} (V_{GS} - V_{Tn})^2$$

Si noti: spesso per alleggerire la notazione, si definisce la tensione di overdrive,  $V_{OV}$ , come:

$$V_{OV} = V_{GS} - V_{Tn}$$

### 4.1.1 Channel Length Modulation

Per quanto riguarda i MOSFET, esiste un effetto del tutto simile all'effetto Early, ossia la Channel Length Modulation: in zona di saturazione, è possibile trovare un'espressione correttiva, in grado di tener conto del fatto che aumentando la tensione il canale tende a strozzarsi, e dunque si ha un comportamento resistivo aggiuntivo, quantificabile mediante il termine di correzione moltiplicativo sulle espressioni:

$$(1 + \lambda V_{DS})$$

Oppure:

$$\left( 1 + \frac{V_{DS}}{V_A} \right)$$

Dove questa  $V_A$  rappresenta l'equivalente, per quanto riguarda i MOS, della 'tensione Early': rappresenta dunque semplicemente il punto di incontro sull'asse delle tensioni di tutte le rette rappresentanti l'effetto della Channel Length Modulation.

A differenza del caso dei transistori bipolari, purtroppo spesso questo tipo di effetto si farà sentire sul nostro modello, e quindi dovremo tenerne conto.

Le equazioni complete dunque, consideranti anche l'effetto della Channel Length Modulation, saranno:

$$I_{D,quad} = K_n \left[ (V_{GS} - V_{Tn})V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right] \cdot \left( 1 + \frac{V_{DS}}{V_A} \right)$$

$$I_{D,sat} = \frac{K_n}{2} (V_{GS} - V_{Tn})^2 \cdot \left( 1 + \frac{V_{DS}}{V_A} \right)$$

Anche nel caso di un transistor MOSFET, si può modellizzare il fenomeno duale all'effetto Early, mediante una resistenza,  $r_o$ :

$$r_o = \frac{|V_A| + V_{DS}}{I_D}$$

Questa resistenza, in parallelo al generatore modellizzante la corrente pilotata tra source e drain, è in grado di modellizzare l'effetto della channel length modulation (esattamente come la resistenza Early tra emettitore e collettore).

## 4.2 Studio dei circuiti con MOSFET

Sostanzialmente, rispetto allo studio del transistor bipolare, abbiamo cambiato dispositivo, di conseguenza abbiamo cambiato le equazioni di funzionamento di quest'ultimo, tuttavia il nostro metodo di lavoro può anche non variare: tenendo conto dunque dei nuovi modelli appena introdotti, potremo riprendere lo stesso discorso precedentemente affrontato per quanto riguarda il BJT (che dunque non andremo a ri-affrontare da capo), e riassumerlo nei seguenti tre step:

1. Studiare la sola alimentazione del circuito, determinando il punto di lavoro, ossia la coppia di valori tensione/corrente ( $V_{DS,Q}; I_{D,Q}$ );
2. Determinare il modello di segnale, e stabilire dunque che il segnale è un piccolo segnale;

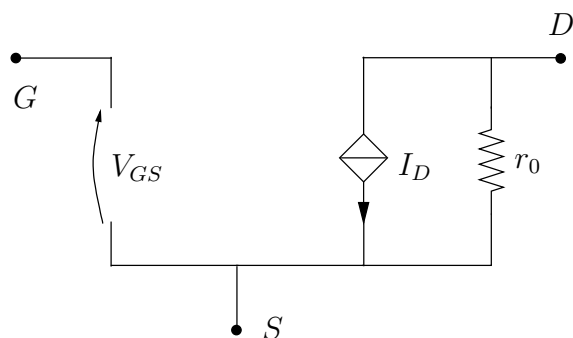


Figura 4.4: Modello a  $\pi$  del MOS.

3. Traslare nel punto di lavoro il nostro modello, e studiare esclusivamente il piccolo segnale, considerando terminata correttamente la polarizzazione.

Il modello del MOSFET per quanto riguarda la polarizzazione sarà dunque qualcosa di simile a quello in figura 4.4.

Il fatto che tra gate e resto del dispositivo vi sia del biossido di silicio (l'Oxide), fa sì che non vi sia passaggio di cariche; possiamo dunque dire vi sia una caduta di tensione tra gate e source,  $V_{GS}$ , ma non una corrente di gate: per quanto studieremo dunque in questa trattazione, una costante sarà sempre e comunque  $I_G = 0$ . Il fatto che non ci sia corrente di gate, è un enorme pregio dei MOSFET: avremo una notevole semplificazione dei conti, dovuta a ciò.

D'altro canto, vedendo le equazioni precedentemente presentate nei modelli, possiamo immaginare che, per quanto riguarda la polarizzazione, si ha un altro problema abbastanza grave:  $I_D$  è espressa mediante un'equazione non lineare (quadratica, quindi relativamente semplice da studiare, ma non banale quanto una di primo grado).  $I_D$  può essere determinata a partire da due equazioni, a seconda della zona di lavoro in cui ci troviamo (solitamente ci si troverà in zona di saturazione, poichè è quella che meglio sfrutta le proprietà del MOS; potrebbe capitare di trovarsi in zona quadratica, a causa per esempio di una cattiva alimentazione del dispositivo, e dunque è buona cosa riprendere entrambe le equazioni):

- In zona quadratica:

$$I_D = K_n \left( V_{OV} \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right)$$

- In zona di saturazione:

$$I_D = \frac{K_n}{2} V_{OV}^2$$

Consiglio spassionato che si può dare per affrontare questo tipo di problemi è il seguente: tentare di determinare il punto di lavoro, utilizzando il modello del MOS in ambito di zona di saturazione, dal momento che essa presenta un'espressione più semplice da gestire, e poichè comunque si tratta del caso più frequentemente studiato. A questo punto, si verifica la disequaglianza:

$$V_{OV} < V_{DS}$$

Nel caso essa non fosse verificata, si ricalcola il punto di lavoro mediante l'espressione modellizzante il funzionamento del MOS in regione quadratica, e quindi si rieffettua la verifica sulla tensione di overdrive.

Ricordiamo dunque che, sempre e comunque, le due soluzioni tali per cui:

$$\begin{cases} V_{GS} - V_{Tn} < 0 \\ V_{GS} - V_{Tp} > 0 \end{cases}$$

Vanno sempre scartate, in quanto considerano il canale non ancora aperto, e dunque di fatto il passaggio source-drain non esiste, e a meno che il MOSFET non sia a svuotamento non vi è assolutamente conduzione (di conseguenza questo tipo di casi non ci interessa).

## 4.3 Polarizzazione di un MOSFET

Presentiamo una serie di circuiti per la polarizzazione dei MOS (anche se di fatto ci ispireremo molto ai metodi di polarizzazione precedentemente presentati per quanto riguarda il BJT; introdurremo un esempio di come NON si deve polarizzare un MOSFET, per poi presentare alcuni circuiti un po' più seri.

### 4.3.1 Esempio 0

Il primo circuito che potremmo presentare è quello della figura 4.5.

Questo circuito impone una tensione costante al gate; in questo modo tuttavia, non disponendo di informazioni sulla tensione di soglia  $V_{Tn}$ , potremmo trovarci in una delle seguenti condizioni:

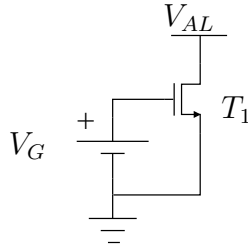


Figura 4.5: Pessimo circuito di polarizzazione per MOS.

- Avere il MOSFET in stato prossimo all'interdizione, o comunque troppo poco acceso;
- Avere il MOSFET in stato regolare: saturazione, con funzionamento corretto rispetto alle nostre necessità;
- Avere il MOSFET troppo acceso: o un punto di lavoro troppo elevato, o addirittura trovarci oltre la Safe Operating Area.

### 4.3.2 Esempio 1: circuito di Self-Biasing

Possiamo riprendere, anche per quanto riguarda il MOSFET, una nostra cara vecchia conoscenza: il circuito di autopolarizzazione.

Una volta ricavato l'equivalente Thevenin del circuito, trovando l'equazione alla maglia, per l'unica maglia non passante per il drain (dal momento che esso assume lo stesso ruolo che prima assumeva il collettore), vediamo che:

$$I_D R_S + V_{GS} = V_{GG} \implies V_{GS} = V_{GG} - I_D R_S$$

Dove  $V_{GG}$  si calcola semplicemente mediante l'equivalente Thevenin:

$$V_{GG} = V_{AL} \frac{R_{G2}}{R_{G1} + R_{G2}}$$

Non utilizziamo la resistenza equivalente Thevenin al gate, dal momento che esso di fatto si chiude su di un circuito aperto: la tensione del generatore equivalente Thevenin cadrà tutta sul gate, e dunque non avremo di fatto cadute su  $R_G$ .

$V_{GS}$ , ossia la tensione sul gate, è una funzione lineare (in realtà affine, dal momento che l'elemento nullo non va nell'elemento nullo: geometricamente, sarebbe una retta con termine di intercetta maggiore di 0), e quindi la corrente al drain risulterà essere molto stabilizzata. Questo circuito, come anche il precedente per quanto riguarda i BJT, è ottimo per circuiti discreti, ma

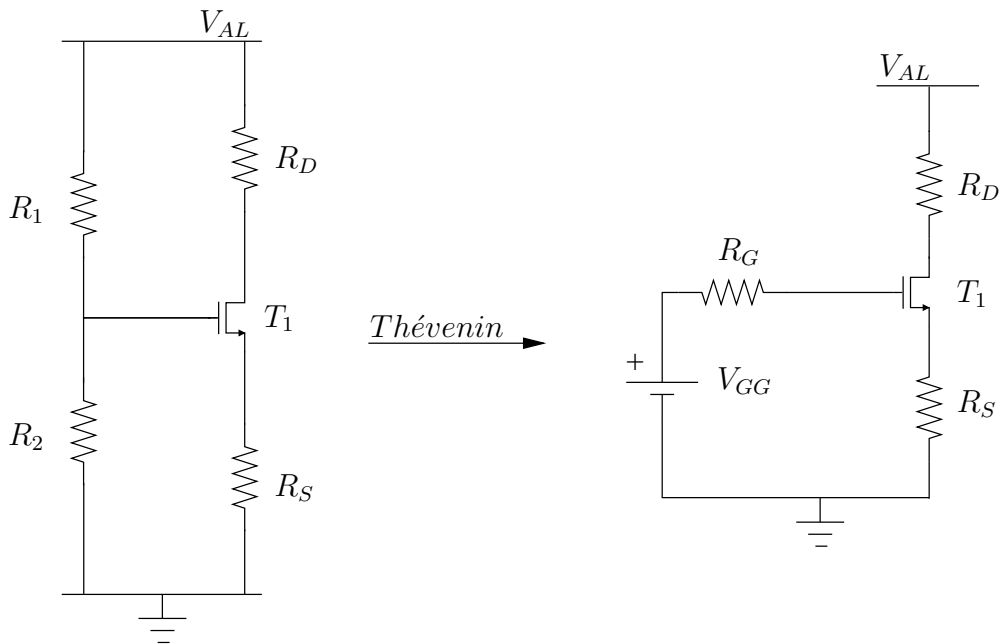


Figura 4.6: Circuito di autopolarizzazione applicato al MOS.

non integrati: integrare un grosso numero di resistori è molto dispendioso, in termini di porzioni di substrato occupate, e dunque non si usano topologie del genere.

### 4.3.3 Esempio 2

Altro circuito che comunque verrà ripreso in seguito è il seguente:

Questo circuito è abbastanza interessante, in quanto:

$$V_{DS} = V_{GS}$$

Ciò ci garantisce di trovarci in stato di saturazione, e dunque sarà molto utile per questo: ci fornirà garanzie sullo stato del transistor, e sul modello da utilizzare.

## 4.4 Modelli di Piccolo Segnale

Abbiamo trattato la polarizzazione del MOSFET; passiamo ora alla trattazione della linearizzazione delle equazioni di funzionamento, in un intorno del punto di lavoro, al fine di studiare un modello di piccolo segnale del MOSFET. L'elemento non lineare della nostra trattazione sarà la corrente

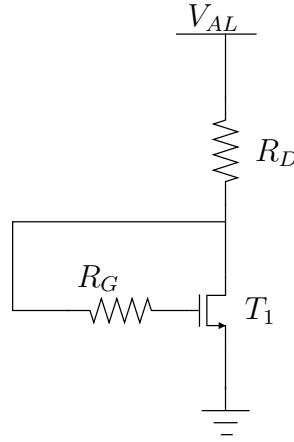


Figura 4.7: Un altro circuito di polarizzazione per MOS.

di drain,  $I_D$ ; ipotizzando di trovarci dunque in zona di saturazione, cosa che capiterà nel 99% dei casi, consideriamo il modello relativo alla zona di lavoro:

$$I_D = \frac{K_n}{2} (V_{GS} - V_{Tn})^2$$

Linearizziamo dunque rispetto alla tensione  $V_{GS}$  l'elemento non lineare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V_{GS}} \left[ \frac{K_n}{2} (V_{GS} - V_{Tn})^2 \right] &= \frac{K_n}{2} \cdot 2 \cdot (V_{GS} - V_{Tn}) \cdot 1 = \\ &= K_n (V_{GS} - V_{Tn}) = g_m \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato un'espressione operativa della conduttanza differenziale modellizzante il guadagno del generatore pilotato, in dipendenza della tensione  $V_{GS}$ ; si noti che non è l'unica possibilità: esistono altre esplicitazioni della conduttanza differenziale  $g_m$ , considerando come variabili altri parametri; consideriamo per esempio l'esplicitazione della tensione gate-source,  $V_{GS}$ :

$$V_{GS} - V_{Tn} = \sqrt{\frac{2I_D}{K_n}} \longrightarrow g_m = K_n (V_{GS} - V_{Tn}) = K_n \sqrt{\frac{2I_D}{K_n}} = \sqrt{2I_D K_n}$$

Questa formula ci evidenzia un fatto importante: se abbiamo  $I_D$  stabile, abbiamo  $g_m$  stabile, e dunque abbiamo la conferma del fatto che, anche per quanto riguarda il MOSFET, un buon circuito di polarizzazione è in grado di permetterci di ottenere una  $g_m$  stabile.

Consideriamo un'ultima esplicitazione, partendo da  $K_n$ ; vediamo che:



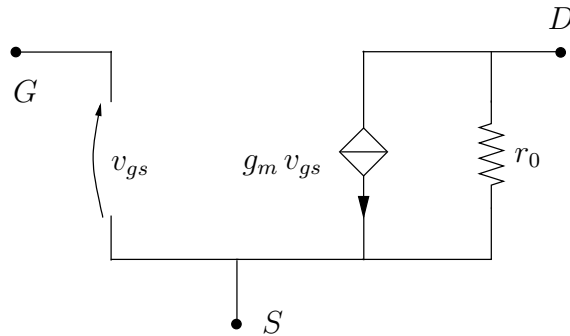


Figura 4.8: Circuito di piccolo segnale del MOS.

$$K_n = \frac{2I_D}{V_{OV}} \longrightarrow g_m = \frac{2I_D}{V_{OV}^2} V_{OV} = \frac{2I_D}{V_{OV}}$$

Questo tipo di esplicitazione può essere utile sotto un particolare punto di vista, diciamo prettamente tecnologico: il  $K_n$  è un parametro che non possiamo modificare a priori, tranne che sotto alcuni punti di vista tecnologici (al momento della realizzazione del transistor, mediante processi di litografia/etching); potrebbe essere utile dunque non avere dipendenza da  $K_n$ , dal momento che potremmo non conoscerlo a priori, o comunque non stabilirlo; variando la geometria sappiamo dalle definizioni precedenti che cambia, e sappiamo anche quantificarne la variazione, tuttavia potremmo dire che è più un problema da tecnologi che da analisti di circuiti elettronici.

Dato dunque un segnale (piccolo rispetto alla tensione di alimentazione) il modello del MOSFET sarà:

Dove:

$$r_o = \frac{|V_A| + V_{DS}}{I_D}$$

$$g_m = K_n V_{OV} = \sqrt{2I_D K_n} = \frac{2I_D}{V_{GS} - V_{Tn}}$$

## 4.5 Stadi di Amplificazione con Sistemi MOS

Utilizzando transistori basati sul sistema MOS, come i MOSFET che noi stiamo trattando, è possibile definire gli stadi di amplificazione fondamentali esattamente come abbiamo fatto con il BJT; anche qua, al fine di essere facilitati nei conti, decidiamo di ricavare le impedenze viste all'ingresso dei vari elettrodi:  $Z_{G,in}$ ,  $Z_{D,in}$ ,  $Z_{S,in}$ .

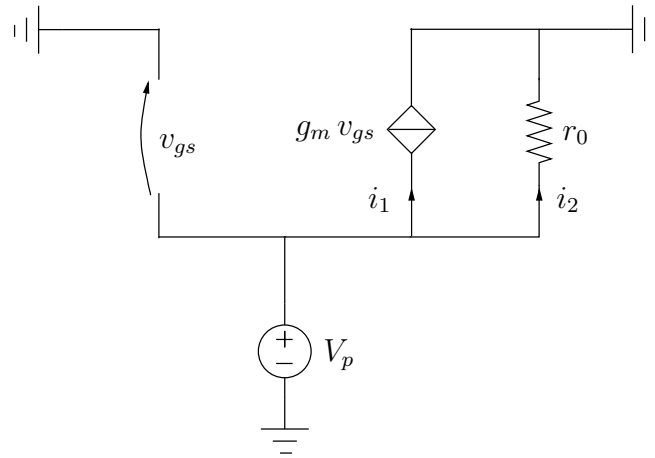


Figura 4.9: Calcolo della resistenza di source.

#### 4.5.1 Calcolo dell'impedenza di gate, $Z_{G,in}$

Per quanto riguarda l'impedenza di gate, tendenzialmente essa è infinita: dal momento che il biossido di silicio costringe il dispositivo a comportarsi come un circuito aperto, nel gate non scorrerà mai corrente, e potremo dire che la resistenza/impedenza in ingresso al gate sia assimilabile ad un circuito aperto, e dunque sia infinita. Possiamo dunque dire che:

$$Z_{G,in} = +\infty$$

Senza ricorrere ad artifici particolari, dunque abbiamo determinato con semplicità la prima delle impedenze di ingresso.

#### 4.5.2 Calcolo dell'impedenza di source, $Z_{S,in}$

Per quanto riguarda  $Z_{S,in}$ , potremo utilizzare, sul circuito seguente, la sovrapposizione degli effetti: applicando al source un generatore di tensione noto,  $v_p$ , potremo dunque semplicemente dire, considerando anche l'effetto della channel length modulation (modellato mediante  $r_o$ ), che:

$$v_{gs} = -v_p$$

$$i_1 = -g_m v_{gs} = g_m v_p$$

$$i_2 = v_p \cdot \frac{1}{r_o}$$

$$\begin{aligned}
Z_{S,in} &= \frac{v_p}{i_1 + i_2} = \frac{v_p}{v_p g_m + \frac{v_p}{r_o}} = \frac{1}{g_m + \frac{1}{r_o}} = \\
&= \frac{r_o}{1 + g_m r_o} = r_o \oplus \frac{1}{g_m}
\end{aligned}$$

Si noti tuttavia che di solito  $r_o \gg \frac{1}{g_m}$ , e dunque possiamo approssimare dicendo che:

$$Z_{S,in} \simeq \frac{1}{g_m}$$

Si noti che avevamo in precedenza già trovato, per quanto riguarda il BJT, un risultato praticamente analogo a questo.

