



POLITECNICO DI TORINO

MONOGRAFIA DI LAUREA

Introduzione all'Analisi in Tempo-Frequenza

Autore:

Alberto TIBALDI

Relatore:

Lorenzo GALLEANI

27 maggio 2009

Indice

1	Necessità dell'analisi in tempo-frequenza	9
1.1	Analisi in frequenza di segnali	9
1.1.1	Necessità dell'analisi in frequenza	11
1.2	Necessità dell'analisi in tempo-frequenza	13
1.3	Esempi analitici di segnali non-stazionari	17
1.3.1	Segnali modulati in frequenza	18
1.4	Conclusione	20
2	Concetti fondamentali dell'analisi in tempo-frequenza	23
2.1	Densità e funzioni caratteristiche	23
2.1.1	Densità monodimensionali	24
2.1.2	Funzioni caratteristiche monodimensionali	28
2.1.3	Densità bidimensionali	32
2.2	Densità tempo-frequenza	39
2.2.1	Caratteristiche di una distribuzione tempo-frequenza	39
2.3	Principio di indeterminazione in tempo-frequenza	43
2.3.1	Proprietà del supporto finito debole e forte	45
2.3.2	Osservazioni finali	46
3	Principali distribuzioni tempo-frequenza	47
3.1	STFT e Spettrogramma	47
3.1.1	Proprietà dello spettrogramma	48
3.1.2	Alcuni esempi teorico/pratici	52
3.2	Distribuzione di Wigner-Ville	56
3.2.1	Proprietà della distribuzione di Wigner-Ville	57
3.2.2	Alcuni esempi teorico/pratici	62
3.3	La Classe di Cohen	64
3.3.1	Proprietà generali del kernel	65

3.3.2	Distribuzione di Choi-Williams	69
3.3.3	Alcuni esempi teorico/pratici	71
A	Introduzione alla rappresentazione di spazi funzionali	75
A.1	Introduzione agli spazi funzionali	75
A.1.1	Spazi metrici	76
A.1.2	Spazi normati	80
A.2	Spazi infinito-dimensionali	82
A.2.1	Prodotti scalari	82
A.2.2	Ortogonalità	83
A.2.3	Basi ortonormali per spazi infinito-dimensionali	86
A.2.4	Serie di Fourier	90
A.2.5	Osservazioni finali	91
A.3	Espansione di Gabor	93
A.3.1	Applicazione dell'espansione di Gabor : cross-terms	94
B	Trasformata di Fourier	97
B.1	Dalla Serie alla Trasformata di Fourier	98
B.2	Alcune Domande e Relative Risposte	102
B.2.1	Quali segnali sono trasformabili?	103
B.2.2	Qual è il significato fisico delle frequenze negative?	103
B.2.3	Abbiamo più armoniche nella serie o nella trasformata?	104
B.3	Introduzione ai segnali generalizzati: la Delta di Dirac	104
B.3.1	Proprietà della Delta di Dirac	105
B.3.2	Esempio Pratico 1	108
B.3.3	Esempio Pratico 2	109
B.3.4	Esempio Pratico 3	109
B.4	Proprietà della Trasformata di Fourier	109
B.4.1	Proprietà di Linearità	110
B.4.2	Proprietà di Parità	110
B.4.3	Proprietà di Anticipo/Ritardo	112
B.4.4	Proprietà di Modulazione	113
B.4.5	Proprietà dello Scalamento	114
B.4.6	Proprietà della Convoluzione	115
B.4.7	Proprietà di derivazione	116
B.4.8	Principio di Indeterminazione della trasformata di Fourier	118
B.4.9	Proprietà del Supporto	121

<i>INDICE</i>	5
B.4.10 Proprietà della variabilità nel tempo	123
B.4.11 Proprietà di Dualità	125
C Modulazione di frequenza	129

Introduzione

La presente monografia rappresenta un approfondimento puramente teorico del corso di Teoria dei Segnali, tenuto dal professor Lorenzo Galleani nell'anno accademico 2007/2008 al Politecnico di Torino, corso di studi in Ingegneria Elettronica. L'obiettivo di questa monografia è quello di introdurre e solidificare le basi matematiche necessarie per lo studio di una particolare classe di tecniche di analisi dei segnali: l'analisi in tempo-frequenza. L'autore ha considerato questa monografia di laurea come un modo di riprendere ed estendere le basi fornite dal professor Galleani durante un seminario interno al corso precedentemente citato e introducendo un certo numero di nozioni che dovrebbero bastare per introdurre nuovi tipi di analisi.

Il sistema della "Monografia" e il fatto che a essa sia stato associato un numero basso di CFU limita i contenuti introducibili in una trattazione di questo genere; l'autore per questo ha cercato di fornire un numero limitato di nozioni, per quanto approfondite in maniera (si spera) adeguata.

Si analizzano rapidamente i contenuti e le motivazioni che hanno spinto l'autore a effettuare scelte di diverso tipo.

- Il primo capitolo include una serie di motivazioni che possono portare alla necessità di un'analisi di questo tipo, ossia in tempo-frequenza, includendo alcuni esempi teorici;
- Il secondo capitolo introduce una serie di nozioni astratte, evidenziando poi la loro utilità al fine di caratterizzare un segnale sotto il punto di vista dell'analisi in tempo-frequenza;
- Il terzo capitolo contiene informazioni più dettagliate riguardo alcune importanti distribuzioni in tempo-frequenza, approfondendo il discorso introdotto durante il corso.

Al fine di aggiungere alcuni materiali, sono state introdotte tre appendici:

- Una prima appendice in grado di generalizzare la teoria dello sviluppo in serie di segnali, in grado da un lato di mostrare sotto un punto di vista puramente teorico la serie di Fourier, dall'altro di introdurre una tecnica particolare di analisi in tempo-frequenza, integrando le nozioni apprese durante i corsi di Analisi Matematica e Geometria;
- La seconda appendice analizza e dimostra tutte le proprietà principali dello strumento basilare del corso di Teoria dei Segnali, ossia la “trasformata di Fourier”, proprietà spesso riprese e utilizzate nel corso della trattazione;
- La terza appendice integra i corsi di telecomunicazioni della laurea triennale, introducendo brevemente la modulazione di frequenza (FM), utilizzata sia per esempi teorici (primo capitolo) sia per esempi pratici (terzo capitolo).

Torino, 19/05/2009

Alberto Tibaldi

Capitolo 1

Necessità dell'analisi in tempo-frequenza

1.1 Analisi in frequenza di segnali

In questa prima sezione della trattazione si intende introdurre gli strumenti fondamentali che hanno portato alla nascita di una grande branca della matematica: l'analisi armonica.

Il più importante strumento dell'analisi armonica e di conseguenza dell'analisi in frequenza di segnali è la trasformata di Fourier, un operatore matematico definito nel seguente modo: dato un segnale (ossia una generica grandezza variabile) x variabile nel tempo t , quindi $x(t)$, si può definire la sua trasformata di Fourier $X(\nu)$ come:

$$X(\nu) = \mathcal{F} \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Dualmente alla trasformata di Fourier è possibile definire l'antitrasformata di Fourier, ossia il suo operatore inverso; data una funzione X variabile nel dominio di Fourier ν , si può ricavare la funzione a essa corrispondente, nel dominio del tempo, come:

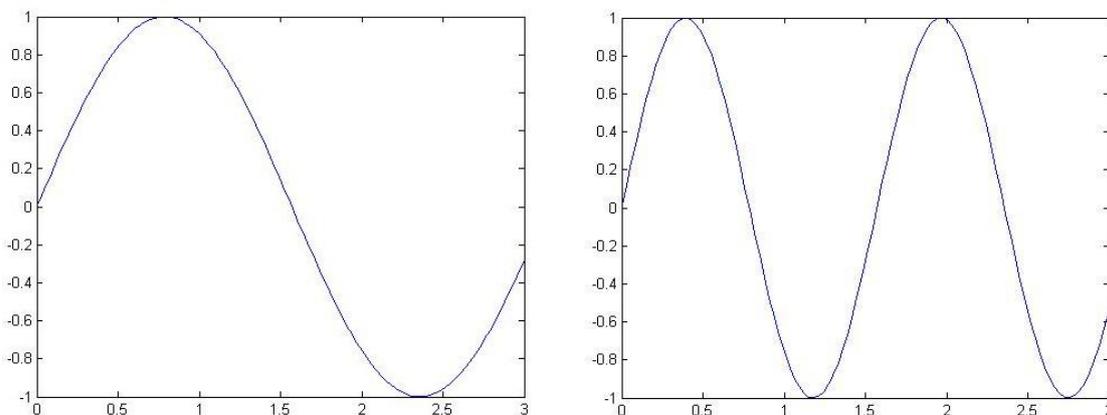
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(\nu)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} dt$$

Questa coppia di operatori ha permesso di studiare sotto un punto di vista assolutamente innovativo e, per molti versi, semplificato, generiche grandezze variabili in un certo dominio (spazio, tempo, o altri).

L'idea fondamentale è la seguente: anziché considerare l'ampiezza di un segnale (ipotizzando di trattare esclusivamente grandezze reali nel dominio del tempo¹) in un dato istante di tempo, si considera il segnale come scomposto nella somma di segnali sinusoidali; nel dominio di Fourier modulo e fase di ciascun segnale sinusoidale non dipendono più dal tempo t : ogni senoide o "armonica" $A(\nu)$ ha una forma del tipo:

$$A(\nu) = e^{i2\pi\nu t}$$

Come si sa dallo studio dell'Analisi Complessa, j è l'unità immaginaria, π è una costante, t e ν sono variabili; il fatto di passare nel dominio di Fourier, tuttavia, elimina la dipendenza dal tempo delle funzioni (dei segnali) trasformati, rendendoli unicamente parametrizzabili, variabili rispetto alla frequenza ν ; considerando diversi valori della variabile ν , si considerano semplicemente sinusoidi di frequenza differente, le cui caratteristiche (modulo e fase) saranno conseguentemente differenti a seconda del segnale nel dominio del tempo. Come si può immaginare, se un segnale presenta variazioni "lente" nel dominio del tempo, ossia se la derivata temporale di $x(t)$ è limitata in un'immagine ridotta, nel dominio di Fourier si avranno ampiezze elevate soprattutto per valori piccoli di ν :



Si può osservare, considerando una generica senoide di frequenza ν variabile, che, riducendo ν si riduce la pendenza massima che la senoide può avere: volendo infatti riprodurre un segnale "lento" mediante una combinazione lineare di funzioni armoniche, sicuramente non sarà possibile utilizzare funzioni con pendenze elevate,

¹Ipotesi più che ragionevole dal momento che è impossibile misurare contemporaneamente, in un sistema fisico, modulo e fase di una certa grandezza

dal momento che esse aumenterebbero la pendenza della "riproduzione", rendendola poco fedele, lontana dalla rappresentazione nel dominio del tempo; dualmente, un segnale rapidamente variabile nel tempo (l'immagine della cui derivata è estremamente più ampia rispetto a quella di un segnale "lento") avrà bisogno di armoniche a frequenze elevate, in grado di presentare veloci variazioni, quindi pendenze elevate.