### 4.5.3 Calcolo dell'impedenza di drain, $Z_{D,in}$

Consideriamo in modo completo l'ultima delle impedenze di ingresso, ossia quella di drain. Questo tipo di impedenza sarà abbastanza interessante da calcolare, dal momento che lo faremo considerando diverse condizioni: con o senza  $r_o$ , e, in caso di  $r_o$  presente, con o senza  $R_S$ ; considereremo una verifica della validità dei vari risultati, analizzando i comportamenti asintotici delle varie impedenze. Si noti che se nel BJT tutto ciò non era estremamente importante, ora lo sarà: nel caso del MOSFET la channel length modulation si fa pesantemente sentire, e dunque sarà utile considerare i casi più completi poichè essi saranno di fatto ricorrenti con una certa frequenza.

#### Caso base: effetto di channel length modulation trascurabile

Se abbiamo l'effetto di channel length modulation trascurabile, e dunque  $r_o \rightarrow \infty$ , possiamo dire che l'impedenza di ingresso del dispositivo sia infinita (mediante gli stessi passaggi studiabili nell'ambito del BJT); in questo modo:

$$R_{D,in} = \infty$$

#### Caso avanzato: effetto di channel length modulation, e $R_S$

Risolvere il caso di  $r_o$  presente, ma non avendo ulteriori resistenze al source, è banale: è sufficiente infatti dire che:

$$R_{D,in} = \infty \oplus r_o = r_o$$

Introduciamo dunque un caso molto più interessante di quelli visti finora, e senza dubbio più complicato da risolvere: consideriamo l'effetto della

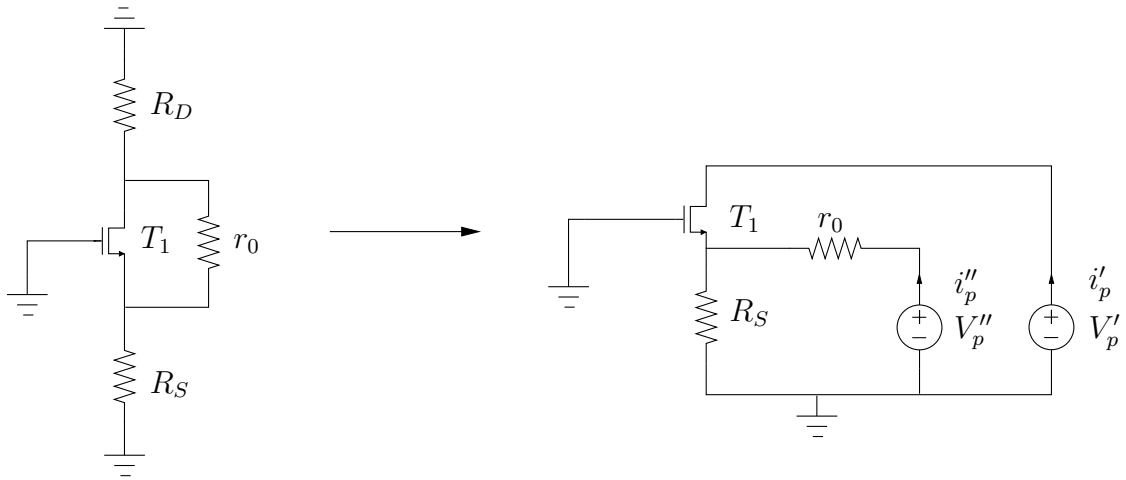


Figura 4.10: Calcolo della resistenza di drain.

channel length modulation, e quindi la resistenza  $r_o$  tra source e drain, e la presenza di un resistore  $R_S$  al source.

Utilizziamo la sovrapposizione degli effetti, introducendo al nodo di drain un generatore di tensione di prova,  $v_p$ ; con il solito metodo, splittiamo il circuito in due parti, considerando due generatori di prova  $v'_p$  e  $v''_p$ , e calcoliamo le correnti relative  $i_1$  e  $i_2$ ; considerando dunque  $i_1$  la corrente passante nel solo drain, e  $i_2$  la corrente passante nella resistenza  $r_o$ , vediamo che:

$$i_2 = \frac{v''_p}{r_o + \frac{1}{g_m} \oplus R_S} + 0 \cdot v'_p$$

$$i_1 = (-1) \cdot \frac{R_S}{R_S + \frac{1}{g_m}} \cdot i_2$$

L'impedenza di ingresso equivalente sarà dunque:

$$Z_{D,in} = \frac{v_p}{i_1 + i_2} = \frac{v_p}{\frac{v_p}{r_o + R_S \oplus \frac{1}{g_m}} \cdot \left(1 - \frac{R_S}{R_S + \frac{1}{g_m}}\right)}$$

Prima di andare avanti con i conti, alcune osservazioni sui comportamenti asintotici:

- Se  $r_o \rightarrow \infty$ , tutto va a  $\infty$ : ci aspettavamo un comportamento del genere, dal momento che ciò è assolutamente verificato (se non c'è resistenza dovuta alla channel length modulation allora l'impedenza di ingresso deve andare a  $\infty$ );

- Se  $R_S \rightarrow 0$ , i paralleli van a 0, dunque l'unica resistenza che si vede è  $r_o$ , esattamente come ci aspettavamo dai comportamenti precedentemente esposti.

Beh, per ora possiamo sperare che tutto funzioni, dunque!

Ciò che possiamo fare ora è sviluppare l'espressione, e ordinarla un po' meglio, magari per cercar di proporre alcune approssimazioni che potrebbero tornarci comode; sviluppiamo, e dividiamo per  $v_p$  numeratore e denominatore (semplificando), ottenendo:

$$\frac{1}{\frac{1}{r_o + R_S \oplus \frac{1}{g_m}} \cdot \frac{1}{R_S g_m + 1}} = \frac{R_S g_m + 1}{\frac{1}{r_o + R_S \oplus \frac{1}{g_m}}}$$

Ma notiamo che, se  $r_o \gg \frac{1}{g_m}$ , allora  $r_o \gg \frac{1}{g_m} \oplus R_S$ , data  $R_S$  sufficientemente piccola! Possiamo dunque dire che:

$$R_{D,in} \simeq R_S g_m r_o$$

#### 4.5.4 Stadio a Source Comune

Lo stadio a source comune rappresenta il corrispondente, per quanto riguarda i MOSFET, dello stadio a common emitter, di conseguenza è probabilmente il più importante da conoscere. Consideriamo dunque un circuito di questo genere:

In ambito di polarizzazione al solito semplicemente si dovranno considerare come circuiti aperti tutti i condensatori, e in caso di segnale chiusi (in prima approssimazione, in realtà come già detto ampiamente parlando di BJT non è detto che siano tutti chiusi, e ricordiamo che 'chiuso' è un modo più semplice e approssimativo per dire che l'impedenza che oppongono è trascurabile rispetto alle altre del circuito).

Considerando dunque in modo semplicistico tutti i condensatori come corti circuiti, ricordando che tra G ed il resto del circuito non vi è nulla (a causa dell'isolamento causato dall'ossido); il modello di segnale dunque sarà:

$$v_g = v_s \frac{R_G}{R_G + R_S} = v_{gs}$$

$$i = g_m v_{gs} = g_m v_s \frac{R_G}{R_G + R_S}$$

$$v_o = \frac{R_G}{R_G + R_S} g_m R_D v_s (-1)$$

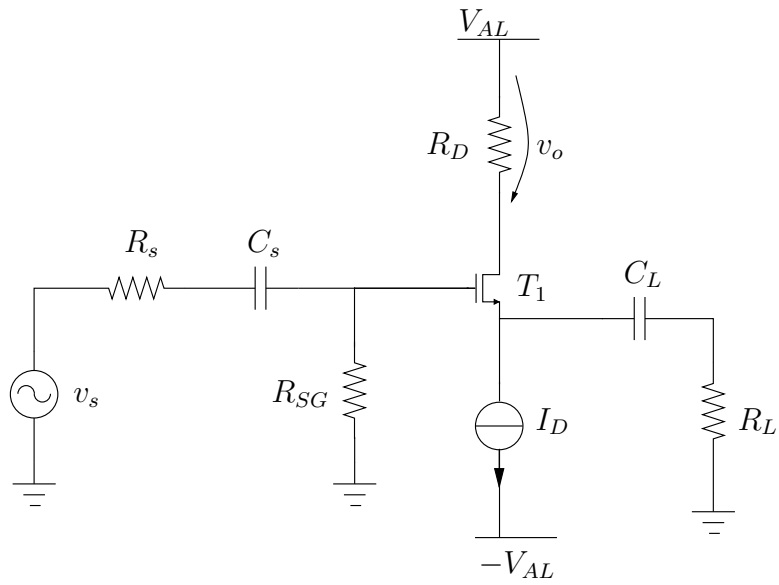


Figura 4.11: Stadio a source comune.

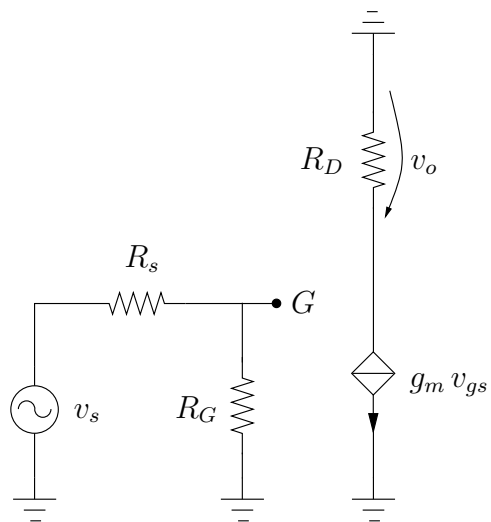


Figura 4.12: Stadio a source comune semplificato.

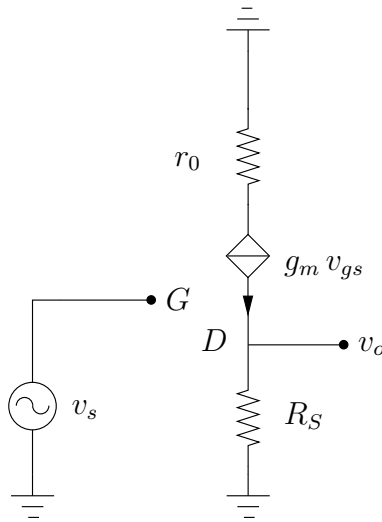


Figura 4.13: Stadio a source comune.

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_G}{R_G + R_S} = g_m R_D$$

Come nel common emitter, abbiamo un buon guadagno in corrente, ma invertente.

Complichiamo un po' la situazione: consideriamo il circuito dello stadio a source comune, considerando però attiva la channel length modulation, e quindi la relativa  $r_o$ , con resistenza di source  $R_S$ .

Dovremo fare un ragionamento di questo tipo:

$$v_{gs} = v_g - v_s = v_{in} - R_S g_m v_{gs} \implies v_{gs} = \frac{v_{in}}{1 + g_m R_S}$$

$$i_d = g_m v_{gs} = g_m \frac{v_{in}}{1 + g_m R_S}$$

$$\implies A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{R_D g_m}{1 + R_S g_m}$$

#### 4.5.5 Stadio a Drain Comune

Il circuito dello stadio a drain comune, in ambito direttamente di piccolo segnale (ignorando la polarizzazione, che tanto si può sempre effettuare mediante il solito circuito di self-biasing), sarà quello della figura seguente.

Consideriamo tanto per cambiare un modello a T, che potrebbe, sotto un certo punto di vista, ingannarci (al fine di saper affrontare qualsiasi tipo

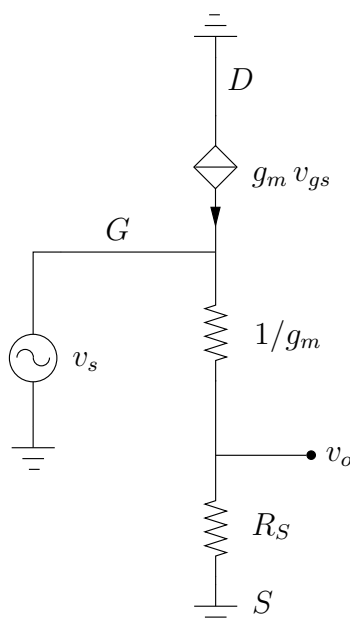


Figura 4.14: Stadio a drain comune.

di situazione): potrebbe sembrare infatti che tra gate e source/drain vi sia una corrente, e che essi siano collegati; il modello potrebbe fornire questa idea, che è assolutamente errata, dal momento che il biossido di silicio è un isolante ottimo, che non permette ad alcuna corrente di scorrere, e dunque il corto circuito si può pensare sì come filo a caduta di tensione nulla, ma si deve sapere che in esso non c'è neanche alcuna corrente.

L'uscita sarà un banalissimo partitore di tensione:

$$v_o = v_{in} \cdot \frac{R_S}{R_S + \frac{1}{g_m}}$$

Da qua il guadagno sarà:

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = \frac{R_S}{R_S + \frac{1}{g_m}} = \frac{R_S g_m}{1 + R_S g_m}$$

Notiamo che il guadagno in tensione è minore di 1: dal momento che questo stadio è il corrispondente dello stadio a collettore comune, potevamo quantomeno immaginarci questo tipo di risultato.

Cosa fare se ci fosse  $r_o$ ? Dobbiamo rifare i conti? La risposta è no! Dal momento che la resistenza modellizzante la channel length modulation va sostanzialmente in parallelo a tutto il circuito, ciò che noi dovremo semplicemente considerare è il fatto che:



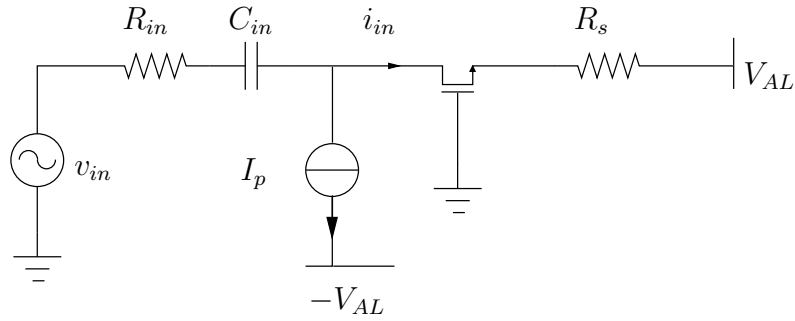


Figura 4.15: Stadio a Gate Comune.

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = \frac{r_o \oplus (g_m R_S)}{1 + r_o \oplus (g_m R_S)}$$

#### 4.5.6 Stadio a Gate Comune

Stadio corrispondente al common base, e dunque probabilmente il meno significativo nell'ambito dell'elettronica analogica a basse frequenze; vediamo che lo schema sarà semplicemente il seguente:

Calcolando la corrente di ingresso, dato il generatore di prova introdotto al source, vediamo che:

$$i_{in} = \frac{v_{in}}{R_{in} + R_{S,in}} = \frac{v_{in}}{R_{in} + \frac{1}{g_m}}$$

Da qua, vediamo che:

$$v_o = \frac{R_D}{R_{in} + \frac{1}{g_m}} v_{in}$$

Quindi, il guadagno in tensione,  $A_v$ , sarà:

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = \frac{R_D}{R_{in} + \frac{1}{g_m}}$$

## Capitolo 5

# Modello per l'Alta Frequenza dei Transistori

Finora, abbiamo considerato, dei transistori (BJT e MOSFET), due modelli, relativi ad un certo numero di situazioni in cui si possono trovare i dispositivi in questione:

- Modello per la polarizzazione (in cui si considerano semplicemente le capacità come circuiti aperti);
- Modello per il piccolo segnale: considerate nella polarizzazione le frequenze nulle, ossia i soli componenti di offset, nel modello di piccolo segnale si considerano solo le variazioni rispetto al punto di lavoro studiato nella polarizzazione.

Questo secondo modello dunque è sostanzialmente dedicato allo studio del transistoro in un contesto dinamico, di variazioni; il suo difetto, è che esso è valido solamente in caso di frequenze basse; nel caso di frequenze dell'ordine delle decine, centinaia di MHz, il modello non è più valido, dal momento che si presentano effetti capacitivi non prevedibili con i soli modelli di piccolo segnale finora introdotti.

Ciò che i modelli finora studiati non sono in grado di prevedere, quantificare, analizzare, sono i tempi di reazione dei transistori, tempi che dipendono da capacità parassite che devono caricarsi; finora abbiamo parlato di capacità solo in ambito di condensatori di disaccoppiamento, o in grado di modificare il comportamento in frequenza di un amplificatore (per esempio se situati in prossimità di un elemento di retroazione); come si può sapere dallo studio dei dispositivi elettronici, esistono altre capacità, che possono ritenersi trascurabili a basse frequenze:

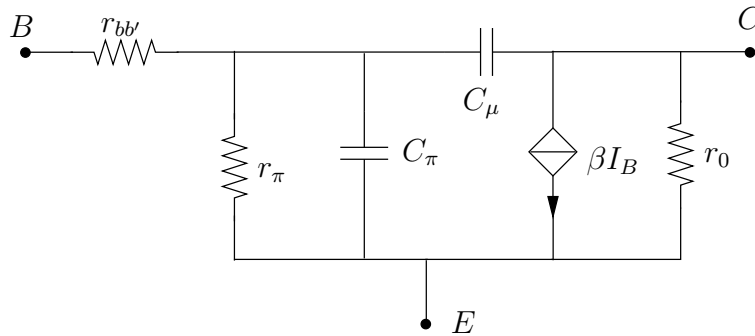


Figura 5.1: Modello di segnale completo.

- Capacità di diffusione della giunzione base-emettitore;
- Capacità di svuotamento della giunzione base-collettore.

La prima capacità, quella di diffusione, si andrà a mettere, nel nostro modello, in parallelo alla resistenza  $r_\pi$ , e la chiameremo per l'appunto  $C_\pi$ ; per quanto riguarda la capacità di svuotamento della giunzione base-collettore,  $C_\mu$ , viene solitamente fornita, quantificata nei datasheet dei dispositivi elettronici in questione, e di solito risulta essere trascurabile rispetto alla  $C_\pi$  (anche se vedremo che bisognerà considerarla per alcuni motivi).

## 5.1 Modello di Giacoletto

Consideriamo dunque il modello di piccolo segnale completo, in grado di prevedere anche un comportamento ad alte frequenze: il modello di Giacoletto.

Se come abbiamo appena detto solitamente  $C_\mu$  non rappresenta un problema per chi deve analizzare circuiti, poichè fornita dal produttore,  $C_\pi$  sarà un parametro da calcolare.

Partiamo dal calcolo del parametro  $h_{fe}(s)$ , ossia il guadagno in corrente con uscita a corto circuito ( $V_{CE} = 0$ ); se cortocircuitiamo l'emettitore al collettore, vediamo che su  $C_\mu$  vi sarà la stessa tensione che vi sarà su  $r_\pi$  e  $C_\pi$ .

Il generatore pilotato ha infatti un'impedenza elevatissima, e anche  $r_o$ , quindi il corto circuito tra collettore ed emettitore sarà il ramo per cui passerà tutta la corrente.  $C_\mu$  è dunque collegato in parallelo a  $r_\pi$  e  $C_\pi$ , essendovi la stessa tensione.

Consideriamo ora alcuni conti su questo circuito, tenendo conto della seguente convenzione: utilizziamo per indicare le grandezze lettere maius-

cole, poichè ci riferiamo ad un modello per le alte frequenze; dal momento che trattiamo comunque dei segnali, consideriamo i pedici con la lettera minuscola. Fatta la premessa, vediamo che:

$$I_c = (g_m - sC_\mu)V_\pi$$

Abbiamo che la tensione  $V_\pi$  vale:

$$V_\pi = I_b(r_\pi \oplus C_\mu \oplus C_\pi)$$

Invertendo l'espressione, e risolvendola rispetto a  $I_b$ , si può ottenere:

$$I_b = \frac{V_\pi}{\frac{1}{r_\pi} + sC_\pi + sC_\mu} = \frac{V_\pi r_\pi}{1 + sr_\pi(C_\pi + C_\mu)}$$

Da qua, avremo che l'espressione di  $V_\pi$  sarà:

$$V_\pi = \frac{I_b r_\pi}{sr_\pi(C_\pi + C_\mu) + 1}$$

Ricordiamo che il nostro obiettivo è quantificare il guadagno  $h_{fe}(s)$ , ossia il guadagno in corrente  $\frac{I_c}{I_b}$  a uscita cortocircuitata; introduciamo dunque nella trattazione  $I_c$ :

$$\begin{aligned} I_c + \frac{V_\pi}{\frac{1}{sC_\mu}} &= g_m V_\pi \implies I_c + V_\pi sC_\mu = g_m V_\pi \\ \implies I_c &= V_\pi (g_m - sC_\mu) \end{aligned}$$

Sostituendo dunque l'espressione di  $V_\pi$  in  $I_c$ :

$$I_c = \frac{I_b r_\pi (g_m - sC_\mu)}{1 + sr_\pi(C_\mu + C_\pi)}$$

Quindi:

$$h_{fe}(s) = \frac{r_\pi (g_m - sC_\mu)}{sr_\pi(C_\mu + C_\pi) + 1}$$

Un'osservazione: notiamo che a bassa frequenza, ossia per  $s \rightarrow 0$ , il guadagno appena calcolato tende a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} h_{fe}(s) \rightarrow \frac{r_\pi g_m}{1} = \beta$$

L'espressione, come potevamo immaginare, si comporta come il semplice  $\beta$  del transistor; la cosa ci va comoda, poichè abbiamo una conferma sul fatto

che il modello che stiamo utilizzando sia compatibile con quelli a frequenze più basse. L'espressione di  $h_{fe}(s)$  introduce uno zero ed un polo nella rete; la domanda cui siamo interessati rispondere, per motivi che esplicheremo tra breve, è: quale dei due si trova a frequenza più bassa? Vediamolo:

$$\omega_p = \frac{1}{r_\pi(C_\mu + C_\pi)} \simeq \frac{1}{r_\pi C_\pi}$$

$$\omega_z = \frac{g_m}{C_\mu}$$

Confrontiamo le due mediante un rapporto, e vediamo che:

$$\frac{\omega_z}{\omega_p} \sim \frac{10^2}{10^{-2}} \simeq 10^4$$

Utilizzando dunque valori tipici, la distanza tra  $\omega_z$ , ossia la pulsazione dello zero, e  $\omega_p$ , ossia la pulsazione del polo, è circa di quattro decadi, e per prima si incontra  $\omega_p$ .

Si definisce dunque a questo punto un parametro molto importante, ossia la frequenza di transizione  $f_T$ , come il prodotto di banda e guadagno; essa è fondamentale, poichè a partire da essa si incontreranno i limiti del modello di Giacoletto:  $\omega_p$  è una frequenza dell'ordine di qualche decina di MHz; il modello che stiamo utilizzando per l'alta frequenza, è valido al più una decade sopra  $\omega_p$ , dopo di che tutti i risultati che si potrebbero ottenere da un'eventuale analisi circuitale sono completamente privi di senso, dal momento che sono risultanti inclusi in un range di situazioni non previste dal modello.

La frequenza del polo,  $f_p$ , sarà:

$$f_p = \frac{1}{2\pi r_\pi(C_\mu + C_\pi)}$$

A partire da questa, potremo finalmente ricavare la capacità tra base ed emettitore,  $C_\pi$ , semplicemente invertendo l'equazione:

$$C_\pi = \frac{g_m}{2\pi f_T} - C_\mu$$

Ciò che abbiamo introdotto finora è dunque il modello di Giacoletto per quanto riguarda il transistor bipolare in ambito di frequenze dell'ordine della decina di MHz; introduciamo ora un metodo circuitale in grado di aiutarci a risolvere circuiti anche utilizzando questo modello.

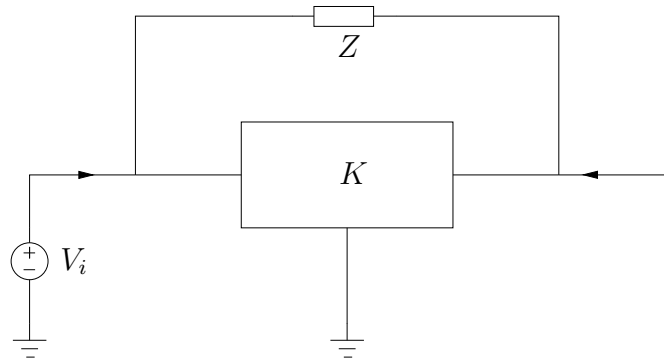


Figura 5.2: Teorema di Miller (prima parte).

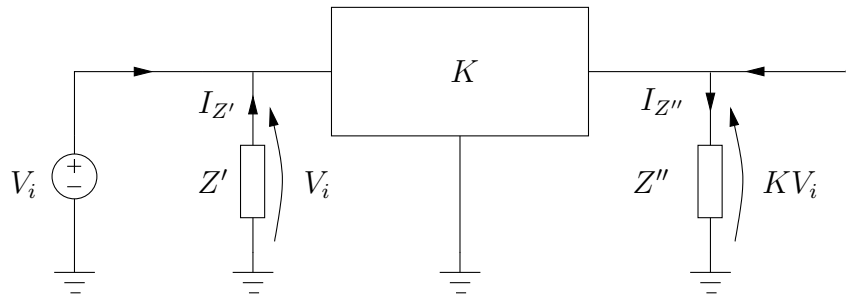


Figura 5.3: Teorema di Miller (seconda parte).

## 5.2 Teorema di Miller delle tensioni

Il Teorema di Miller delle tensioni è un teorema in grado di facilitare notevolmente i calcoli circuitali in ambito di piccolo segnale a frequenze elevate; vediamo in cosa consiste.

Dato un circuito così fatto, il teorema di Miller è in grado di eliminare la resistenza-ponte ai capi di un blocco amplificatore  $K$ , sostituendola con due impedenze in parallelo, una in uscita, una in ingresso.

Vediamo che:

$$I_Z = \frac{KV_i - V_i}{Z} = V_i \frac{K - 1}{Z}$$

Calcoliamo le correnti che dovrebbero esserci sul secondo circuito, ossia sul circuito equivalente Miller ottenuto; dal momento che sul nodo di ingresso dell'amplificatore si ha una tensione pari alla tensione di ingresso,  $V_i$ :

$$I'_Z = -\frac{V_i}{Z'} \implies Z' = -\frac{V_i}{I_Z} = -\frac{V_i Z}{V_i(K - 1)} = Z \frac{1}{1 - K}$$

Abbiamo qua considerato il segno -, dal momento che la convenzione da noi utilizzata si fonda sul considerare verso l'alto la tensione, ma dal momento che l'impedenza  $Z'$  è un utilizzatore, la corrente a rigor di logica dovrebbe andare verso il basso. Con la correzione di segno i calcoli sono corretti.

Per quanto riguarda la seconda impedenza, il ragionamento è praticamente uguale: in uscita dall'amplificatore, si avrà una tensione amplificata di un fattore  $K$ :

$$I_Z'' = \frac{KV_i}{Z''} \implies Z'' = \frac{KV_i}{I_Z} = \frac{KV_i Z}{V_i(K-1)} = Z \frac{K}{K-1}$$

Avremo dunque che le espressioni finali delle due impedenze,  $Z'$  e  $Z''$ , saranno:

$$Z' = Z \frac{1}{1-K}$$

$$Z'' = Z \frac{K}{K-1}$$

## 5.3 Stadi di amplificazione in ambito di alte frequenze

Esaminiamo ora ciò che comporta l'introduzione del modello ad alta frequenza sugli stadi di amplificazione, cercando di renderci conto di come essi siano in grado di rispondere a determinate frequenze.

### 5.3.1 Stadio a emettitore comune

Vogliamo studiare lo stadio a emettitore comune in ambito di frequenze elevate: considerando  $f_H$  la frequenza di taglio, ossia la frequenza in cui gli effetti capacitivi del transistor diventano non trascurabili, vogliamo essere in grado di determinare il comportamento del circuito.

Sviluppando i modelli di piccolo segnale, si ottiene una cosa di questo genere:

Mediante Thevenin, è possibile rendere il circuito più simile a quello che permette di applicare il teorema di Miller:

$$V_S' = V_S \cdot \frac{R_B}{R_S + R_B} \cdot \frac{r_\pi}{R_S \oplus R_B + r_{bb'} + r_\pi}$$

$$R_S' = (R_S \oplus R_B + r_{bb'}) \oplus r_\pi$$

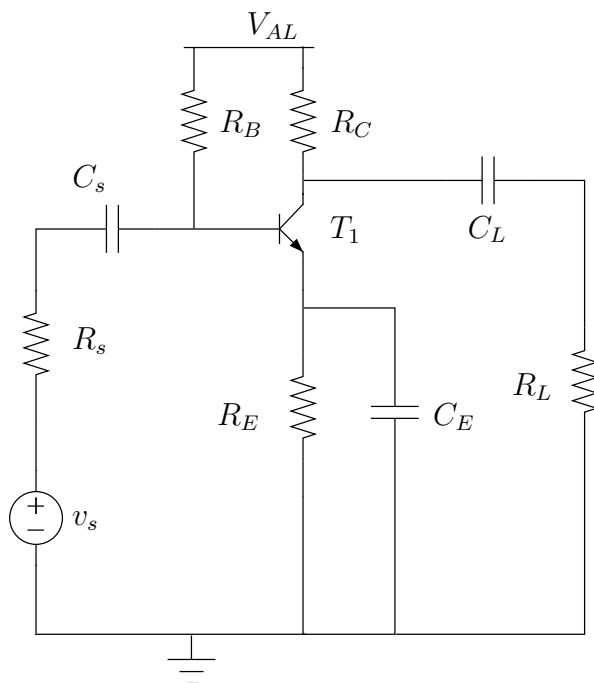


Figura 5.4: Stadio di amplificazione ad emettitore comune.

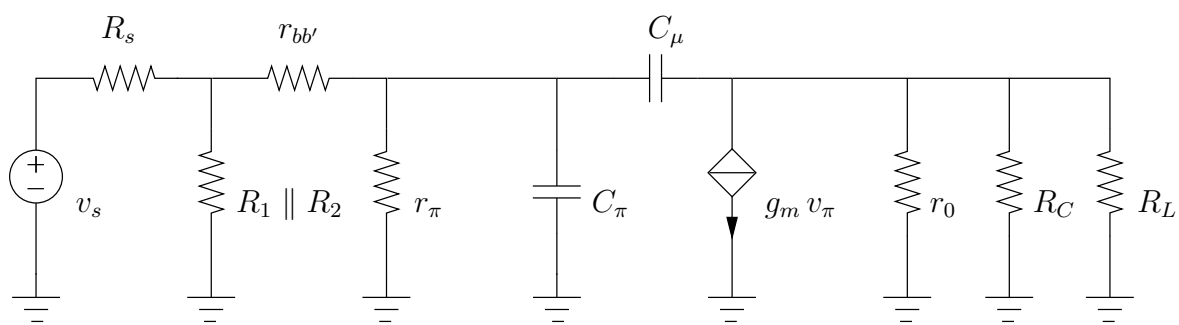


Figura 5.5: Stadio ad emettitore comune sviluppato secondo il modello di piccolo segnale.



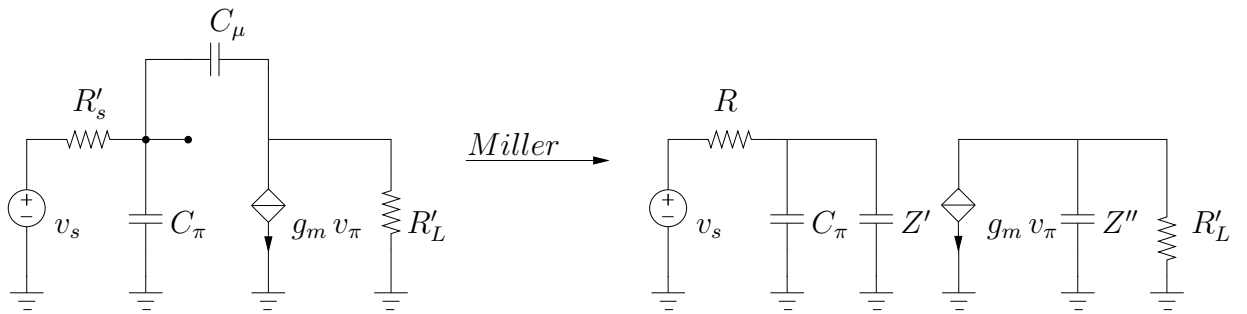


Figura 5.6: Stadio ad emettitore comune dopo una *thévenata*.

Applichiamo dunque il teorema di Miller, ottenendo:

$$Z' = \frac{1}{sC_\mu} \cdot \frac{1}{1 + g_m R'_L} = \frac{1}{sC_\mu(1 + g_m R'_L)}$$

$$Z'' = \frac{1}{sC_\mu} \cdot \frac{-g_m R'_L}{-1 - g_m R'_L} \simeq \frac{1}{sC_\mu}$$

Dove sono situati i poli?

$$\omega_{p,1} = \frac{1}{R'_S [C_\pi + C_\mu(1 + g_m R'_L)]}$$

$$\omega_{p,2} = \frac{1}{C_\mu R'_L}$$

Vediamo che l'unica pulsazione che ci interessa, poichè rientrante nel modello, è  $\omega_{p,1}$ : il secondo polo è infatti sicuramente aldilà del primo, e quindi non è sensato, poichè il comportamento a quel genere di frequenze non è modellizzabile mediante il solo modello di Giacoletto.

### 5.3.2 Stadio a collettore comune

Consideriamo direttamente lo sviluppo in alta frequenza del circuito a collettore comune.

Quello che cerchiamo, come al solito, è solo il polo dominante del circuito, ossia quello a frequenza più bassa; possiamo modificare dunque il circuito, vedendolo in questo modo:

$$V_2 = Z_2 \left( \frac{V_1}{Z_1} + g_m V_1 \right)$$

$$V_T = V_1 + V_2$$

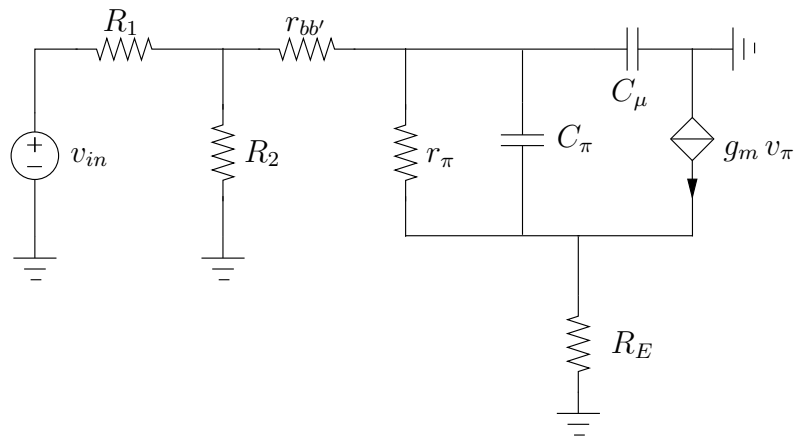


Figura 5.7: Stadio amplificatore a collettore comune.

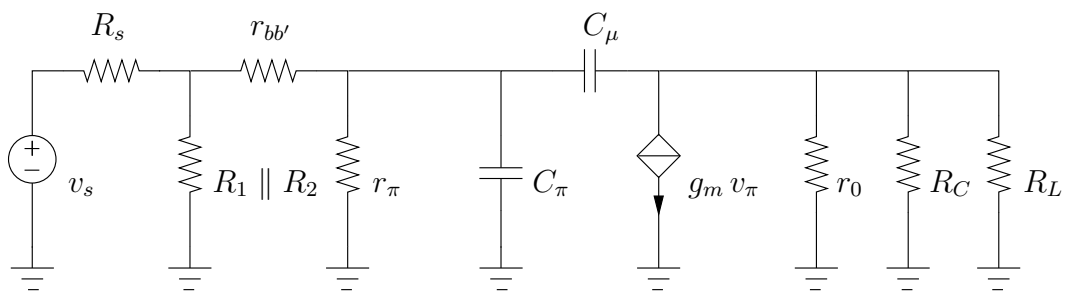


Figura 5.8: Sviluppo dello stadio a collettore comune.

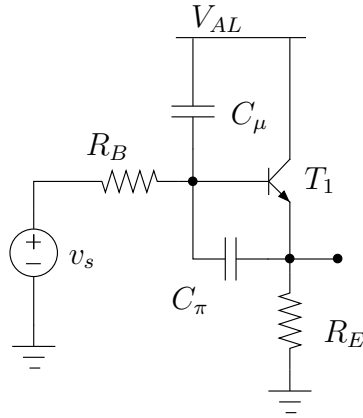


Figura 5.9: Il circuito delle figure precedenti in una nuova rappresentazione.

Da qua, vediamo, sostituendo, che:

$$V_1 = V_T - V_2 = V_T - V_1 \frac{Z_2}{Z_1} (1 + g_m Z_1)$$

$$\implies Z_{in} = \frac{V_T}{I_T} = Z_1 + Z_2 + g_m Z_1 Z_2 = Z_2 + Z_1 (1 + g_m Z_2)$$

Notiamo dunque dallo svolgimento del circuito la seguente cosa:

La capacità  $C_\mu$  è collegata a 0 V, e dunque non sarà soggetta ad effetto Miller, poichè non rappresenterà un ponte; per quanto riguarda  $C_\pi$  tuttavia ora il discorso è diverso: il carico è situato all'emettitore, e quindi si può pensare che  $C_\pi$  sia collegata a  $v_o$ , ossia all'uscita dello stadio di amplificazione. Si può dunque trovare che:

$$C'_\pi = C_\pi (1 - K)$$

$$C''_\pi = \frac{K - 1}{K} C_\pi$$

Semplicemente applicando il teorema di Miller!

Poichè  $K$  si riferisce al teorema di Miller sulle tensioni, e poichè lo stadio a collettore comune non amplifica le tensioni,  $C_\pi$  non subirà effetto Miller, ma non a causa della sua posizione nel circuito, bensì a causa del basso guadagno in tensione dello stadio.

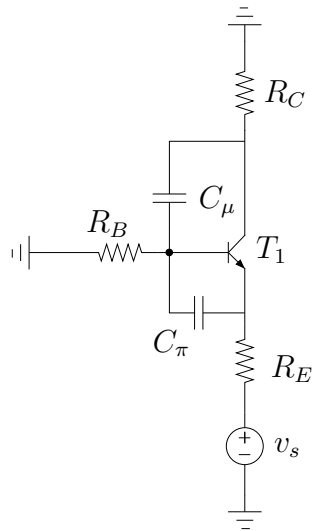


Figura 5.10: Stadio a base comune.

### 5.3.3 Stadio a base comune

Come già accennato, lo stadio di amplificazione a base comune è il più importante per quanto riguarda l'amplificazione di segnali in ambito di radiofrequenze.

La cosa estremamente positiva, è che entrambe le capacità siano collegate ad uno 0 V, ovviamente nell'ambito del segnale! Per questo motivo, questo tipo di stadio è ottimo: nessuna delle due capacità parassite ci fornirà grossi problemi in ambito di alta frequenza. Si può verificare inoltre che le due capacità siano separate per maglie, quindi valutare quale delle due capacità fornisca il primo polo (che ricordiamo per l'ennesima volta essere l'unica informazione utile fornita dal modello di Giacoletto), sarà un'operazione banale, poichè il calcolo delle impedenze viste da entrambe non coinvolgerà sicuramente l'altra impedenza, e sarà relativamente facile (mediante gli opportuni metodi circuitali) determinare quale dei poli provochi il cut-off del segnale ad alta frequenza.