Dovrebbe a questo punto essere chiara l'idea fondamentale alla base dell'analisi armonica, e nella fattispecie dell'analisi in frequenza: mediante mezzi matematici si trasforma una generica funzione, variabile in un determinato dominio, in una variabile nel dominio reciproco a quello di partenza; ricordando il fatto che:

$$\nu = \frac{1}{t}$$

Alla trasformata di Fourier di una grandezza variabile nel tempo, si può dunque associare un forte significato fisico: per ciascun valore di frequenza ν si possono ricavare le caratteristiche (modulo e fase) che un certo segnale ha, osservando dunque che, in questo dominio, il segnale non sarà più funzione del tempo, ma funzione della frequenza delle sinusoidi utilizzate per rappresentarlo, ossia nel "dominio della frequenza".

1.1.1 Necessità dell'analisi in frequenza

Una volta introdotta l'idea fondamentale alla base dell'analisi in frequenza, ci si potrebbe porre alcune domande, collegate tra loro: dove nasce la necessità dell'uso di un'analisi di questo tipo? Per quale motivo si utilizza questo approccio trasformazionale? Quali vantaggi comporta?

Le risposte a queste domande sono molteplici, e di molteplice natura: l'analisi armonica è, per diversi motivi, fondamentale in diverse branche della matematica, della fisica e dell'ingegneria; rispondere in modo completo è assolutamente difficile, di conseguenza si tenterà di fornire almeno un'idea della potenza degli strumenti della disciplina in trattazione.

Una contestualizzazione storica della trasformata di Fourier può essere utile per comprendere un primo vantaggio che si può ricavare dal suo utilizzo: nella rivoluzione industriale, tra la fine del 1700 e gli inizi del 1800, si stavano sviluppando studi formali riguardo la propagazione del calore in mezzi materiali; l'ingegnere francese Jean Baptiste Joseph Fourier, con la sua opera, la *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analitica del calore), proponeva una soluzione formale a questo problema: la propagazione del calore, per quanto anisotropa, presenta caratteristiche di armonicità, ossia si può avvicinare in qualche modo a un modello periodico. Fourier riuscì,

una volta rappresentato questo modello, a semplificarlo, rappresentandolo mediante una serie (somma di infiniti termini) di armoniche fondamentali: la serie di Fourier. Tra gli altri contenuti del testo, Fourier propose una coppia di funzioni integrali, di trasformate integrali, ossia di operatori in grado di trasformare per l'appunto una funzione, presentandone una equivalente, ma variabile nel dominio reciproco a quello di partenza.

Fourier, in un contesto particolare, introdusse dunque una teoria assolutamente generalizzabile, e ora infatti utilizzata in campi scientifici anche molto correlati dalla termodinamica; si propongono alcuni esempi, di diverso genere, in grado di rispondere ai quesiti precedentemente proposti, presentando alcune applicazioni della disciplina finora introdotta:

- Ciascun oggetto nell'universo si può analizzare spettralmente, ossia si può caratterizzare, a partire da informazioni contenute nelle caratteristiche intrinseche della materia, mediante uno spettro, un insieme di frequenze che identificano univocamente l'oggetto stesso. Mediante l'analisi armonica è stato dunque possibile caratterizzare, descrivere e studiare enti terrestri (ad esempio geologiche come le rocce, o anatomiche come il sangue o le ossa), o extra-terrestri (mediante un'analisi spettrale delle onde elettromagnetiche captate da appositi telescopi, è possibile identificare e descrivere le caratteristiche di comete piuttosto che di stelle piuttosto che di buchi neri, o altre entità astronomiche);
- Molto spesso, studiando fenomeni di propagazione di onde (ad esempio elettromagnetiche), fondamentale è lo studio in frequenza del segnale da propagare, poiché la stessa possibilità di propagarsi del segnale dipende dalla sua frequenza: un dielettrico ad esempio può o meno consentire la propagazione di un segnale, a seconda della sua frequenza, oppure può "filtrarlo" permettendo il passaggio di un solo sottoinsieme delle frequenze appartenenti al suo spettro, attenuando le altre. L'analisi in frequenza è dunque un mezzo fondamentale per la previsione del comportamento di determinati sistemi rispetto a un fenomeno di eccitazione, di conseguenza può essere utilizzata, ad esempio da un ingegnere, al fine di realizzare strutture guidanti piuttosto che sistemi di filtraggio di segnali.
- Un motivo per cui l'analisi in frequenza può essere utile, è nascosto nella definizione del suo strumento fondamentale: la trasformata di Fourier. Essendo essa un operatore lineare, una funzione complessa viene sostanzialmente trasformata in una combinazione lineare di funzioni "semplici" da studiare, ossia

sinusoidi, esponenziali complessi. Un segnale molto complicato nel dominio del tempo, potrebbe avere una rappresentazione semplificata nel dominio della frequenza, dunque si potrebbero effettuare manipolazioni analitiche con maggior semplicità.