Calcolando dunque semplicemente le impedenze viste dalle capacità parassite, si determina la maggiore di esse (che darà dunque luogo al polo a frequenza più bassa); questo sarà il polo previsto dal modello di Giacoletto; tutto ciò che sta una decade dopo esso sarà da scartare, come già detto.

## Capitolo 6

# Risposta in Frequenza di un Circuito Amplificatore

Finora abbiamo analizzato un insieme di tecniche di risoluzione di circuiti basilari costituiti da stadi amplificatori di BJT o MOSFET; ciò che abbiamo tuttavia fatto, è considerare sostanzialmente due condizioni:

- Polarizzazione: tutti i condensatori vengono usati come disaccoppiatori, dunque vengono considerati come circuiti aperti, poichè forniscono un'impedenza molto più elevata di tutte le altre presenti nel circuito, e possono dunque essere così modellizzate;
- Piccolo segnale: consideriamo di trovarci ad una frequenza tale per cui tutti i condensatori si possono considerare come circuiti chiusi, ossia come corto circuiti.

Per la polarizzazione, non abbiamo più nulla da aggiungere: considerati tutti aperti i condensatori, si può procedere nello studiare il circuito rimanente, e così determinare il punto di lavoro; per quanto riguarda il segnale, la faccenda è un po' più delicata di quanto abbiamo esposto, come ora vedremo.

Generalmente lo studio delle componenti reattive del circuito (siano esse capacitive o induttive) si effettua nel dominio delle frequenze, o meglio nel dominio di Laplace: come si è soliti fare in Elettrotecnica, la tattica fondamentale (che noi semplificheremo) sarà quella di considerare la trasformata di Laplace di ciascun componente, ed analizzare così il circuito risultante dalla trasformazione.

Concentriamoci per ora sullo studio dei condensatori: ogni condensatore indipendente introduce nella rete esattamente un polo ed uno zero, situati ad una certa frequenza. Per quanto riguarda il polo, abbiamo la garanzia di

averlo sempre ad una frequenza finita; lo zero è un discorso più delicato: esso potrebbe trovarsi a frequenza nulla (ossia in  $s = 0$ ), o finita, o anche  $\infty$ .

Il nostro obiettivo sarà quello di caratterizzare la risposta in frequenza di un circuito amplificatore, definendo la funzione di trasferimento della rete, ossia la funzione  $H(s)$ , rappresentante il guadagno complessivo dell'amplificatore al variare della frequenza, qua indicata mediante la variabile complessa  $s$ .

Solitamente per quanto riguarda lo studio nel dominio delle frequenze si ricorre alla trasformata di Fourier; qua faremo qualcosa di diverso, ossia utilizzare le classiche tecniche circuitali applicate alla trasformata di Laplace, nel caso particolare in cui  $s = j\omega$ . Potremmo spiegare che quello che facciamo nella nostra analisi, non è precisamente osservare il polo da 'dentro', ossia studiare la deformazione del piano complesso sul punto stesso, bensì qualcosa che analiticamente si può spiegare così: ci posizioneremo sostanzialmente sul solo semiasse immaginario positivo (potendo considerare l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace sempre pari a  $s = 0$ ); le informazioni che osserveremo riguardo il polo non saranno direttamente osservate sul polo, bensì saranno derivanti dalla deformazione dell'asse complesso provocata dal polo, osservate dal punto più vicino al polo stesso, sull'asse immaginario.

Questo discorso introduttivo (e non molto necessario al fine della risoluzione dei circuiti) si può motivare così: supponiamo di trovarci su di un letto, e di sollevare da un punto un lenzuolo; il punto da cui lo solleviamo è in prima approssimazione un polo (anche se un polo fa esplodere, e dunque andare ad infinito, la funzione complessa nel punto); intorno al polo, ossia al punto di sollevamento, avremo sostanzialmente una discesa di una certa pendenza. Ciò che si può dimostrare, è che questa pendenza, letta sull'asse immaginario, è pari ad un multiplo di 20 dB/dec, ossia venti decibel per decade (dal momento che la funzione di trasferimento si propone solitamente in unità logaritmica sull'asse delle frequenze, ed in decibel sull'asse dei guadagni). Tutto ciò è vero, nel caso di un polo semplice; nel caso di due poli complessi coniugati, la situazione sarà un po' più complicata da descrivere (bisognerebbe immaginare di sollevare due punti del lenzuolo: in realtà il punto di massimo non sarà il punto a distanza minima da uno dei due poli, dal momento che l'altro avrà con la coda 'sollevato leggermente' l'altro), ma comunque non importante ai fini della trattazione.

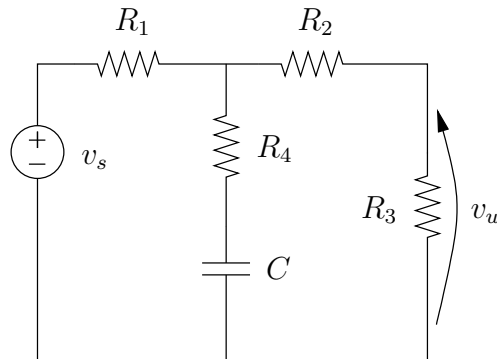


Figura 6.1: Circuito ad una costante di tempo.

## 6.1 Esempio di calcolo di funzione di trasferimento per rete ad una costante di tempo

Consideriamo la rete della figura 6.1.

Nel dominio di Laplace, tutti gli elementi resistivi rimangono immutati, tranne il condensatore  $C$ , che viene così trattato (come si sa da Elettrotecnica):

$$\mathcal{L}\{C\} = \frac{1}{sC}$$

In questo modo, l'uscita della rete varrà:

$$v_o = v_s \cdot \frac{R_4 + \frac{1}{sC} \oplus (R_2 + R_3)}{R_1 + R_4 + \frac{1}{sC} \oplus (R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

Questa rete è molto semplice, ma quest'espressione come vediamo è molto, molto complicata da usare. Ciò che possiamo fare, è farci furbi: anziché effettuare un calcolo rigoroso, basato sulle leggi dell'Elettrotecnica (utilissime, ma talvolta un po' troppo complicate).

Sfruttiamo il fatto di avere un solo condensatore, per fare alcune congetture: a basse frequenze, il condensatore non permetterà al segnale di passare, e quindi esso si comporterà sostanzialmente come un circuito aperto:

In questo caso l'uscita sarà semplicemente:

$$v_u = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} v_s$$

Notiamo dunque che abbiamo un guadagno del tipo:

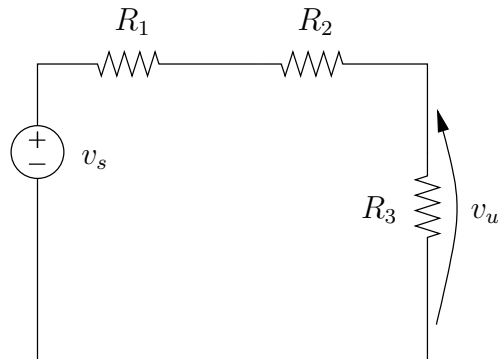


Figura 6.2: Il circuito precedente nell'approssimazione per basse frequenze.

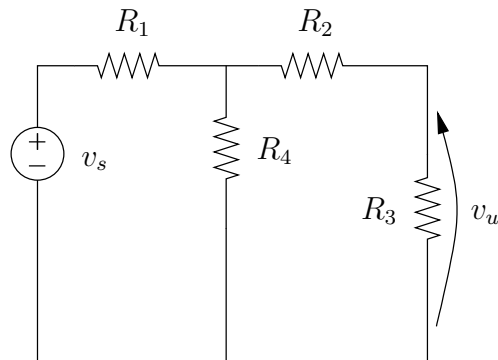


Figura 6.3: Il circuito della figura 6.1 nell'approssimazione per alte frequenze.

$$A_v = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Questo in realtà dunque non sarà un guadagno, ma un'attenuazione.

Consideriamo frequenze più elevate: il condensatore ora si comporterà come un corto circuito, e l'uscita sarà sostanzialmente la seguente:

$$v_u = \frac{R_4 \oplus (R_2 + R_3)}{R_1 + R_4 \oplus (R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_s$$

Quindi:

$$A_v = \frac{R_4 \oplus (R_2 + R_3)}{R_1 + R_4 \oplus (R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

Senza dover effettuare calcoli di tipo simbolico, siamo arrivati facilmente ad una formulazione dei due guadagni, prima e dopo che il condensatore si potesse considerare un'impedenza trascurabile nella rete.



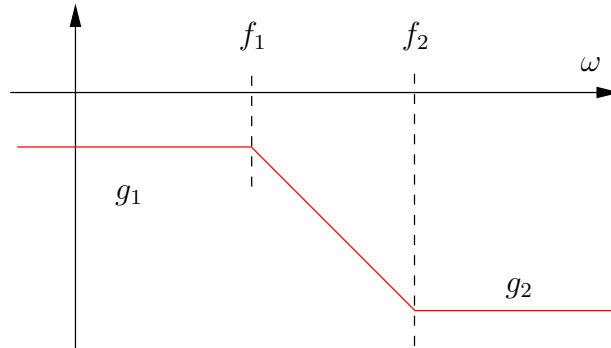


Figura 6.4: Diagramma di Bode.

Fino alla frequenza  $f_p$  abbiamo una certa attenuazione; sappiamo, dall'Elettrotecnica, che tra  $f_p$  e  $f_z$  abbiamo un rapporto costante tra frequenza e guadagni, ossia una diminuzione di 20 dB/dec: al variare delle frequenze, varia identicamente anche il guadagno.

Un risultato globale è dunque il seguente: dato un elemento reattivo di tipo capacitivo, è possibile calcolare facilmente la frequenza del suo polo, mediante la seguente formula generale (ricavabile mediante uno studio della Teoria dei Segnali unita all'Elettrotecnica):

$$f_p = \frac{1}{2\pi C R_{eq}}$$

Dove la  $R_{eq}$  rappresenta la resistenza equivalente vista dal condensatore. Dato dunque un elemento di tipo capacitivo, riuscendo a calcolare la resistenza equivalente che esso vede ai suoi morsetti, è possibile calcolare in maniera molto semplice la frequenza del polo provocato da questo elemento reattivo.

Altro risultato interessante, e molto intuitivo, è il seguente: supponiamo di avere un polo a frequenza  $f_1$ , prima del quale vi è un guadagno  $g_1$ ; sapendo che tra il polo situato alla frequenza  $f_1$  e lo zero situato alla frequenza  $f_2$ , vi è una pendenza di -20 dB/dec, e che dopo lo zero avremo un guadagno pari a  $g_2$ , avremo che:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{g_2}{g_1}$$

In maniera del tutto duale, supponiamo che tra i due punti vi siano -40 dB/dec. Per le proprietà dei logaritmi, avremo:

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \frac{g_2}{g_1}$$

Utilizzando dunque la frequenza del polo ricavata nel metodo generale prima proposto (valido solo però in reti ad una costante di tempo, come discuteremo tra breve), e l'osservazione appena fatta, sarà molto facile determinare la posizione del polo e quindi quella dello zero, utilizzando questi trucchi.

Esiste un sistema ulteriore ed alternativo per la ricerca dello zero, che però qua non tratteremo (se ne conosca comunque l'esistenza): il teorema dell'elemento aggiunto.

## 6.2 Esempio applicativo su reti a più costanti di tempo

Abbiamo fornito una procedura in grado di dirci come procedere nel caso di circuiti con capacità non trascurabili sotto il punto di vista del segnale, ma solo per quanto riguarda una costante di tempo. Consideriamo ora la rete di figura 6.5.

Possiamo considerare il condensatore di base  $C_B$  idealmente con capacità pari a  $\infty$ , e quindi ideale, trascurabile, che si chiuderà non appena si avrà una frequenza leggermente maggiore di 0 Hz. Il condensatore  $C_E$  all'emettitore tuttavia non è trascurabile! Esso introdurrà infatti uno zero ed un polo nella funzione di trasferimento.

All'emettitore avremo un'impedenza  $Z_E$  pari a:

$$Z_E = \frac{1}{sC_E} \oplus R_E$$

In base:

$$R_B = R_{B1} \oplus R_{B2}; \quad R_{B,eq} = R_{B1} \oplus R_{B2} \oplus R_{in}$$

Il guadagno  $A_v$  del circuito avrebbe una forma del tipo:

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{\beta R_C}{R_{B,eq} + (\beta + 1)Z_E + r_\pi}$$

Ricordiamo che  $Z_E$  è un'espressione piuttosto complessa con la variabile  $s$ . Abbiamo detto che il primo condensatore si può considerare ideale, ma il secondo? Purtroppo come detto, un polo ed uno zero saranno sicuramente presenti nella rete.

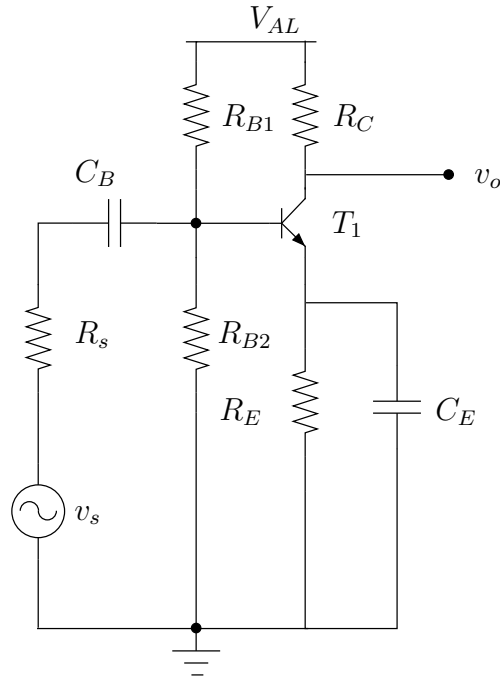


Figura 6.5: Circuito a più costanti di tempo con transistor bipolare.

Applicando il ragionamento precedentemente effettuato, possiamo vedere che:

$$\frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{\beta R_C}{R_{B,eq} + (\beta + 1)Z_E + r_\pi} = -2.3 \simeq 7.2dB$$

Facendo lo stesso calcolo a condensatori chiusi, cambia l'impedenza, e il guadagno (facendo conti) diventa circa uguale a -170 (44.63 dB).

La frequenza del polo causato dal condensatore significativo dunque sarà:

$$f_p = \frac{1}{2\pi C_E R_{eq}} = 4 \text{ kHz}$$

Usando il solito trucco, vedendo che il guadagno si comporta in questo modo, sapendo che avremo prima lo zero e poi il polo, vedremo che:

$$\frac{f_z}{4kHz} = \frac{-2.3}{-170} \implies f_z = 54.12 \text{ Hz}$$

Esiste un metodo alternativo per determinare lo zero introdotto da un condensatore, che talvolta potrebbe tornare molto utile: essi consiste nel cercare uno zero nella funzione di trasferimento, ossia uno zero di trasmissione, provocato sicuramente da un circuito. Si tratta, in pratica, di quel

valore della variabile  $s$  tale per cui la funzione di trasferimento sia nulla, e così non esca nulla dal circuito.

Avevamo detto che:

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = \frac{-\beta R_C}{R_{B,in} + (\beta + 1)Z_E + r_\pi}$$

Consideriamo comportamenti asintotici di questo tipo di circuito: vediamo che se  $Z_E \rightarrow \infty$ ,  $v_o \rightarrow 0$ , ed è proprio ciò che vogliamo: annullare l'uscita!

Come facciamo a far tendere l'espressione della  $Z_E$  ad infinito? Beh, riprendiamo l'espressione precedente:

$$\begin{aligned} Z_E = R_E \oplus \frac{1}{sC} &= \frac{R_E}{1 + sRC_E} \longrightarrow 1 + sRC_E = 0 \\ \implies s &= -\frac{1}{R_EC_E} \end{aligned}$$

Questi sono quindi due metodi operativi di lavorare, per considerare il calcolo dello zero di trasmissione in un circuito, ossia lo zero inserito da un certo condensatore.

## 6.3 Metodi generali per il calcolo dei poli

Abbiamo finora analizzato casi reali e che capitano comunque frequentemente, ma abbiamo trascurato alcuni dettagli assolutamente rilevanti: in tutti i circuiti finora analizzati, o vi era un solo condensatore, o un condensatore non introduceva poli/zeri; a seconda della topologia della rete, esistono alcuni metodi generali per lavorare, le cui idee verranno ora proposte.

### 6.3.1 Elementi reattivi separati per maglie

Se i condensatori sono separati per maglie, ossia separati dal circuito, si può semplicemente considerare le due costanti di tempo separatamente, e sarà così facile calcolare le frequenze dei poli, semplicemente mediante il solito metodo.

Come si capisce se i due condensatori sono separati per maglie? Semplice: studiando la  $R_{eq}$  di ciascuno dei due, se l'altro elemento reattivo rientra nella  $R_{eq}$  (che sarebbe dunque una  $Z_{eq}$ ): se ciò non è vero, allora i due condensatori saranno separati per maglie, e così sarà possibile utilizzare questo tipo di tecnica. Collegando per esempio una capacità al gate di un MOSFET,

e un'altra in un altro punto (in modo che non ci siano fili di contatto tra i due punti), si avrà una configurazione di questo tipo.

### 6.3.2 Elementi reattivi separati per costanti di tempo

Esistono ovviamente casi in cui i condensatori non sono separati per maglie: si veda semplicemente il caso di un BJT, con una capacità collegata alla base ed una all'emettitore. Ciò che si può sperare è che vi sia una separazione delle capacità di tipo diverso rispetto a quella appena analizzata, ossia una separazione per costanti di tempo.

Se i due condensatori 'si vedono', significa che l'impedenza di uno va ad influenzare la resistenza equivalente vista dall'altro, e dunque non è assolutamente semplice determinare la funzione di trasferimento, poichè la posizione del polo risulta molto difficile da determinare.

L'unico ragionamento in grado di salvarci, è il seguente: possiamo considerare dei *worst case*, ossia casi pessimistici, casi peggiori, riguardanti il comportamento in frequenza dei condensatori. Come sappiamo, nei casi estremi un condensatore si può comportare o come impedenza infinita (circuito aperto), o come impedenza nulla (corto circuito): al di sotto di una certa frequenza il condensatore sarà sicuramente aperto, e al di sopra di un'altra chiuso. Ciò che dovremo calcolare, dunque, saranno quattro costanti di tempo  $\tau$ , relative alle quattro possibili combinazioni degli stati dei condensatori  $C_1$  e  $C_2$ : aperto/aperto, aperto/chiuso, chiuso/aperto, chiuso/chiuso. Quelle che ricaveremo, dunque, saranno quattro resistenze che, moltiplicate per la capacità dalla quale si osserva il circuito, saranno:

$$R_{eq,C1}^O; R_{eq,C1}^C; R_{eq,C2}^O; R_{eq,C2}^C$$

Considerando una sorta di dominio delle costanti di tempo, si avrebbe una cosa del tipo:

A questo punto, vediamo che si hanno dei segmenti temporali, comprendenti il tempo di apertura-chiusura di ciascuna delle capacità. Questo disegno è fondamentale al fine di capire se è possibile andare avanti con l'analisi circuitale: se infatti capita che i due segmenti così identificati siano intersecati o comunque distino meno di una decade, non è assolutamente possibile, con le tecniche che siamo in grado di studiare in questo contesto, determinare nessun risultato. Se al contrario si ha una distanza pari ad almeno una decade, è possibile lavorare con il circuito, e proseguire l'analisi in frequenza del comportamento dell'amplificatore.