- Tra le varie proprietà della trasformata di Fourier, ne esiste una molto interessante sotto il punto di vista matematico: considerando nel dominio del tempo un'equazione differenziale, essa viene trasformata, nel dominio della frequenza, in un'equazione algebrica, molto più semplice da trattare; ciò risulta essere estremamente utile quando si devono affrontare modelli differenziali di fenomeni fisici, o comunque ogni volta che si devono risolvere equazioni differenziali ordinarie.

1.2 Necessità dell'analisi in tempo-frequenza

Nelle sezioni precedenti è stato sostanzialmente introdotto l'operatore "trasformata di Fourier", inteso come anello di congiunzione tra due mondi: il dominio del tempo² t e il dominio della frequenza ν . La frase appena scritta potrebbe già permettere al lettore di comprendere i limiti delle analisi nel dominio del tempo e in quello della frequenza: di fatto si considera lo stesso segnale in due mondi differenti, separati, tra loro indipendenti (a meno della relazione di reciprocità tra le variabili ν e t).

Quali sono i limiti dell'analisi in frequenza? Qual è la necessità di introdurre la cosiddetta analisi in tempo-frequenza? Per rispondere, si può rivedere ciò che è stato finora detto, nel capitolo introduttivo: dato un segnale variabile nel solo dominio del tempo t , applicandovi l'operatore trasformata di Fourier, si ottiene un segnale equivalente al precedente, "variabile" nel solo dominio della frequenza, ossia che si studiano a partire da una data frequenza, anziché a partire da un dato istante temporale.

Tempo e frequenza, nei metodi di analisi finora introdotti, sono estremamente disaccoppiati: un'analisi nel tempo ed una in frequenza, in molti casi, non permettono di comprendere e descrivere in modo esaustivo la natura del segnale in studio.

Il grosso difetto dell'analisi in frequenza è il fatto che, se da un lato essa fornisce informazione esaustive riguardo quante e quali frequenze esistono in un segnale,

²Si considerano dunque in via definitiva il dominio del tempo come punto di partenza e il dominio della frequenza come punto di arrivo nella trattazione, ignorando di qui in avanti altri significati della trasformata di Fourier, per quanto essi siano comunque esistenti.

dall'altro non permette di capire quando, ossia in quali istanti temporali, queste frequenze sono esistite.

Si sta parlando di disaccoppiamento di due grandezze, ossia del fatto che non esista una precisa relazione tra due grandezze. Cosa significa in pratica, questo fatto?

Proviamo a rispondere alla domanda, con un esempio molto semplice, ma comunque efficace: si supponga di avere a disposizione due funzioni di densità, rappresentanti l'altezza e il peso di una specie di animali. Le funzioni di densità contengono informazioni assolutamente esaustive per quanto riguarda ciascuna delle due grandezze: ciascuna funzione mostra, in sostanza, quale sia l'andamento delle caratteristiche della specie; in altre parole, a seconda di un certo dato di ingresso (altezza o peso), si può sapere quanti degli animali della specie avranno tendenzialmente una caratteristica di questo tipo

Si supponga tuttavia di avere, come dato di ingresso di ricerca, un determinato peso; è possibile, a partire dalle funzioni di densità a disposizione, determinare l'andamento dell'altezza collegata al peso? La risposta è no: a seconda della specie, è possibile ad esempio che gli esemplari più pesanti siano quelli più bassi, quelli più alti, o che semplicemente non vi sia alcuna relazione; dal momento che si hanno funzioni di densità rappresentative, ma solo riguardo le grandezze singole, non è possibile, a partire da una funzione di densità, ricavare informazioni sull'altra.

Un discorso del tutto analogo è applicabile parlando di densità spettrale energetica nel dominio del tempo ed in quello della frequenza: lo spettro di un segnale, nel senso finora analizzato, fornisce informazioni riguardanti il contenuto spettrale dell'intero segnale; non è possibile, a partire dall'analisi della trasformata di Fourier di un segnale variabile nel tempo, capire *quando* le frequenze sono esistite, poiché, come nel caso delle funzioni di densità delle caratteristiche della specie animale, non esiste una corrispondenza biunivoca tra istanti temporali e armoniche, allo stato attuale delle nozioni proposte nella trattazione.

Come si sa dalla Teoria dei Segnali, infatti, è valido il teorema di Parseval: dato un segnale variabile nel tempo, $x(t)$, e la sua trasformata di Fourier, $X(\nu)$, è valida la seguente eguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

Questo importantissimo teorema fornisce da un lato un'interessante osservazione, ma può proporre al contempo un quesito: da un lato, esso fornisce un forte legame tra tempo e frequenza, affermando il fatto che l'energia di un segnale studiato nel

dominio del tempo è uguale all'energia dello stesso segnale, studiato nel dominio della frequenza (come è ovvio che sia!); ciò che *non* dice questo teorema, la domanda che può aprire, è: come varia il contenuto energetico spettrale, al variare del tempo? È ossia possibile legare in modo non solo globale, ma locale, le densità energetiche temporale e spettrale? La risposta è no: le due funzioni di densità di energia, a meno del teorema di Parseval, sono assolutamente scorrelate tra loro: non esistono relazioni locali in grado di legare i valori dell'energia di singoli istanti temporali a valori di energia per singole frequenze.