Questo tipo di confronto, serve semplicemente per quantificare l'errore che si commette considerando di fatto separate le costanti di tempo: esso è infatti

quantificabile semplicemente come l'inverso del rapporto delle frequenze (o delle costanti di tempo): se per esempio una frequenza è pari a 50 volte l'altra, si avrà un errore pari a:

$$E = \frac{1}{50} = 2\%$$

## 6.4 Polo ad Alta Frequenza

Nel caso in un esercizio non si consideri una frequenza di transizione  $f_T \rightarrow +\infty$ , e quindi si considerino gli effetti di taglio intrinseci del transistor, ossia le capacità parassite dovute alla struttura del transistor, quali capacità di svuotamento o di diffusione, non trascurabili al di sopra di una certa frequenza, possiamo considerare 'costante' la presenza di un ultimo polo, a frequenze piuttosto elevate (intorno alla decina-centinaio di MHz).

La determinazione della posizione in frequenza di questo polo sarà effettuabile, riprendendo le nozioni apprese durante lo studio del modello di Giacometti: una volta calcolate  $C_\mu$  e  $C_\pi$ , si studia la topologia del circuito; riassumendo:

- Se lo stadio è a emettitore (o source) comune, si avrà effetto Miller sulla  $C_\mu$ , che andrà a sommarsi con  $C_\pi$  (in quanto finirà in parallelo ad essa, dal momento che molto spesso all'emettitore/source del transistor si introduce una capacità che ad alte frequenze assume valori di impedenza trascurabili rispetto a quelli della  $R_E/R_S$ ).
- Se lo stadio è a collettore/drain comune, si avrà effetto Miller, ma trascurabile in quanto l'effetto Miller viene influenzato dal guadagno in tensione dello stadio; sappiamo che il collettore/drain comune guadagna notevolmente in corrente, ma poco in tensione, e per questo potremo considerare migliore il comportamento in frequenza di questo tipo di stadio.
- Se lo stadio è a base/gate comune, abbiamo (come detto spesso) il miglior comportamento in frequenza: innanzitutto, le capacità parassite sono separate per maglie, e quindi l'impedenza offerta da una non va ad influenzare l'altra; inoltre, entrambe le capacità sono a 0 V, quindi non subiscono effetti di amplificazione dovuti all'effetto Miller.

# Capitolo 7

## Studio di circuiti controreazionati

La reazione (o retroazione, o feedback) è uno strumento fondamentale dell'Ingegneria (Elettronica, Meccanica, e quant'altro). Le basi matematiche formalizzanti le tecniche basate sulla reazione vennero poste da Maxwell: le equazioni di Maxwell, infatti, modellizzanti le fenomenologie legate all'elettromagnetismo, sono state uno dei primi esempi di feedback (in quanto il campo elettromagnetico, in parole povere, si può considerare come una miscela di campo elettrico e magnetico che continuano a riprodursi vicendevolmente); Watt fu il primo a realizzare in pratica, seppur in modo grossolano, il feedback, in ambito di macchine a vapore.

Nell'ambito dell'Elettronica, il feedback venne introdotto da Harold Stephen Black: egli inventò gli amplificatori a controreazione, per poter eliminare il problema dell'instabilità (per motivi che presenteremo tra breve) in ambito di amplificatori. Negli anni 20-30, i laboratori Bell avevano ricevuto il compito di progettare un sistema di telecomunicazioni in grado di collegare la West Coast con la East Coast; il segnale doveva essere amplificato, dopo un certo numero di metri, al fine di poter arrivare da una parte all'altra del cavo. Gli amplificatori tuttavia sono estremamente sensibili alla temperatura, e ad altri fattori ambientali. Black, mediante l'introduzione degli amplificatori retroazionati, risolse questo problema.

Il nostro obiettivo è ora quello di capire come applicare, in ambito di elettronica, il feedback; consideriamo il seguente schema a blocchi della figura 7.1.

$A$  è un amplificatore, costituito da un certo numero di stadi, i quali riescono complessivamente a determinare un certo guadagno, per l'appunto pari ad  $A$ ;  $i$  è l'ingresso,  $u$  l'uscita,  $\beta$  il blocco di feedback, e poi si ha un nodo sommatore. Sostanzialmente,  $A$  è una funzione di molti parametri, quali

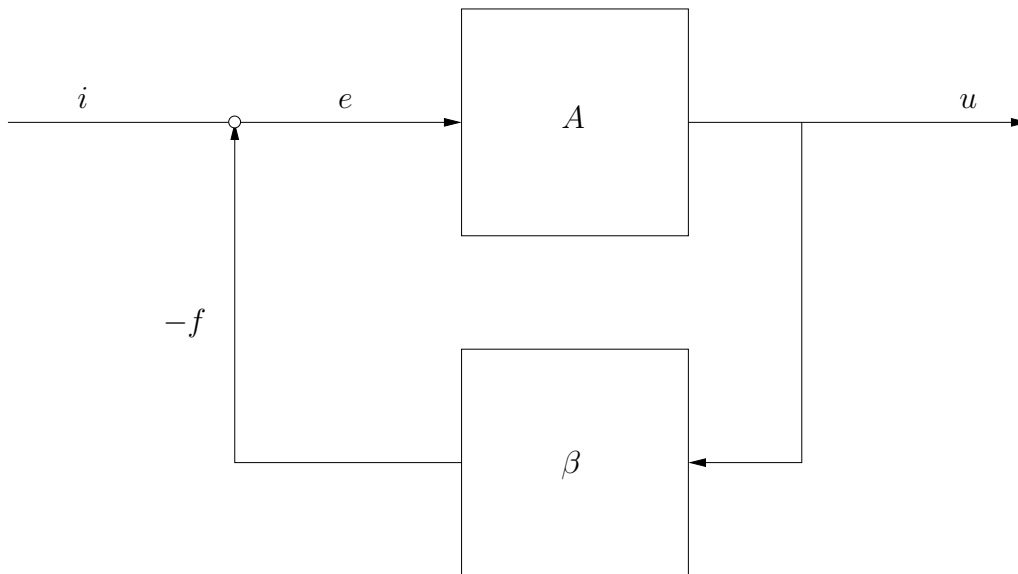


Figura 7.1: Schema a blocchi di un sistema con retroazione.

il  $\beta_F$  (ossia il guadagno dei vari transistori,  $g_m$ , la temperatura  $T$ , ed altri; dal momento che la variazione di ciascuna di queste grandezze comporta una variazione del guadagno, si sfrutta un'idea di questo genere: il segnale amplificato in uscita  $u$  viene mandato indietro, fatto passare per il blocco di feedback  $\beta$ , che lo riscalda (mediante una divisione), e lo inverte, ottenendo il segnale  $f$ . Questo viene mandato al nodo sommatore, che somma  $i$  e  $-f$ , ottenendo il segnale di errore  $e$ . In questo modo,  $e$  corregge l'amplificatore  $A$  in modo da stabilizzare il guadagno con una precisione notevole.

Riassumendo, riportando indietro il segnale, riusciamo a quantificare la variazione rispetto al punto di stabilità che desidereremmo ottenere, e ad effettuare una correzione.

A partire dallo schema a blocchi, possiamo proporre una traduzione in matematica della reazione:

$$\begin{cases} u = A \cdot e \\ e = i - f \\ f = \beta u \end{cases}$$

Da qua, risolvendo:

$$u = A(i - \beta u)$$

$$A \cdot i = u(1 + A\beta)$$



$$\implies \frac{u}{i} = \frac{A}{1 + A\beta} = A_F$$

Il rapporto  $\frac{u}{i}$  rappresenta il guadagno dell'amplificatore controreazionato (ossia cui è stata applicata una reazione negativa, ossia una reazione in cui, come descritto precedentemente, si cambia il segno del segnale che ritorna); altro modo di dire, è il guadagno di anello, o il guadagno ad anello chiuso.

## 7.1 Effetti della reazione

Basandoci sull'ipotesi (molto spesso verificata, praticamente sempre, in ambito di elettronica), secondo la quale  $A\beta \gg 1$ , possiamo considerare verificati molti fatti estremamente interessanti, per quanto riguarda la controreazione.

1. Desensitivity (desensibilizzazione):  $A$ , come sappiamo, dipende da diversi fattori, quali  $T$ ,  $\beta_F$  del transistor, e così via. Chiudendo  $A$  in un anello di controreazione, capitano cose molto interessanti sotto il punto di vista della stabilità del guadagno. Proviamo ad analizzarlo, calcolando la sensibilità relativa di  $A_F$ , ossia del guadagno  $A$  retroazionato, con un blocco di retroazione  $\beta$ :

$$\frac{\partial A_F}{\partial A} = \frac{1}{(1 + \beta A)^2}$$

Relativizzando, mediante la solita formula:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_F}{\partial A} \cdot \frac{A}{A_F} &= \frac{1}{(1 + \beta A)^2} \cdot \frac{A(1 + \beta A)}{A} = \\ &= \frac{1}{1 + A\beta} \end{aligned}$$

Se, come per ipotesi,  $A\beta \gg 1$ , allora la sensibilità relativa tende a 0, e quindi l'amplificatore sarà molto meno sensibile ai disturbi sulle grandezze di influenza, per quanto riguarda il guadagno  $A$ .

Cosa possiamo dire per quanto riguarda il guadagno  $\beta$ ? Vediamo:

$$\frac{\partial A_F}{\partial \beta} \cdot \frac{\beta}{A_F} = \frac{-A^2}{(1 + A\beta)^2} \cdot \frac{\beta(1 + A\beta)}{A} =$$

$$= \frac{-\beta A}{1 + \beta A}$$

Le cose qua sembrerebbero non essere dalla nostra parte: se  $\beta A \gg 1$ , abbiamo una sensibilità relativa pari al 100 %: qualsiasi variazione sul blocco di feedback  $\beta$  provoca una variazione pari al 100 % del guadagno. Ciò che abbiamo fatto, dunque, è spostare il problema dal  $\beta_F$  del transistorore al  $\beta$  del feedback (che si ricordi hanno un significato molto diverso).

Questo spostamento tuttavia è ottimo:  $\beta$  è una rete costruita semplicemente mediante elementi passivi e stabili, quali resistori, induttori o condensatori; se da un lato la teoria ci pone contro una sensibilità molto elevata, la tolleranza di componenti di questo tipo sarà ottima!

2. Riduzione della non-linearità dell'amplificatore: l'amplificatore retroazionato, varia notevolmente il guadagno, ma a ribasso: l'introduzione della retroazione in di un circuito basato su stadi di amplificazione, taglia drasticamente il guadagno dell'amplificatore.

Questo taglio ha tuttavia effetti anche buoni: se l'andamento del guadagno è infatti non lineare, il feedback tende a schiacciarlo, raddrizzarlo, e così renderlo più vicino ad un andamento lineare;

3. La banda passante del sistema controeazionato è molto maggiore di quella del solo  $A$ ; vediamo perchè:

Consideriamo una funzione del guadagno al variare della frequenza,  $A(s)$ , presentante un polo:

$$A(s) = \frac{A_{DC}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

In questo ambito,  $\omega_p = 2\pi f_p$  è la frequenza del polo della funzione  $A(s)$ .

Dalla teoria della reazione, precedentemente introdotta, sappiamo che:

$$A_F = \frac{u}{i} = \frac{A}{1 + \beta A}$$

Dal momento che  $A$  non è costante, ma è una funzione della frequenza (espressa come variabile complessa  $s$  nel dominio di Laplace):

$$A_F(s) = \frac{\frac{A_{DC}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}}{1 + \beta \frac{A_{DC}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}}$$

La frequenza del nuovo polo si otterrà semplicemente annullando il denominatore; ordiniamo un po' l'espressione, e quindi annulliamo il denominatore:

$$\implies A_F(s) = \frac{A_{DC}}{1 + \frac{s}{\omega_p} + A_{DC}\beta} \implies \frac{A_{DC}}{1 + \beta A_{DC}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p(1 + \beta A_{DC})}}$$

Dal momento che  $\beta A \gg 1$ ,  $\omega_p(1 + \beta A_{DC}) \gg \omega_p$ , e quindi la pulsazione del polo sarà aumentata, e con essa la frequenza di taglio del sistema di amplificazione.

Alcune note: tutto ciò che abbiamo detto è valido per sistemi a un polo, ossia per controeazioni coinvolgenti un solo polo, poichè con due poli tutto diventa estremamente complesso; altra ipotesi che si deve verificare affinché sia vero ciò che abbiamo appena detto, è che  $f_p$  (o  $\omega_p$ ) siano positive: se fossero negative, avremmo poli positivi, e quindi legati a reti instabili.

4. Le impedenze di ingresso e di uscita vengono modificate dalla controeazione, di un fattore circa uguale a  $A\beta$ ; questo ci permette di modificare le impedenze in ingresso ed in uscita degli amplificatori, a seconda delle nostre necessità. Quando abbiamo detto, parlando di un'introduzione all'amplificazione, che non importava realizzare con un unico stadio un amplificatore, ci si riferiva anche a ciò: introducendo una controeazione è possibile aumentare o diminuire le impedenze a seconda dei nostri desideri. Questo punto verrà ridiscusso in seguito.
5. La controeazione è in grado di ridurre notevolmente alcuni tipi di rumore.

In elettronica, si utilizza solitamente una notazione diversa, ed un modello più completo di quello che abbiamo ricavato dallo schema a blocchi (che invece in controllistica risulta essere un modello ottimale):

$$A_F = A_\infty \cdot \frac{T}{1 + T} + A_0 \cdot \frac{1}{1 + T}$$

Dove  $T = A\beta$ ,  $A_\infty$  è il guadagno dell'amplificatore controeazionato considerando  $A \rightarrow \infty$ , e dunque  $g_m \rightarrow \infty$ , e  $A_0$  il guadagno ottenuto quando

$A \rightarrow 0$ , e quindi  $g_m \rightarrow 0$ . Si noti che in questo ambito, nel calcolo dei parametri appena citati, i parametri di segnale quali  $r_\pi$  vengono mantenuti inalterati nel circuito; questa formula è in grado di tenere conto della reciprocità (o meno) del circuito.

### 7.1.1 Reazione positiva / Reazione negativa (Controreazione)

Esistono sostanzialmente due tipi di reazione: le reazioni in grado di sommare all'ingresso  $i$  il segnale di feedback  $f$ , ossia le reazioni positive, o il segnale in grado di sottrarre all'ingresso  $i$  il segnale di feedback  $f$ , ossia le controreazioni. In ambito di circuiti elettronici, studieremo prevalentemente controreazioni (anche se troveremo senz'altro almeno un caso di feedback positivo).

Determinare il segno di una reazione, ossia determinare se il segnale si va ad aggiungere al segnale in ingresso (continuando ad amplificare in maniera sempre più elevata), o a sottrarre (controllando l'uscita e stabilizzandola ad un certo punto di lavoro), non è difficilissimo in ambito di circuiti a stadi di amplificazione.

Ciò che è sufficiente fare, sostanzialmente, è individuare per quali tipi di stadi di amplificazione passa l'anello di reazione: sappiamo, dalla teoria degli stadi di amplificazione, che il common emitter è in grado di ribaltare il segnale, il common collector ed il common base no; in questo modo, se avremo solo un ribaltamento di segno del segnale, saremo sicuri di avere una reazione negativa e quindi che si va a sottrarre al segnale di ingresso. Un amplificatore costituito da un common emitter ed un common collector ad esempio ha una controreazione; un amplificatore costituito da due common emitter ribalta due volte il segnale, provocando dunque in uscita una reazione positiva.

Consideriamo per esempio la figura 7.2.

Supponiamo di introdurre, in un certo punto dell'anello da noi scelto, un segnale diretto con convenzione verso l'alto; il primo stadio, emettitore comune, invertirà il segnale, che avrà ora una convenzione verso il basso. Lo stadio successivo è di nuovo un emettitore comune, che ri-inverte il segnale, riportando la convenzione verso l'alto. Il successivo stadio a collettore comune non modifica la fase del segnale, esattamente come il partitore resistivo.

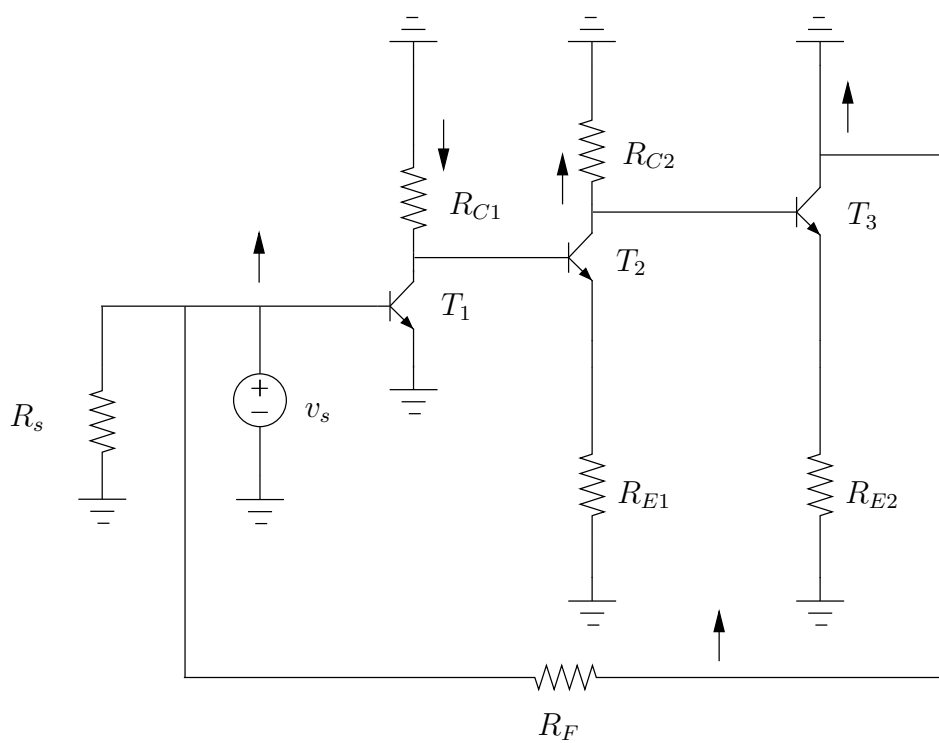


Figura 7.2: Circuito con retroazione nel quale le frecce indicano se il segnale ha lo stesso segno di quello in ingresso oppure è invertito.

## 7.2 Resistenze in ingresso/uscita di un amplificatore controreazionato

Come abbiamo già visto parlando degli effetti della controreazione sugli amplificatori, la controreazione è in grado di modificare la resistenza in ingresso e in uscita di un amplificatore costituito da un certo numero di stadi chiusi in un anello di controreazione. Analizziamo dunque mediante uno schema semplificato un modello di amplificatore, al fine di determinare l'effetto della reazione sulle impedenze.

Vedremo che esistono sostanzialmente quattro tipi di retroazione, classificandole in base a come viene 'preso' il segnale dall'uscita, e da come viene 'confrontato', ossia reinserito, nell'ingresso. Dal momento che entrambe le operazioni si possono effettuare sia in serie che in parallelo, ossia prelevando il segnale o introducendolo sullo stesso nodo (in parallelo) rispettivamente di uscita e ingresso, o prelevandolo da un'altra maglia, in serie al carico (serie). Il fatto di effettuare prelievo/confronto in serie/parallelo avrà delle notevoli ripercussioni, che ora quantificheremo, sull'uscita.

Consideriamo il blocco  $\beta$  idealizzato, con impedenza infinita in ingresso, e in uscita un generatore pilotato di tensione. Colleghiamo  $A$  e  $\beta$  in serie all'ingresso (come in un nodo sommatore), ed in parallelo al carico (in uscita):

Per calcolare la resistenza in uscita dal blocco  $A$ , controreazionato, vediamo il carico in tensione ed in corrente sulla  $R_{out}$ ; consideriamo dunque un generatore di tensione di prova  $v_t$  sui morsetti di uscita di  $A$ ; la corrente che uscirà da questo generatore di tensione  $v_t$  sarà:

$$i_t = \frac{v_t - (-A\beta v_t)}{R_{out}}$$

Da qua, si può vedere che:

$$\implies \frac{v_t}{i_t} = R_{O,F} = \frac{R_{out}}{1 + A\beta}$$

Cosa abbiamo dunque scoperto? Collegando in parallelo il blocco  $\beta$ , per merito della controreazione, siamo riusciti a ridurre l'impedenza in uscita dell'amplificatore, normalizzandola per un fattore  $A\beta$ , che per ipotesi consideriamo molto elevato.