Si può finalmente comprendere quale sia il grosso limite dell'analisi in frequenza: a partire dalla sola conoscenza delle informazioni delle armoniche presenti in un dato segnale, non è possibile comprendere come lo spettro, ossia l'insieme di queste armoniche, vari al variare del tempo: non è possibile studiare le caratteristiche (di ampiezza o energetiche) *simultaneamente* al variare del tempo e della frequenza.

La necessità di un'analisi in grado di rappresentare, per l'appunto *simultaneamente* l'andamento di una funzione nel tempo e nella frequenza, è molto più importante di quel che si può pensare dalla descrizione appena introdotta: nella vita di tutti i giorni si possono osservare moltissimi fenomeni, più o meno complessi, che potrebbero richiedere la necessità, al fine di essere modellizzati in maniera corretta, di un'analisi di questo tipo; si osservano alcuni esempi banali di fenomeni o entità che non si possono modellizzare in modo soddisfacente, senza l'analisi in tempo-frequenza:

- Un primo esempio assolutamente ordinario può essere la voce umana: essa è, probabilmente, il più noto segnale non-stazionario, ossia a spettro variabile. Comunemente, quello che è di fatto lo spettro del segnale emesso dalle corde vocali di un qualsiasi essere umano, viene comunemente denominato “timbro”: a seconda del numero e delle caratteristiche delle armoniche prodotte dalle corde vocali, si distingue il timbro della voce delle persone, ossia l'insieme delle caratteristiche che rende riconoscibile la voce.
- Rimanendo nel mondo dell'acustica, un secondo esempio nel quale oltretutto si introduce implicitamente un'analisi in tempo-frequenza, è la musica: al variare del tempo, differenti strumenti, dal differente timbro³, producono differenti suoni, ossia diversi insiemi di armoniche, riconosciuti dall'orecchio umano come “musica”.

³Il significato di timbro è analogo a quello precedentemente introdotto: il timbro è fortemente collegato allo spettro, ossia all'insieme delle armoniche emmissibili dallo strumento musicale.

Si è accennato a un primo esempio “implicito” di analisi in tempo-frequenza: dal momento che la musica, al fine di risultare gradevole all'orecchio umano, deve essere prodotta rispettando un certo insieme di regole di diversa natura; a Pitagora si attribuisce l'invenzione della prima scala, ricavata mediante criteri matematici (Temperamento pitagorico), scala poi ri-elaborata nei secoli a venire fino a raggiungere il livello attualmente raggiunto (noto come Temperamento equabile). Dal nono secolo dopo Cristo si iniziò a rappresentare le note, ricavate a partire dalle scale studiate dai vari musicologi, su di un “rigo musicale”, meglio conosciuto come “pentagramma”.

Il pentagramma è un primo esempio di piano tempo-frequenza: in “verticale” si ha uno sviluppo puramente armonico della musica, in “orizzontale” uno sviluppo puramente temporale della medesima; considerando il pentagramma come un piano discretizzato con un numero finito di valori verticali, si può dire che esso, per ciascun possibile punto, presenti al contempo le armoniche contenute nella musica e gli istanti di tempo in cui sono esistite. A partire dal pentagramma, dunque, si riesce non solo a comprendere quante e quali frequenze sono esistite nella musica (considerando la sola proiezione sull'asse verticale delle note presenti nella musica), ma anche quando esse sono esistite, considerando contemporaneamente ascisse e ordinate del piano.

- Un fenomeno che può essere ben modellizzato mediante un'analisi in tempo-frequenza è l'effetto Doppler: data una sorgente stazionaria monocromatica di campo acustico (nozione estensibile, introducendo nozioni di relatività speciale, a sorgenti di campo elettromagnetico) a frequenza ν_0 in moto a velocità costante v_s ed un osservatore in movimento rispetto a essa con velocità v_o , percepirà il campo con una frequenza $\nu \neq \nu_0$, pari a:

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{v + v_m - v_o}{v + v_m + v_s} \right)$$

Dove v è la velocità dell'onda che si propaga in un dato mezzo, v_m la velocità del mezzo.

In questo caso è evidente che si abbia a che fare con uno spettro variabile nel tempo: a seconda del moto dell'osservatore, lo spettro dell'onda ricevuta da esso sarà differente; una semplice analisi nel dominio del tempo o della frequenza non sarebbe esaustiva: a seconda dell'istante temporale, lo spettro del segnale ricevuto varia, dunque per poter avere informazioni più dettagliate è necessario introdurre un'analisi in tempo frequenza.

- Un fenomeno questa volta puramente visivo che risulta essere ben analizzabile in tempo-frequenza, è il tramonto del sole: i colori che caratterizzano il tramonto derivano dalla diffusione della luce attraverso le molecole dell'aria. A seconda delle zone di aria in cui avverranno i fenomeni di diffusione, verranno prodotte componenti luminose dalle differenti lunghezze d'onda λ . poiché i colori del tramonto variano in maniera sensibile con il tempo, un'analisi in tempo-frequenza, basata sulla frequenza della radiazione luminosa percepita, può fornire informazioni precise riguardo l'evoluzione dei colori del tramonto al variare del tempo; è infatti noto dall'Ottica che lunghezza d'onda e frequenza dell'onda sono legate dalla seguente relazione:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \sqrt{\varepsilon_r}$$

Dove c è la velocità di un'onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto, ν la relativa frequenza associata alla lunghezza d'onda, ε_r la costante dielettrica relativa al mezzo di propagazione dell'onda.