Facciamo ora una cosa del tutto analoga, per quanto riguarda la resistenza di ingresso, collegando in serie il blocco  $\beta$  di retroazione (anzichè in parallelo); introduciamo il generatore di tensione  $v_t$  ora all'ingresso:

In questo modo, otterremo che la corrente in uscita dal generatore di tensione di test sarà:

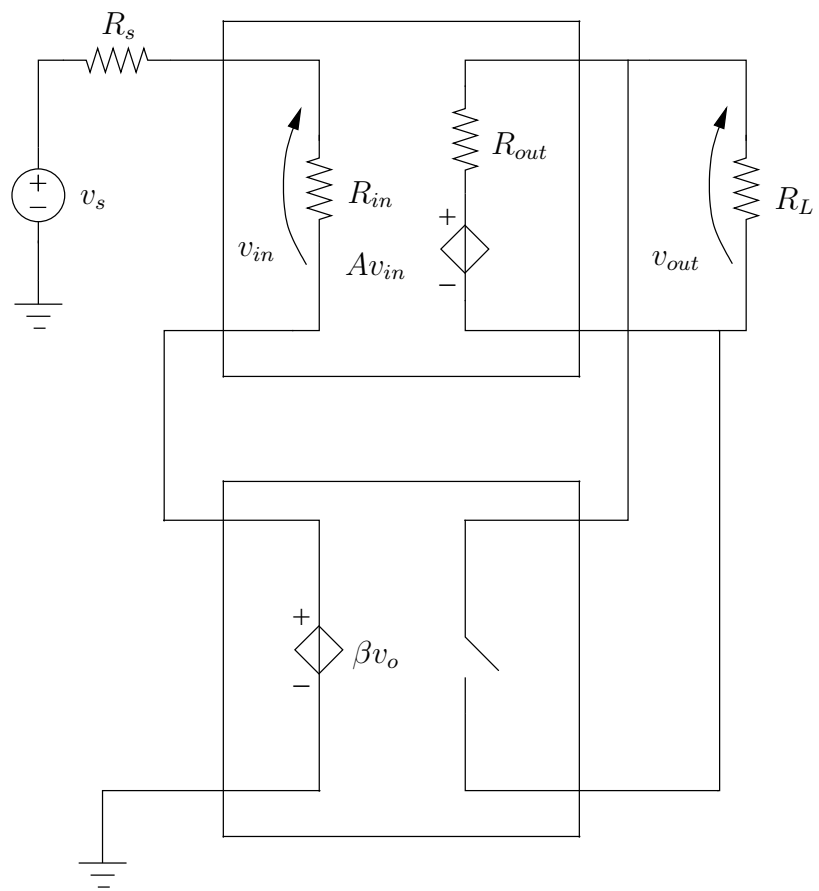


Figura 7.3: Retroazione *serie-parallelo* (confronto-prelievo).

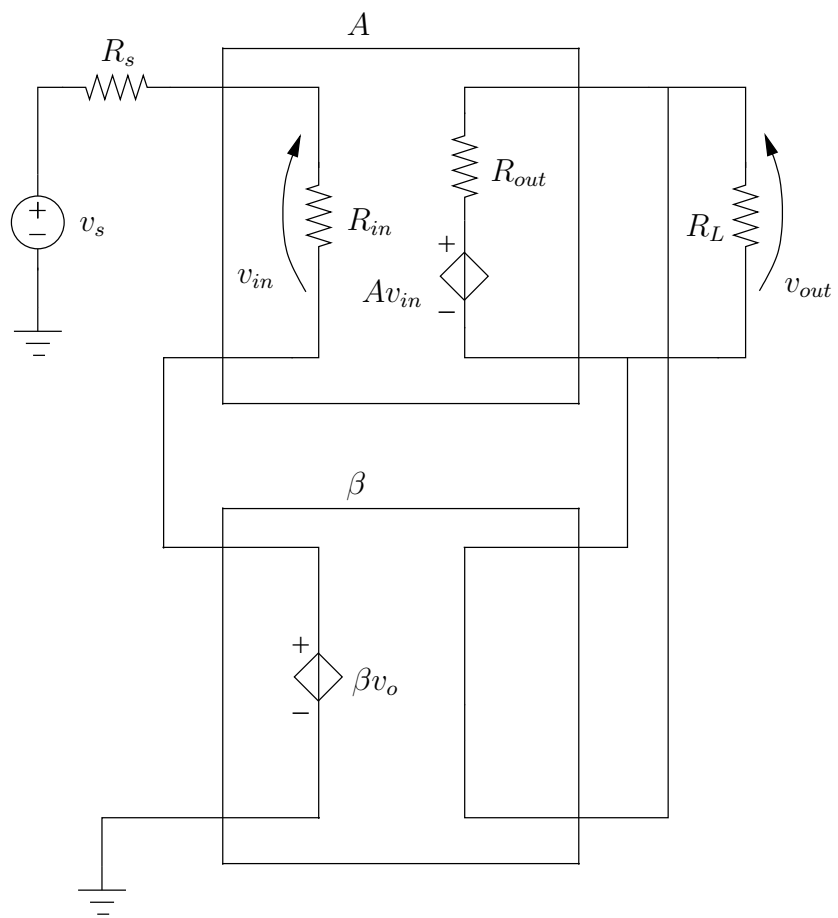


Figura 7.4: Retroazione *serie-serie* (confronto-prelievo).



$$i_t = \frac{v_{in}}{R_{in}} = \frac{v_t - \beta v_o}{R_{in}}$$

Avremo che:

$$v_o = (v_t - \beta v_o)A \implies v_o + A\beta v_o = Av_t \implies v_o(1 + A\beta) = Av_t$$

$$\implies v_o = \frac{A}{1 + \beta A} v_t$$

Dunque:

$$i_t = \frac{v_t - \beta v_o}{R_{in}} = \frac{v_t - \frac{\beta A}{1 + \beta A} \cdot v_t}{R_{in}}$$

Da qua, finalmente:

$$\frac{i_t}{v_t} = \frac{1}{R_{in}(1 + \beta A)}$$

$$R_{I,F} = \frac{1}{\frac{i_t}{v_t}} = R_{in}(1 + \beta A)$$

Ossia, in serie, si ottiene un'amplificazione pari a  $A\beta$  volte l'ingresso. Ciò che si ottiene, dunque è la possibilità di alzare notevolmente l'impedenza di ingresso (che ricordiamo essere stato messo in serie con il blocco di controreazione  $\beta$ ).

Riassumendo, è possibile effettuare prelievi di segnale e di corrente in serie (se non si coinvolge direttamente l'uscita, cioè se la retroazione coinvolge un'altra maglia), o in parallelo (se si preleva l'uscita o confronta l'ingresso sullo stesso nodo di uscita/ingresso). Spesso, capire se un circuito ha retroazione in serie o in parallelo è solo il primo di una lunga serie di problemi, che può nascere affrontando in modo classico il problema dell'analisi dei circuiti retroazionati.

Promemoria semplice per ricordare il comportamento delle resistenze in ingresso/uscita a seconda del tipo di retroazione dunque può essere il seguente:

- Una retroazione con prelievo/confronto in serie amplifica la resistenza rispettivamente di uscita/ingresso di un fattore vicino a  $\beta A$ ;
- Una retroazione con prelievo/confronto in parallelo attenua la resistenza rispettivamente di uscita/ingresso di un fattore prossimo a  $\beta A$ .

Queste considerazioni sono molto utili, poichè ci permettono di confrontare i risultati ottenuti mediante l'applicazione di uno dei sistemi di analisi di circuiti retroazionati, in modo assolutamente qualitativo, ma comunque utile ai fini di renderci quantomeno conto degli ordini di grandezza assumibili dalle resistenze.

Il modo classico non è il più astuto, in questo caso, per affrontare lo studio di un circuito di tipo retroazionato: l'idea dietro esso sarebbe infatti quella di suddividere, in qualche modo, i blocchi  $A$  e  $\beta$ ; potremmo farci però ingannare dal fatto che  $A$  sia l'insieme di stadi di amplificazione, e  $\beta$  l'impedenza di feedback; ciò non è assolutamente vero: l'operazione di suddivisione dei due blocchi è molto più complicata di quel che si possa pensare, e dunque non verrà affrontata in questa trattazione.

Tornando al discorso sul prelievo/confronto, schematizziamo brevemente:

- Prelievo in parallelo è in tensione;
- Prelievo in serie è in corrente;
- Confronto in parallelo è in corrente;
- Confronto in tensione è in serie.

Metodo intelligente per essere (abbastanza) sicuri sul tipo di controreazione, è il seguente: consideriamo l'uscita  $v_o$  calcolata su di un certo carico; allora:

- Se cortocircuitando a 0 V il carico non scorrerà più corrente nel blocco di feedback, e quindi non si avrà più controreazione, allora essa sarà con prelievo in parallelo;
- Se aprendo il carico, ossia sostituendolo con un circuito aperto, non scorrerà più corrente nel blocco di feedback, e non si avrà più controreazione, allora essa sarà con prelievo in serie.

Questo metodo è sicuramente utile, ma presenta alcune pecche:

- Non ne esiste un duale per quanto riguarda il confronto;
- Di fatto potrebbe capitare che nessuno dei due metodi blocchi il flusso del segnale di retroazione; in tal caso la retroazione è mista, ed è più difficile fare considerazioni di vario genere.

## 7.3 Metodo di Rosenstark

Tutte le disquisizioni teoriche finora affrontate non sono in realtà molto utili: al fine di risolvere circuiti retroazionati, sono state congegnate tecniche di vario tipo, come ad esempio il metodo di Rosenstark. Si tratta di un metodo non semplicissimo da applicare (rispetto ad altri), ma che ha alcuni pregi, quali il fatto di essere universale, ed il fatto di essere algoritmico, ossia il grado di fornire un percorso ben preciso da seguire, al fine dello studio del circuito retroazionato.

Sostanzialmente, il metodo di Rosenstark si basa sul determinare tre parametri: il guadagno di anello  $T$ , il guadagno dell'amplificatore con  $g_m \rightarrow +\infty$ ,  $A_\infty$ , e il guadagno a transistoro spento (ossia con  $\beta = 0$ , ma i parametri di segnale presenti nel circuito):  $A_0$ .

### 7.3.1 Calcolo del guadagno di anello $T$

Il parametro  $T$  si può calcolare rispetto ad un componente qualsiasi, anche se solitamente converrebbe valutarlo rispetto ad un generatore pilotato nell'anello, meglio ancora se grounded, ossia il cui emettitore è collegato a 0 V; se si dispone di un generatore non collegato a 0 V, è possibile sfruttare le nostre conoscenze sulle impedenze di ingresso, effettuando una correzione del termine  $h_{ie} = r_\pi + r_{bb'}$ , di questo tipo:

$$h'_{ie} = r_\pi + r_{bb'} + (\beta + 1)R_E$$

In questo modo, modificando il parametro  $h_{ie}$  del transistoro, è possibile modellarlo come grounded.

Una volta scelto il generatore, ed eventualmente effettuato questo piccolo trucco, bisognerà semplicemente effettuare i seguenti step:

1. Si sostituisce al transistoro scelto il suo modello di piccolo segnale, e si rimuove temporaneamente il generatore pilotato  $\hat{i}_T$
2. Si sostituisce al generatore dipendente appena accantonato (temporaneamente) un generatore indipendente  $i_T$ , ossia un generatore di corrente di test;
3. Si calcola  $\hat{i}_T$  eccitata da  $i_T$ , ossia si calcola il pilota, dati tutti gli altri generatori indipendenti spenti, cercando di calcolare la corrente di base del transistoro scelto come base dell'applicazione del metodo;
4. Il guadagno di anello  $T$  sarà dato da:

$$T = -\frac{\hat{i}_T}{i_T}$$

### 7.3.2 Calcolo del guadagno $A_\infty$

Il parametro  $A_\infty$  è il guadagno che lo stadio presenterebbe se si comportasse come un amplificatore operazionale ideale: considerando di avere  $g_m \rightarrow \infty$  (come in un operazionale), allora il pilota dovrebbe essere prossimo a 0 ( $v_{be} \simeq 0$ ), e quindi, a partire da qua, si calcolerà questo guadagno, come:

$$A_\infty = \left. \frac{v_u}{v_i} \right|_{g_m \rightarrow \infty}$$

Se il guadagno dello stadio fosse come quello di un operazionale, avremmo pilota circa nullo (quindi per noi nullo, approssimando senza troppo errore), ma comunque una corrente di collettore esistente. Ciò che in sostanza capita è che l'annullamento del pilota, come si può osservare dal circuito, farà annullare anche altre grandezze, altre correnti, quindi, trovando alcune simmetrie sulle correnti/tensioni, riuscendo a relazionare ad esempio la tensione di uscita con quella di ingresso, si può ottenere facilmente questo tipo di guadagno.

### 7.3.3 Calcolo del guadagno $A_0$

Il parametro  $A_0$  rappresenta semplicemente il guadagno quando  $g_m \rightarrow 0$ , dove ovviamente  $g_m$  è il guadagno dello stadio con cui abbiamo calcolato i precedenti parametri; in questo modo, semplicemente, dobbiamo considerare svolto come prima il modello di piccolo segnale, ma dobbiamo considerare spento il generatore pilotato precedentemente considerato (derivante dal modello di segnale). Essendo il generatore pilotato di corrente, al suo posto avremo semplicemente un circuito aperto.

Ciò che verrà dunque semplicemente annullato è il  $\beta$ , o  $h_{FE}$  (volendo usare i tradizionali parametri ibridi, in questa trattazione non utilizzati di solito); tutti i parametri di segnale, precedentemente calcolati in ambito di polarizzazione, saranno comunque presenti nel circuito, ed andranno presi in considerazione al fine del calcolo del guadagno finale  $A_0$ .

## 7.4 Relazione di Blackman

Esiste una sorta di seguito, per quanto riguarda il metodo di Rosenstark: questo procedimento algoritmico ci permette infatti di determinare i guadag-

ni di qualsiasi transistori, sfruttando la formula asintotica precedentemente presentata; esiste una sorta di seguito per l'appunto di Rosenstark, che, riciclando (molto spesso) i parametri calcolati per il guadagno (nella fatispécie il guadagno di anello  $T$ ) permette di calcolare le impedenze viste da un certo terminale di un amplificatore controeazionato.

Nella fatispécie, la relazione di Blackman, afferma che:

$$Z_{i,F} = Z_{i,D} \cdot \frac{1 + T_{SC}}{1 + T_{OC}}$$

Data una qualsiasi  $i$ -esima impedenza vista da un terminale di un circuito controeazionato (impedenze di ingresso, piuttosto che di uscita, piuttosto che viste da un qualsiasi nodo del circuito, cosa che può per esempio tornare molto utile per il calcolo delle impedenze viste da un condensatore in ambito di studio della risposta in frequenza dell'amplificatore retroazionato), prima di tutto si calcola la  $Z_{i,D}$ : essa è l'impedenza vista dai morsetti, calcolata 'ad occhio': si considera 'morto' (D sta per Dead) il transistor, quindi sono presenti le impedenze, ma non effetti ulteriori derivanti dal circuito retroazionato; ovviamente questo termine non è sufficiente, dal momento che ha bisogno di una correzione, derivante dai due guadagni di anello  $T_{SC}$  e  $T_{OC}$  (SC sta per Short Circuit, OC sta per Open Circuit, e quindi corto circuito e circuito aperto): prima di tutto si cortocircuita a 0 V il terminale dal quale calcoliamo l'impedenza, dopo di che si calcola il guadagno di anello del circuito. Come per il metodo di Rosenstark, il guadagno di anello è indipendente dal punto o dall'elemento dell'anello di retroazione a partire dal quale si calcola, quindi spesso (non sempre!) si potranno per l'appunto riciclare guadagni di anello già calcolati per esempio studiando mediante Rosenstark i guadagni del circuito retroazionato.  $T_{OC}$  semplicemente è il guadagno di anello, calcolato aprendo il corto circuito appena introdotto.

Questo tipo di considerazione è molto comodo ad esempio per quanto riguarda il caso di impedenze viste da un condensatore in punti particolari: potrebbe capitare di aver calcolato già i guadagni di anello, consideranti una certa resistenza oscurata o meno dall'apertura/chiusura di un condensatore; i guadagni di anello, tendenzialmente, potrebbero risultare simili o identici. Anche per quanto riguarda il calcolo di impedenze di uscita o ingresso potrebbero esserci operazioni molto scaltre da compiere: se si fa in modo di introdurre il corto circuito prima dell'anello di retroazione, si riesce ad annullare uno dei due guadagni di anello (risparmiandosi conti che potrebbero essere tediosi).

Il metodo di Rosenstark ha un pregio ed un difetto: il pregio è la sua universalità, ossia è il fatto che è assolutamente utilizzabile con circuiti dotati di retroazione di qualsiasi genere. Il suo difetto è quello di non essere il metodo

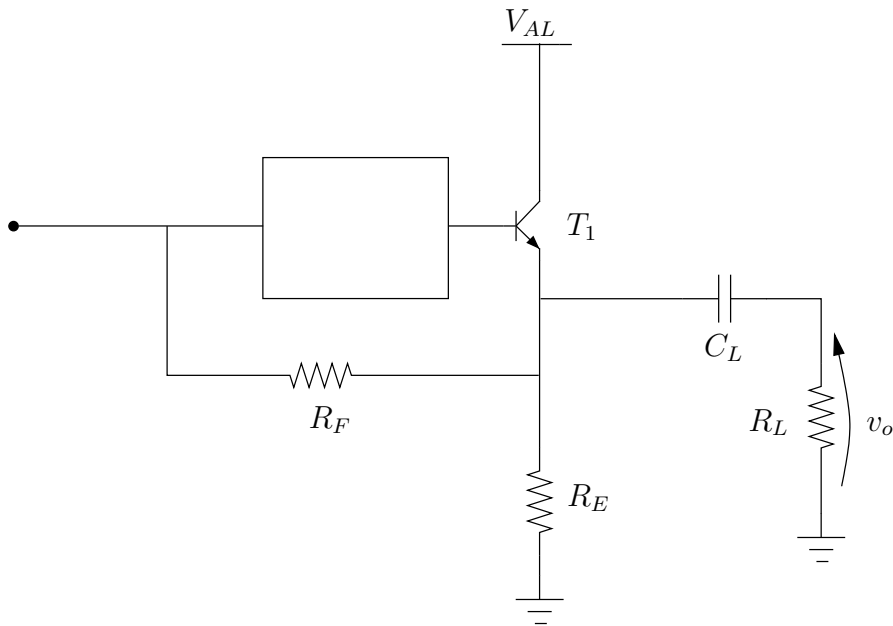


Figura 7.5: Circuito di esempio.

più semplice utilizzabile, in ambito dello studio di circuiti controreazionati. Presentiamo quindi ancora un paio di metodi, ed una 'tavola di utilizzo', esprimente il campo di validità di ciascun metodo.

## 7.5 Teorema di Norton

Consideriamo un circuito con una topologia come nella figura 7.5 oppure come in figura 7.6.

Cosa converrebbe fare, non volendo utilizzare Rosenstark, in un circuito di questo genere? Un'idea, è quella di utilizzare una sorta di generalizzazione di un famosissimo teorema di Elettrotecnica: il teorema di Norton.

Consideriamo la prima delle topologie: ciò che si può fare, è calcolare tutto ciò che sta prima di  $C_L$ , e solo dopo aggiungere il condensatore! (in modo da escludere il carico dal calcolo: ricordiamo che gli ingegneri possono lavorare solo e soltanto sul blocco amplificatore, non sul blocco sorgente e sul blocco carico).