Studiando mediante l'analisi tempo-frequenza questo tipo di fenomenologia è possibile comprendere le motivazioni legate ai colori del tramonto; a seconda del colore della radiazione luminosa come appena detto si possono infatti comprendere informazioni sul mezzo nel quale si diffonde: se ad esempio in una zona sono appena avvenute eruzioni vulcaniche, i gas vengono trattiene nella troposfera, variandone la composizione e di conseguenza le caratteristiche, modificando la diffusione della luce in essa.

1.3 Esempi analitici di segnali non-stazionari

Sono stati finora presentati esempi estremamente qualitativi, in grado di permettere di comprendere la necessità di un'analisi in tempo-frequenza ma in modo per ora solo intuitivo.

Si sceglie a questo punto, una volta fissati i concetti fondamentali mediante gli esempi precedenti, di introdurre altri esempi altrettanto fondamentali di applicazioni pratiche dell'analisi tempo-frequenza, usando un formalismo matematico atto a comprendere quali fenomeni non siano assolutamente modellizzabili con le analisi più classiche.

1.3.1 Segnali modulati in frequenza

Tipici esempi atti a far comprendere, in maniera più formale rispetto a come finora si è proceduto, dove potrebbe essere utile usare un'analisi di segnali in tempo-frequenza, si possono costruire a partire da una tecnica di modulazione analogica molto utilizzata in ambito di telecomunicazioni: la modulazione di frequenza (FM). Si anticipa il fatto che verranno presentati, in queste sotto-sezioni, risultati “finali”, raggiungibili mediante un certo insieme di calcoli che non vengono riportati per sintesi⁴; per quanto dunque vi sia un maggior formalismo matematico rispetto ai precedenti esempi, si eviterà di presentare passaggi poco esplicativi, preferendo descrizioni qualitative.

Chirp

Un esempio classico di segnali modulati in frequenza è costituito dai chirp. Da studiosi dell'analisi in tempo-frequenza, si potrebbe essere interessati allo studio di particolari variazioni del contenuto spettrale del segnale al variare del tempo. Quando si affrontano studi complicati, tendenzialmente si parte sempre da esempi “semplici”, i quali solitamente sono basati sull'uso di una particolare classe di funzioni: le funzioni lineari. Si sta parlando di variazioni dello spettro al variare del tempo, dunque ci si potrebbe chiedere: esistono segnali nei quali la variazione di frequenza è lineare col tempo?

Dal momento che si intende presentare segnali semplici, consideriamo come ipotesi di partenza il fatto che si trattino segnali monocromatici per ogni istante di tempo, ossia il fatto che, per ciascun istante di tempo, lo spettro del segnale sia costituito da una sola frequenza, da una sola armonica; i parametri di questa armonica chiaramente non saranno stazionari, tuttavia facilmente identificabili⁵ (al fine di avere esempi “semplici” ma efficaci).

Si propone un segnale di questo tipo:

$$x(t) = e^{j\alpha \frac{t^2}{2} + j\omega_0 t} = e^{j\vartheta(t)}$$

A partire da questo segnale, è possibile calcolare la derivata della fase nel tempo (velocità di fase), come:

⁴Vedi Appendice C

⁵L'ipotesi è ragionevole: avendo a che fare, parlando di analisi in frequenza, con trasformate integrali, si ha a disposizione la proprietà di linearità, dunque l'estensione al caso di segnali non-monocromatici si può affrontare, per ogni istante di tempo, con una semplice sovrapposizione degli effetti studiati per ciascuna componente armonica del segnale non-monocromatico.

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \alpha t + \omega_0$$

Cosa significa ciò? Si immagini di avere una pulsazione iniziale del segnale, per $t = 0$, pari a ω_0 ; per $t > 0$, la pulsazione aumenta proporzionalmente (a meno dell'offset iniziale, ω_0), linearmente al tempo che scorre: è infatti noto che la derivata temporale della fase di un'armonica è pari alla sua frequenza (o pulsazione, a seconda delle notazioni utilizzate); in questo caso, la frequenza non è costante, poiché, per ogni istante di tempo, essa varia: il segnale, come annunciato in precedenza, è, per ogni istante di tempo, monocromatico, poiché è costituito da una singola armonica, la cui pulsazione tuttavia varia con il variare del tempo.

In questo caso è risultato semplice determinare la relazione, come semplice sarebbe lo studio della frequenza del segnale per un qualsiasi istante di tempo poiché l'esempio è fatto ad hoc; questo esempio non può tuttavia far a meno di confermare tutto ciò che è stato detto in precedenza: l'analisi in frequenza non dispone dei mezzi sufficienti per l'analisi, istante per istante, di un segnale: sarebbe sicuramente possibile, mediante trasformata di Fourier, analizzare in frequenza questo tipo di segnale (a patto di limitare i tempi a un certo istante $t = T$), ma non sarebbe possibile determinare, a partire da un'analisi di questo tipo, il valore della frequenza del segnale per un determinato istante τ .

Si presenta a questo punto un altro esempio "classico", ma più complicato di quello appena introdotto, al fine di introdurre complicazioni più serie per l'analisi in tempo-frequenza, ossia per la determinazione istantanea dello spettro del segnale.