Ricordiamo che il teorema di Norton consiste nel calcolo di due parametri, ossia la corrente equivalente  $i$ , e l'impedenza equivalente  $Z_u$ . Vediamo come calcolare questi due parametri, in ambito di circuiti con prelievo in tensione (come quelli della topologia precedentemente disegnata):

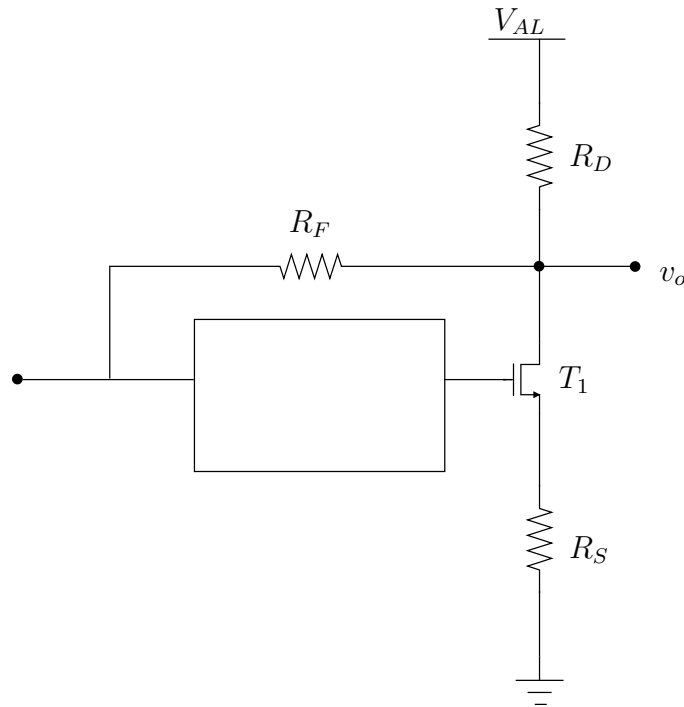


Figura 7.6: Un altro circuito di esempio.

- Per quanto riguarda  $i$ , è sufficiente cortocircuitare il nodo di prelievo a 0 V: dal momento che il prelievo è in tensione, si avrà un nodo di prelievo, e dunque, cortocircuitandolo a 0 V, non scorrerà più corrente nella retroazione, e così si avrà un normalissimo circuito non retroazionato! Il calcolo della corrente di corto circuito, ossia della corrente che scorre sul corto circuito da noi introdotto, sarà banale.
- Per quanto riguarda  $Z_u$ , dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti, ed introdurre sull'uscita un generatore di tensione al posto del corto circuito; si calcola dunque la corrente in uscita dal generatore, e si calcola  $Z_u$  semplicemente come:

$$Z_u = \frac{V_p}{I_p}$$

Il campo di validità del teorema di Norton sarà dunque banalmente quello dei circuiti con retroazione con prelievo in parallelo, ossia in tensione (ossia da un nodo): dal momento che si preleva da un nodo, è così possibile effettuare i nostri trucchi, cortocircuitando il nodo a 0 V, o collegandovi il generatore

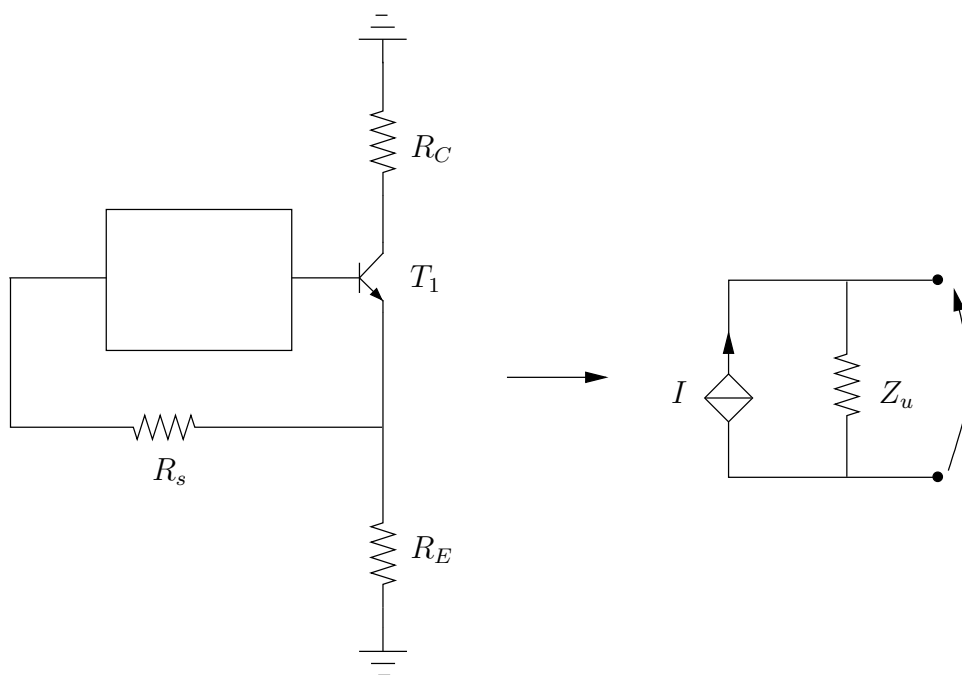


Figura 7.7: Applicazione del teorema di Norton.

di tensione; ovviamente, il confronto non riguarda questo tipo di metodo, quindi potrà essere qualsiasi.

Ora presentati i disegni schematizzanti il procedimento appena descritto nelle due figure 7.8 e 7.9.

## 7.6 Teorema di Miller

Abbiamo già analizzato il teorema di Miller, parlando di modello di Giacoleto; in realtà esso non serve, ovviamente, esclusivamente per il calcolo di poli ad elevata frequenza: possiamo tranquillamente utilizzarlo anche per quanto riguarda circuiti con confronto in corrente. Avendo ad esempio un circuito di questo genere:

Si può utilizzare il teorema di Miller sull'impedenza di feedback, e quindi ricondurre l'analisi di un circuito retroazionato al calcolo di un circuito non retroazionato, e quindi solo dopo aggiungervi il contributo. Il teorema di Miller si può utilizzare non solo per ricavare il guadagno retroazionato, ma anche per il calcolo dell'impedenza di ingresso dell'amplificatore.

Ciò che non si può fare (quantomeno molto spesso) è il calcolo dell'impedenza di uscita: se il nodo di uscita dell'amplificatore coinvolge l'impedenza



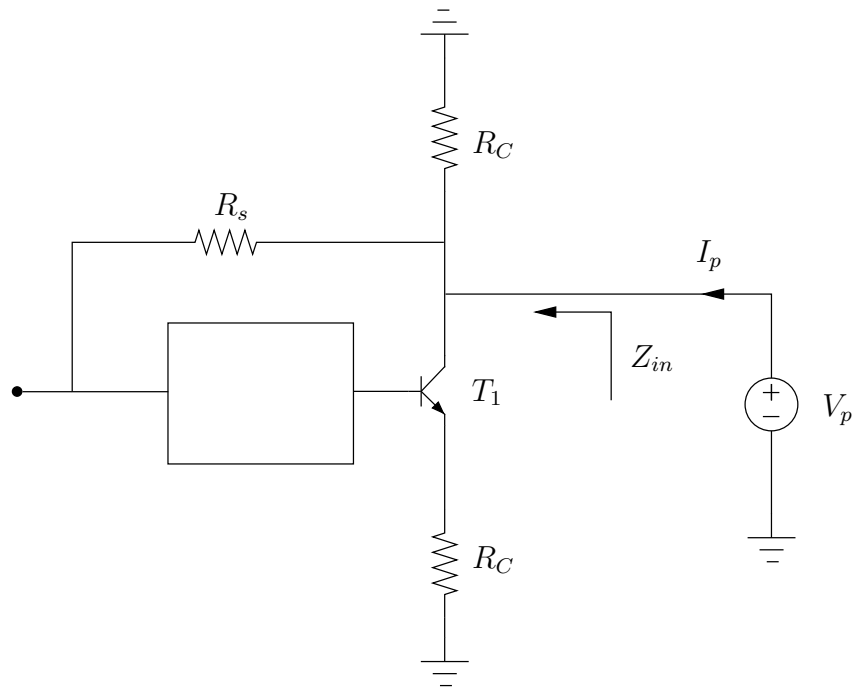


Figura 7.8: Calcolo dell'impedenza equivalente.

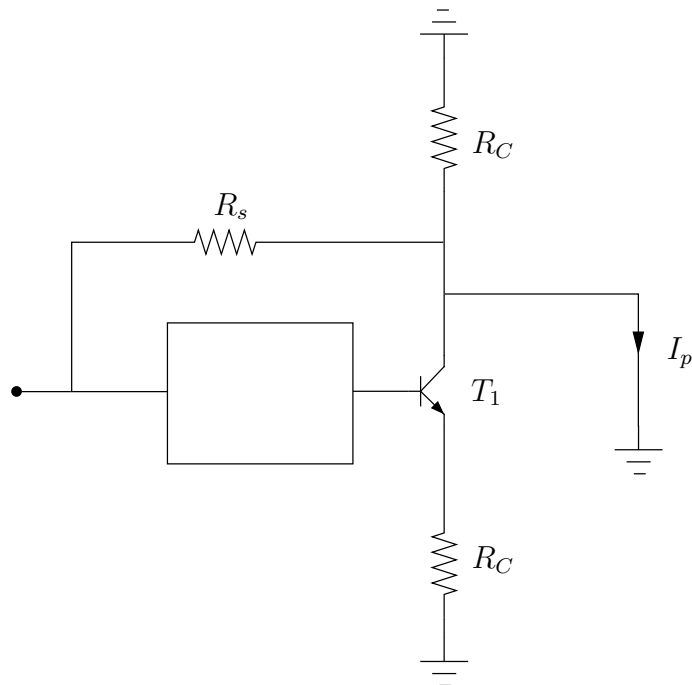


Figura 7.9: Calcolo della corrente di corto circuito.

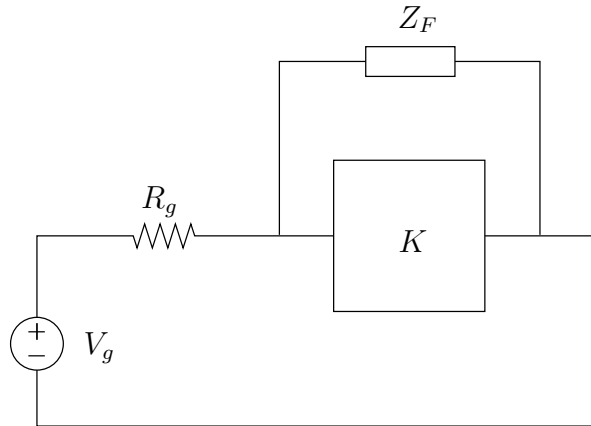


Figura 7.10: Circuito su cui applicare il teorema di Miller.

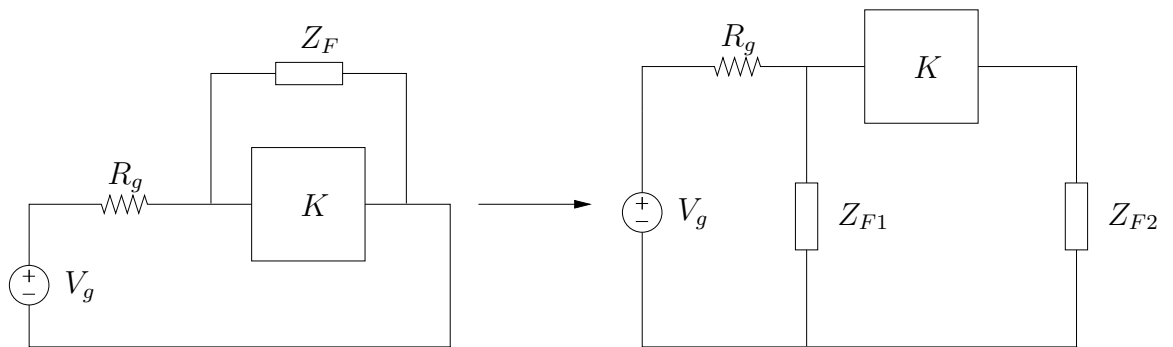


Figura 7.11: Applicazione del teorema di Miller.

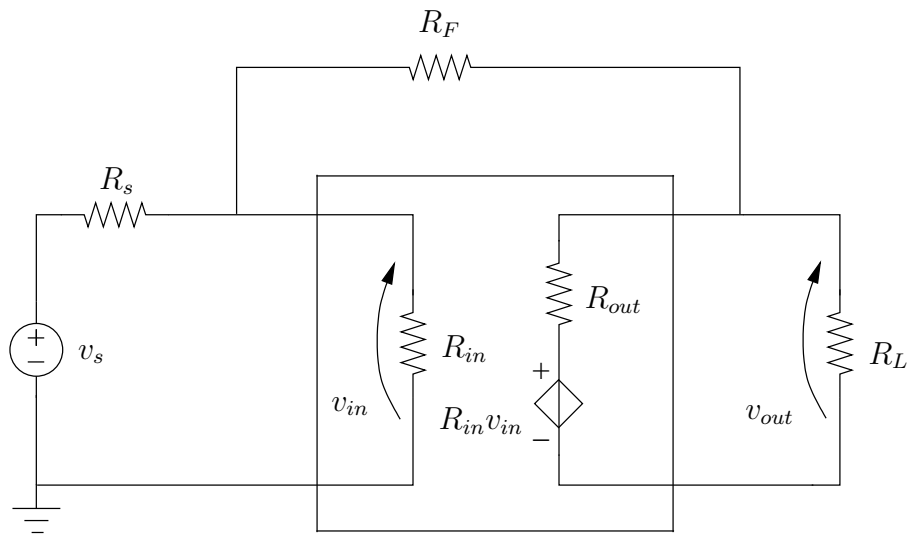


Figura 7.12: Circuito al quale applicare il *thévenone*.

di retroazione, non è possibile effettuare un calcolo di impedenza con questo sistema.

## 7.7 Teorema di Thevenin Generalizzato

Esiste una sorta di generalizzazione del teorema di Thevenin, una sorta di 'Thevenone': esso si può utilizzare in un unico caso, ossia prelievo in tensione, confronto in corrente.

Il Thevenone si può riassumere nei seguenti step: dato un circuito con una topologia come in figura 7.12.

1. Si toglie temporaneamente la resistenza di retroazione, ottenendo un circuito senza anelli di retroazione, ma quindi un unico percorso; si calcola di questo il guadagno, mediante rapporto uscita/ingresso, impedenze di ingresso, ed impedenze di uscita, ad occhio.
2. Una volta trovato il circuito equivalente di questo blocco, si re-introduce l'impedenza di feedback  $R_F$ , e mediante metodi circuitali quali il metodo dei nodi (o volendo Miller) si utilizza il guadagno precedentemente calcolato per calcolare il guadagno retroazionato.

## 7.8 Conclusioni

Per quanto riguarda l'analisi di circuiti retroazionati, sono stati presentati alcuni metodi, utilizzabili ciascuno in un certo campo di validità. Il campo di validità riguarda il tipo di prelievo e di confronto della retroazione: a seconda che essi siano serie o parallelo, alcuni metodi saranno utilizzabili, altri no.

Qua presentata è una tabella, racchiudente l'insieme dei metodi utilizzabili in un loro campo di validità.

Tabella 7.1:

| Prelievo | Confronto | Metodi                                      |
|----------|-----------|---|
| V        | V         | Nodi, Rosenstark, Norton                    |
| V        | I         | Nodi, Rosenstark, Norton, Miller, Thevenone |
| I        | V         | Nodi, Rosenstark                            |
| I        | I         | Nodi, Rosenstark, Miller                    |

L'obiettivo dei metodi finora proposti è semplicemente quello di calcolare  $A_F(s)$ , ossia una funzione al variare della frequenza  $s$  del guadagno del circuito con feedback, ossia:

$$A_F(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)}$$

Altri parametri da calcolare, saranno  $Z_{in}$  e  $Z_{out}$  del blocco di amplificazione. Sfruttando in modo idoneo e nel loro campo di validità i metodi proposti, si ha una certa scelta di sistemi. Unici consigli ancora da dare, possono essere i seguenti:

1. Se un transistor serve solo per stabilizzare la polarizzazione del circuito, allora va considerato solo in ambito di polarizzazione; in ambito di segnale, esso si potrà tranquillamente ignorare.
2. Due stadi di amplificazione distinti, ai fini di semplificare le espressioni andrebbero considerati separatamente.
3. Se proprio non si sa cosa fare, quali metodi scegliere (anche se Rosenstark in realtà è sempre valido), utilizzare metodi di Elettrotecnica quali metodi circuitali di vario tipo, o il metodo dei nodi.

## 7.9 Circuito di Bootstrap

Finora abbiamo parlato solo ed esclusivamente di retroazioni negative: l'amplificatore a feedback negativo, infatti, presenta tutte le proprietà merav-

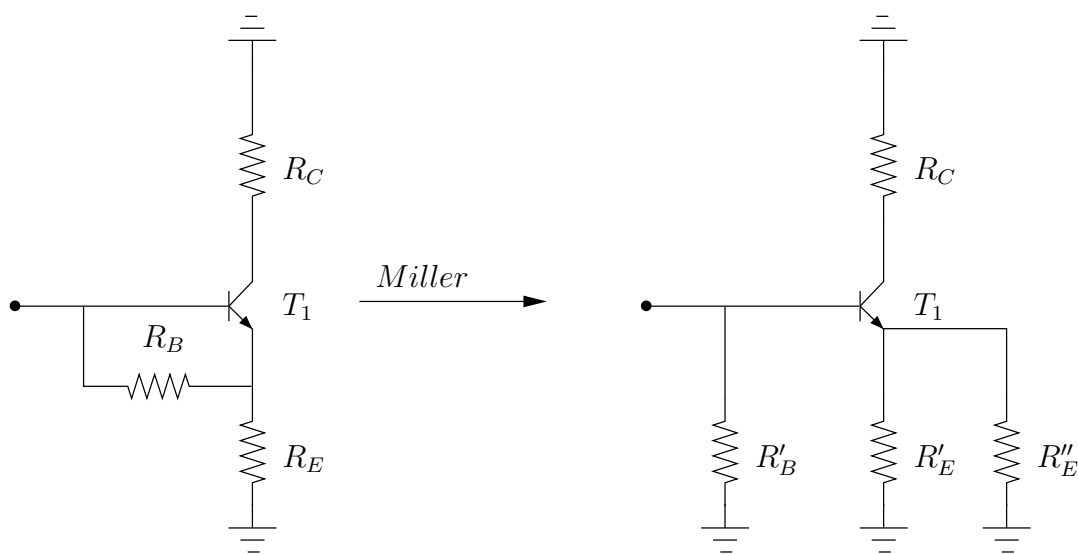


Figura 7.13: Circuito di *bootstrap*.

igliose precedentemente introdotte; esistono tuttavia alcuni casi in cui può tornare utile, in un circuito, introdurre un feedback positivo.

Il circuito di bootstrap può avere questo compito: come suggerisce il nome (utilizzato molto spesso anche in ambito informatico), uno dei suoi scopi è quello di dare l'accensione ad un circuito. In realtà, ciò che capita, è che il bootstrap introduce una notevole amplificazione dell'impedenza di ingresso di un sistema alimentatore. Ciò si può dimostrare semplicemente utilizzando il Teorema di Miller per le tensioni: infatti, ciò che capita è il fatto che si ha uno stadio (quello di bootstrap) a collettore comune. Ciò comporta da una parte il feedback positivo, ma dall'altra un guadagno inferiore ad 1. In questo modo, applicando semplicemente le relazioni di Miller Tensioni, con  $K < 1$ , si vede che si ha un aumento della resistenza di ingresso.