Segnale modulato sinusoidalmente

Come fatto per quanto concerne il chirp, appena analizzato, si introduce senza particolari passaggi propedeutici un nuovo tipo di segnale: un segnale "modulato sinusoidalmente"⁶, $s(t)$. Si considerano quindi due rappresentazioni del suddetto segnale: una nel dominio del tempo, t , ed una nel dominio della pulsazione, ω :

$$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha \frac{t^2}{2} + j\beta \frac{t^2}{2} + jm \sin(\omega_m t) + j\omega_0 t}$$

Questo segnale rappresenta un'unione di diverse possibili fonti di variazione: smorzamenti, chirp lineari, modulanti sinusoidali; come si può infatti osservare, vi è un termine di smorzamento esponenziale per fattore α ; si può ritrovare inoltre la stessa espressione precedentemente introdotta, ovvero la variazione, con t^2 , a

⁶Non si analizza, nella trattazione, il significato del nome, per discuterlo solo nell'Appendice C

partire da una certa frequenza di partenza ω_0 ; oltre a tutto ciò, si introduce un termine modulante, mediante una variazione sinusoidale del tempo, la frequenza del segnale; la rappresentazione in serie di Fourier del segnale appena presentato è la seguente:

$$S(\omega) = \sqrt{4\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{-\frac{(\omega - n\omega_n - \omega_0)^2}{2\alpha}}$$

Si presenta questo esempio per presentare quello che potrebbe essere un caso più “tipico” da studiare: nell’esempio numerico precedente era possibile determinare, con estrema semplicità, il contenuto spettrale del segnale a ogni istante di tempo; questo esempio contiene elementi del precedente esempio, e ulteriori elementi, che vengono meglio formalizzati nell’Appendice C; ciò che si può immediatamente notare, ad ogni modo, è il fatto che sia nel dominio del tempo sia nel dominio della frequenza effettuare uno studio tempo-frequenza è assolutamente impossibile: le due funzioni contengono elementi completamente scorrelati tra loro, e non correlabili in alcun modo, con gli strumenti matematici finora introdotti.

1.4 Conclusione

Nel mondo di tutti i giorni si trovano numerosissimi fenomeni non stazionari, modellizzabili di conseguenza con segnali dalle caratteristiche variabili nel tempo. Esistono diverse cause che possono comportare variazioni del contenuto spettrale di un segnale: il fatto che i sistemi artificiali o naturali degradino e varino le proprie caratteristiche, “invecchino”; il fatto di desiderare al contrario spettri variabili, come nel caso della musica, dove si intende produrre particolari suoni, mediante combinazioni di diverse frequenze al variare del tempo.

Si noti un ulteriore fatto: entrambi gli esempi analitici presentati, hanno un grosso vantaggio: sono analitici. Il primo esempio rappresenta probabilmente il più semplice esempio effettuabile di segnale a frequenza variabile nel tempo, mentre il secondo ne rappresenta una complicazione, pur restando relativamente semplice; i segnali reali, ossia quelli sui quali si deve effettivamente utilizzare un’analisi, non si possono conoscere con esattezza, ma solo numericamente, ossia in seguito a un’operazione di acquisizione che ha tradotto grandezze fisicamente esistenti in numeri elaborabili da un calcolatore. Volendo lavorare su segnali di questo tipo, i mezzi analitici finora introdotti, le osservazioni effettuabili a partire dagli operatori matematici utilizzati, sono assolutamente inutili.

Volendo studiare in maniera completa e formale dei segnali, l'introduzione di tecniche versatili per effettuare analisi in tempo-frequenza è assolutamente fondamentale: solo mediante uno studio simultaneo di tempo e frequenza è possibile comprendere quali frequenze esistano in determinati istanti e quindi avere una conoscenza completa del segnale sia sotto il punto di vista armonico sia sotto quello temporale.

Capitolo 2

Concetti fondamentali dell'analisi in tempo-frequenza

In questo capitolo si introdurranno i prerequisiti necessari per la comprensione dell'analisi in tempo-frequenza, in modo da solidificare le basi per il capitolo successivo, dove si introdurranno le principali tecniche di analisi in tempo-frequenza. Verranno dunque ripresi ed estesi alcuni concetti noti dallo studio della Teoria dei Segnali, in modo da adattarli alla teoria che si sta studiando.

2.1 Densità e funzioni caratteristiche

Un tipo di funzioni, di grandezze, di quantità che si utilizzeranno molto spesso in ambito di analisi in tempo-frequenza sono le densità. Ogni qual volta si considera il modulo quadro di un segnale, o della sua trasformata di Fourier, si considera ad esempio una densità di energia, ossia una funzione che, a un certo istante di tempo (nel caso del segnale nel tempo) o per una certa armonica (nel caso della trasformata di Fourier) quantifica l'energia prodotta.

In senso fisico, si potrebbe cercare di capire cosa sia una densità a partire dai seguenti esempi: una funzione in grado di esprimere, dato un volume, una funzione di densità volumetrica di carica è una funzione che quantifica la carica presente su ciascun punto del volume; allo stesso modo, un altro esempio può essere di tipo meccanico: una funzione di densità volumetrica di massa è una funzione che quantifica la massa di un singolo punto dell'oggetto. In altre parole, per densità si intende una funzione che, dato in ingresso un certo valore, fornisce in uscita un altro valore, con un determinato significato: elettrico, meccanico, energetico. Discorso simile si può

fare in ambito probabilistico: una densità di probabilità è una funzione che, dato in ingresso un certo evento, fornisce in uscita la probabilità che l'evento avvenga.

Si considererà in modo astratto il concetto di densità, in modo da poterlo sfruttare al fine di introdurre i concetti a noi necessari per la trattazione.