Ricordando dunque:

$$Z' = Z \frac{1}{1 - K}$$

$$Z'' = Z \frac{K}{K - 1}$$

In questo modo, si può osservare, facendo i conti, un aumento dell'impedenza di ingresso del circuito.

# Capitolo 8

## Configurazioni Multi-Transistore

Abbiamo presentato un certo numero di aspetti teorici e pratici riguardanti l'analisi di circuiti con transistori di tipo BJT e MOSFET, abbiamo parlato di stadi di amplificazione, e di circuiti retroazionati.

Sfruttiamo queste conoscenze, al fine di introdurre alcuni dei circuiti più utilizzati in pratica, per determinate richieste.

### 8.1 Configurazione Cascode

Vediamo che la Configurazione Cascode è composta da due stadi: il primo è un source comune (poichè l'uscita utile esce dal drain, e l'ingresso di segnale è sul gate). L'idea alla base del cascode è quella di unire la resistenza in ingresso elevata di uno stadio common source (o emitter) con l'alta impedenza di ingresso di uno stadio common gate, ottenendo un buon guadagno in tensione, ed effetti interessanti sotto altri punti di vista.

#### 8.1.1 Guadagno in Tensione

Analizziamo questa configurazione, trattando i due stadi separatamente, per poi unificare i risultati: per quanti riguarda il primo stadio, vediamo che abbiamo in ingresso sullo stadio 1 (common source) un segnale  $v_i$ ; esso sarà il pilota del generatore pilotato tra drain e source del primo stadio, che imporrà una corrente pari a  $-g_{m,1}v_i$ . Sarà semplice calcolare il guadagno in tensione del primo stadio, usando la legge di Ohm: sul resistore  $r_{o,1}$  scorre la corrente del pilotato, e dunque:

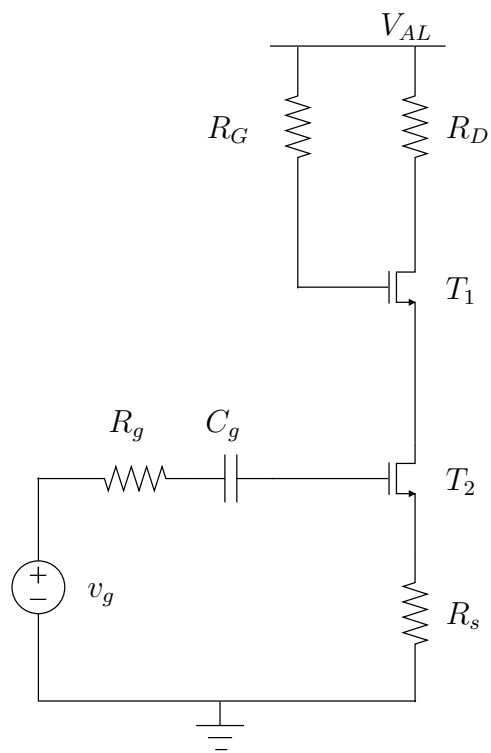


Figura 8.1: Circuito *Cascode*.

$$v_{o,1} = -g_{m,1}r_{o,1}v_i = A_1v_i$$

Quindi:

$$\frac{v_{o,1}}{v_i} = -A_1$$

Consideriamo il secondo stadio, a partire dalle informazioni che abbiamo già ricavato dal primo. In ingresso al source del secondo transistoro, configurato come common gate, vi è una resistenza  $R_{in,2}$  pari a:

$$R_{in,2} = \frac{1}{g_{m,2}} + \frac{R_L}{A_{vo,2}}$$

In questo ambito,  $A_{vo,2}$  è:

$$A_2 = 1 + g_{m,2}r_{o,2}$$

$$R_{out} = r_{o,2} + A_2r_{o,1}$$

Sostituendo  $A_2$ , ed eliminando il +1 in quanto trascurabile:

$$R_{out} \simeq g_{m,2}r_{o,2}r_{o,1}$$

Abbiamo dunque che:

$$v_o = A_2v_{o,1}$$

Sostituendo, e considerando direttamente  $A_v$ :

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -A_1A_2$$

Molto spesso, capita che i due transistori utilizzati per la realizzazione degli stadi siano identici in tutto e per tutto. Essendo identici, anche l'effetto di modulazione del canale, e il parametro  $g_m$ , saranno uguali, e dunque:

$$A_0 = A_1 = A_2$$

$$A_v = -A_0^2 = -(g_m r_o)^2$$

Ciò che abbiamo finora dimostrato, è il fatto che la configurazione Cascode riesce ad ottenere il quadrato del guadagno in tensione di un semplice stadio a common source.



### 8.1.2 Risposta in Frequenza

Abbiamo parlato del guadagno in tensione del cascode, ma non abbiamo ancora parlato di una cosa interessante: sappiamo che il common source non è ottimo, sotto il punto di vista della risposta in frequenza, in quanto l'effetto Miller tende ad esaltare le capacità parassite del transistor, abbassando la frequenza del polo. L'altro stadio, il common gate, come già commentato, è eccellente sotto il punto di vista del comportamento in frequenza. Magari potremmo aspettarci il fatto che, assieme, si riesca ad ottenere uno stadio con l'ultimo polo a frequenze elevate.

Vediamo che abbiamo, per i transistori  $T_1$  e  $T_2$ , le capacità rispettivamente  $C_{\pi,1}$ ,  $C_{\mu,1}$ ,  $C_{\pi,2}$ ,  $C_{\mu,2}$ . Cosa interessante è il fatto che tutte siano separate dal circuito, quindi non avremo grossi problemi a calcolare le frequenze dei poli, dal momento che nelle resistenze equivalenti non appariranno elementi reattivi causati da altre capacità.

Vediamo nella fattispecie che:

- $R_{\pi,1} = R_S$
- $R_{\mu,1} = (\beta + 1)R_S + r_{o,1} \oplus \left[ \frac{1}{g_{m,2}} + \frac{R_L}{\beta_2} \right]$
- $R_{\pi,2} = \left[ \frac{1}{g_{m,2}} + \frac{R_L}{\beta_2} \right]$
- $R_{\mu,2} = R_L \oplus R_{out} = R_L \oplus g_{m,2}r_{o,2}r_{o,1}$

Utilizzando le espressioni appena presentate, è possibile calcolare le frequenze dei vari poli ad alta frequenza. Ovviamente, solo quello più piccolo sarà influente ai fini di ciò che siamo in grado di presentare, utilizzando il modello di Giacoletto.

Il motivo principale per cui sono state presentate queste resistenze equivalenti, è il seguente: modificando i vari parametri contenuti all'interno di esse, si può sostanzialmente effettuare una scelta, per quanto riguarda il comportamento della configurazione Cascode: se si sceglie di aumentare ad esempio  $R_L$ , si potrà realizzare un amplificatore di tensione, al prezzo di abbassare la frequenza del polo dovuto a  $C_{\pi,2}$ , e quindi la frequenza di taglio del sistema, a causa di una variazione dell'effetto Miller; modificando gli altri parametri, si può dunque 'regolare' il comportamento del Cascode, al fine di ottenere risultati di tipo diverso, andando a guadagnarci/perderci dal punto di vista del comportamento in frequenza piuttosto che sul guadagno in tensione.

Talvolta può capitare di aver bisogno di transistori a due gate, per avere per esempio due ingressi di controllo; spesso la configurazione Cascode (come anche alcune delle altre che presenteremo) viene per l'appunto presentata immediatamente come un transistor, funzionante come appena accennato.

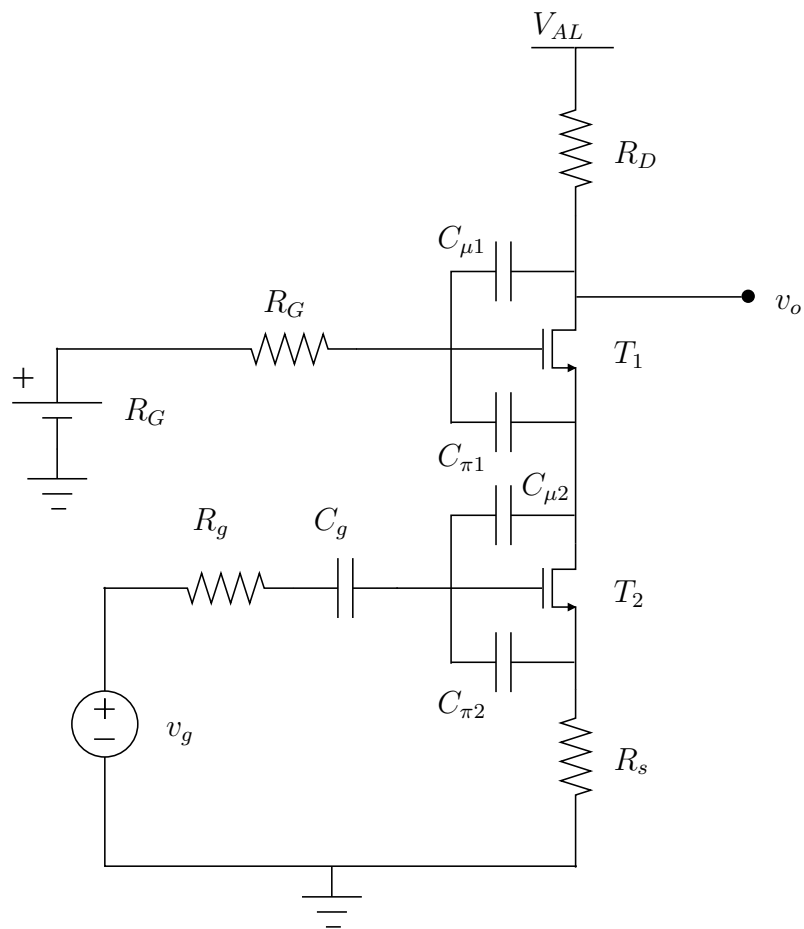


Figura 8.2: Configurazione Cascode con capacità parassite.

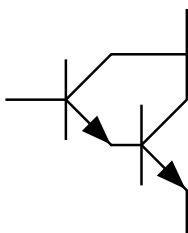


Figura 8.3: Configurazione *Darlington*.

## 8.2 Configurazione Darlington

I transistori Darlington (o coppia Darlington) sono semplicemente due transistori bipolari NPN, con una topologia tale da avere un primo transistore il cui emettitore è collegato alla base del secondo, ed i due collettori sono circuitati.

$T_1$  è un transistore di segnale, poichè in esso passa di fatto una corrente limitata;  $T_2$  è un transistore di potenza, poichè deve sopportare una corrente molto più elevata rispetto a quella di  $T_1$ . Si riesce così ad ottenere, mediante questa composizione di due transistori, un guadagno molto più elevato rispetto a quello che si potrebbe ottenere con un singolo dispositivo (si ottengono tranquillamente guadagni pari a 1000 o più).

Calcoliamone il guadagno, consideriamo come collettore della coppia Darlington l'unione dei due collettori, come base la base del transistore di segnale  $T_1$ , e come emettitore l'emettitore del transistore di potenza  $T_2$ ; supponendo dunque che  $I_B$  sia la tensione di base di  $T_1$ , e sia la tensione della base del transistore Darlington, vediamo:

$$I_{C,eq} = I_B \cdot \beta_1 + (\beta_1 + 1)\beta_2 I_B$$

Da qua:

$$\frac{I_C}{I_B} = \beta_{eq} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \cdot \beta_2$$

Per quanto riguarda la tensione base-emettitore, essa sarà semplicemente la somma delle due:

$$V_{BE,eq} = V_{BE,1} + V_{BE,2}$$

Le impedenze di ingresso si possono calcolare semplicemente ad occhio, guardando nei vari terminali:

$$Z_{C,in} = \infty \oplus \infty = \infty$$

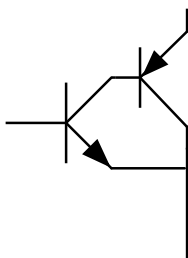


Figura 8.4: Configurazione *Sziklai*.

Infatti sarebbe il parallelo dell'impedenza vista entro due collettori; se il problema fosse più complicato, comprendendo effetto Early, avremmo semplicemente  $r_o$  in entrambi i rami, e quindi le sole resistenze Early (più eventuali contributi dati dalle impedenze sull'emettitore dei singoli transistori).

### 8.3 Configurazione Sziklai

Si tratta di una configurazione simile, in un certo senso duale alla Darlington: anzichè utilizzare due transistori NPN (o PNP a seconda dei casi), si utilizza un transistor NPN ed un PNP; spesso, infatti, esso viene chiamato 'Complementary Darlington'.

Calcoliamo i parametri di questo tipo di configurazione:

Vediamo che, utilizzando come elemento di partenza  $I_B$ , abbiamo:

$$I_{C,eq} = I_B \cdot \beta_1 \cdot (\beta_2 + 1)$$

Da ciò, abbiamo che:

$$I_{C,eq} = \beta_{eq} I_B \implies \beta_{eq} = \beta_1 (\beta_2 + 1)$$

Calcoliamo a questo punto una delle resistenze più significative: la resistenza vista dal collettore della coppia Sziklai:

$$Z_{eq,C} = \frac{r_{\pi,2} + r_o}{\beta_2 + 1}$$

Cerchiamo di ricavare tutte le espressioni, al fine di calcolare quest'impedenza di ingresso:

$$r_o = \frac{|V_{CE}| + V_A}{I_{CQ,1}} \simeq \frac{V_A}{\beta_1 I_B}$$

$$g_{m,2} = \frac{I_{CQ,2}}{V_T} = \frac{\beta_1 \beta_2 I_b}{V_T}$$

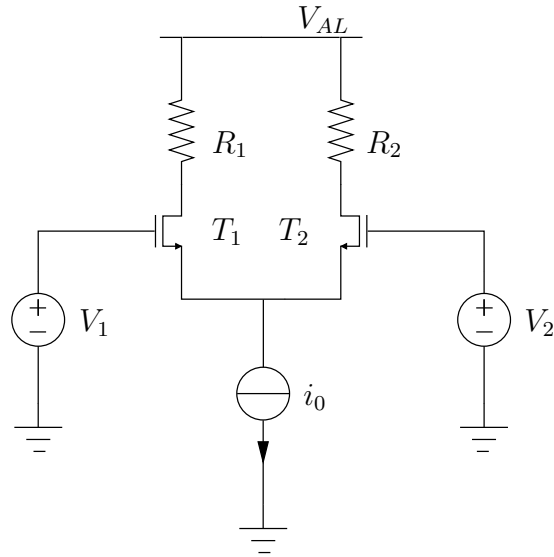


Figura 8.5: Circuito amplificatore differenziale.

$$r_{\pi,2} = \frac{\beta_2}{g_{m,2}} = \frac{\beta_2 V_T}{\beta_1 \beta_2 I_B} = \frac{V_T}{\beta_1 I_B}$$

Quindi:

$$Z_{eq,C} = \frac{\frac{V_T}{\beta_1 I_B} + \frac{V_A}{\beta_1 I_B}}{\beta_2 + 1}$$

Poichè  $V_A \gg V_T$ , possiamo trascurare il primo termine, e quindi:

$$Z_{eq,C} \simeq \frac{\frac{V_A}{\beta_1 I_B}}{\beta_2 + 1} = \frac{V_A}{\beta_1 I_B (\beta_2 + 1)} = \frac{V_A}{I_{CQ,eq}}$$

Abbiamo così caratterizzato alcuni parametri fondamentali della configurazione Sziklai; passiamo all'analisi di un altro tipo di topologia multi-transistore molto importante.

## 8.4 Amplificatore Differenziale

Un circuito a dir poco fondamentale, è il seguente:

Cerchiamo di descriverlo: per quanto riguarda il transistore  $T_1$ , il segnale entra dal gate, esce dal source, e quindi si può dire che sia uno stadio a drain comune; a questo punto il segnale andrà, a causa dell'enorme impedenza del generatore di corrente indipendente  $I_D$ , nel source del transistore  $T_2$ ; lo stadio

costituito da questo transistoro ha l'ingresso nel source, guadagna in tensione con uscita dal drain, e quindi è uno stadio a gate comune; la tensione  $v_o$  quindi sarà positiva (dal momento che lo stadio a gate comune non è invertente), e quindi questo amplificatore guadagnerà sia in corrente (dal momento che  $T_1$  è configurato come uno stadio a drain comune), sia in tensione (grazie alla configurazione common gate di  $T_2$ ).

Questo è uno dei circuiti fondamentali per uno studio avanzato dell'elettronica analogica. La tensione di uscita, si esprime come:

$$v_{o,2} - v_{o,1} = A(v_1 - v_2)$$

Quella che viene amplificata mediante l'amplificatore differenziale, dunque, è una differenza di tensioni, nella fattispecie di quelle introdotte ai gate dei due transistori.

La polarizzazione viene imposta dal generatore di corrente indipendente  $I_D$ , e quindi avremo semplicemente un certo guadagno  $A$  moltiplicato per la differenza delle tensioni di base. Per questo motivo, dal momento che la polarizzazione è presente, non dovremo preoccuparci delle tensioni  $V_{BE}$  o  $V_{GS}$ , e potremo esclusivamente preoccuparci del segnale.

Nota: questo tipo di amplificatore, è in grado di amplificare anche grandezze continue!

### 8.4.1 Calcolo del guadagno $A$

Proponiamo un'idea di calcolo del guadagno  $A$  originale, diversa dal solito:

Consideriamo  $v_1$  e  $v_2$  separatamente, ed effettuiamo un cambio di base in uno spazio vettoriale, introducendo due nuove grandezze:

$$\begin{cases} v_d = v_1 - v_2 \\ v_c = \frac{v_1 + v_2}{2} \end{cases}$$

Queste due grandezze appena introdotte,  $v_d$  e  $v_c$ , sono in opposizione di fase; il circuito è lineare, e quindi simmetrico, e quindi, se  $v_1$  e  $v_2$  si 'spostano' della stessa quantità, il nodo  $T$  non sentirà variazioni. Potremo dire dunque, guardando il circuito, che se il punto non si sposta, avremo due stadi a source comune, il cui guadagno sarà dunque  $g_m R_D$ .

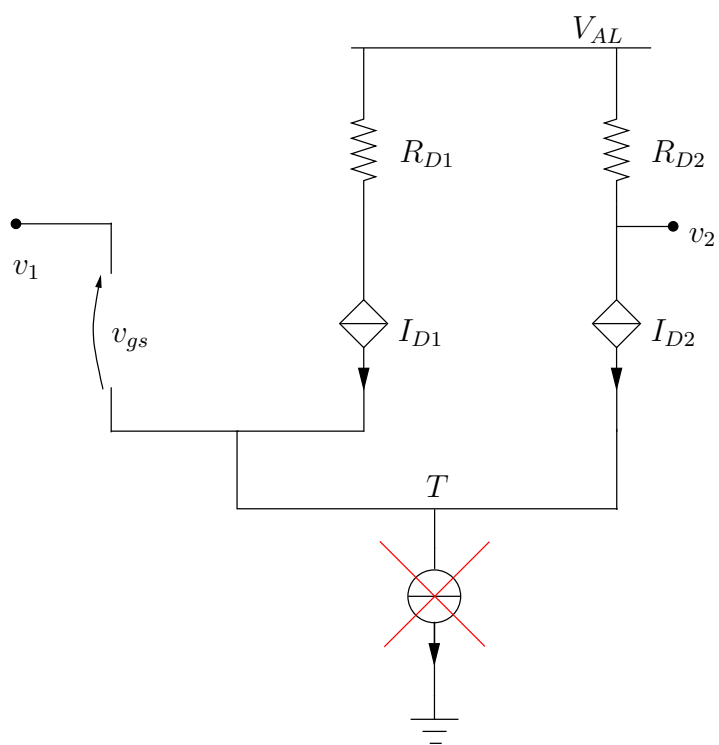


Figura 8.6: Circuito per il calcolo del guadagno.