2.1.1 Densità monodimensionali

Per funzioni di densità monodimensionali si intende, citando [1], “la quantità di qualcosa per unità di qualcos'altro”. Data una generica grandezza x al variare della quale si vuole misurare un'altra grandezza, si ha una densità P in grado di quantificare quest'ultima: $P(x)$. Si può dunque dire che $P(x)$ sia una funzione di densità monodimensionale al variare della quantità x . Dato un intervallo di variazione di x , Δx , è possibile quantificare l'ammontare $A_{\Delta x}$ della grandezza di cui si ha la densità, nel seguente modo:

$$A_{\Delta x} = P(x) \cdot \Delta x$$

Volendo calcolare in totale quanta della grandezza di cui P fornisce informazioni locali è presente, è sufficiente effettuare l'operazione di integrazione sull'intera retta reale: trattandosi di densità unidimensionali, il dominio sarà infatti monodimensionale:

$$A_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx$$

Spesso le densità sono grandezze normalizzate, in modo che esse forniscano esclusivamente il valore rapportato a 1 (o percentuale, volendo) del totale. Spesso, dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$$

In questo modo, introdotta una x nella funzione di densità, essa restituisce la quantità di grandezza A_x rapportata a 1.

Le tre caratteristiche da attribuire a una funzione di densità monodimensionali sono le seguenti:

- Integrale sulla retta reale unitario: in questo modo si normalizza a 1 il valore dell'ammonto totale della funzione di densità (come appena visto);

- **Positività:** una funzione di densità rappresenta la presenza di una determinata quantità di una grandezza in un certo contesto; questa quantità può essere positiva o nulla, dunque una funzione di densità che restituisca, data una x in ingresso, un valore negativo, non avrebbe significato fisico;
- **A valori singoli:** le funzioni di densità devono essere funzioni, ossia per ogni x in ingresso devono avere un solo valore in uscita possibile; il fatto che a una x siano associati più valori renderebbe insensata la densità, poiché non si avrebbero più informazioni ben definite riguardo le grandezze da quantificare.

Si introducono, a questo punto, alcune notazioni e concetti a partire dai quali si studiano le funzioni di densità appena introdotte.

Distribuzioni

Spesso capita di scambiare i termini “densità” e “distribuzioni”, dal momento che intuitivamente $P(x)$ indica come una certa grandezza sia distribuita al variare della variabile x . In realtà, la parola distribuzione è associabile a un significato ben preciso: la distribuzione di una funzione di densità per un certo valore x_0 è la somma di tutti i contributi dei singoli valori della funzione di densità fino a x_0 :

$$D(x_0) = \int_{-\infty}^x P(x) dx \Big|_{x=x_0}$$

Questa funzione, in ambito probabilistico, viene anche soprannominata “funzione di distribuzione cumulativa”, dal momento che accumula tutti i valori della funzione di densità da quando inizia a esistere $-\infty$ al valore x_0 .

Si noti che, invertendo la formula:

$$P(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Questo, naturalmente quando $F(x)$ è una funzione derivabile.

Momenti di una funzione di densità

Le funzioni di densità spesso possono essere estremamente complicate da studiare: esse di fatto racchiudono informazioni, che tuttavia, “a occhio”, possono essere alquanto complicate da studiare. Ciò che è stato pensato, è “sacrificare” parte delle informazioni contenute nelle funzioni di densità, per ottenere indicatori delle caratteristiche delle suddette in grado di renderle più semplici da caratterizzare.

L'approccio utilizzato si basa sul ricavare, per ciascuna funzione di densità, dei "momenti", ossia degli indicatori in grado di evidenziare in maniera abbastanza significativa alcuni aspetti della funzione di densità. Questo è uno stratagemma utilizzato in moltissime branche: in ambito probabilistico, anziché studiare l'intera variabile aleatoria si studia una caratterizzazione mediante media o varianza, in meccanica anziché studiare il moto del corpo rigido lo si caratterizza mediante baricentro e momento di inerzia, in elettrostatica si studia anziché la una densità spaziale di cariche un'equivalente puntiforme.

A seconda del modello che si intende utilizzare, si può dunque attribuire un significato fisico/matematico a ciascuno dei momenti; maggiore è il numero di momenti considerati, maggiore sarà la quantità di informazioni, di indicatori ottenuti a partire dalle funzioni di densità.

La generica espressione a partire dalla quale si calcola il momento n -esimo di una funzione di densità $P(x)$ è:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P(x) dx$$

Si propongono a questo punto interpretazioni generiche dei primi due momenti, quelli più comunemente utilizzati nei vari tipi di analisi.

Media

Il momento primo di una funzione di densità è anche noto come "media", poiché indica, a partire da tutti i valori acquisibili dalla funzione di densità, un valore che, con una certa validità, può rappresentarli tutti. Ciò che l'operazione di mediazione fa, dunque, è quella di sostituire un insieme di valori con un singolo valore, in modo da ottenere un indicatore più o meno ragionevole della concentrazione della densità. La media di una funzione di densità si calcola come:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx$$

Si noti un fatto, tuttavia: questo tipo di mediazione è basato sulla mediazione "classica", a partire dalla variabile x ; ciò che è possibile fare, tuttavia, è considerare una variante di questo fatto, mediando su di una generica funzione $f(x)$:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P(x) dx$$

La mediazione “classica” attribuisce a ciascun punto della funzione di densità lo stesso peso, in modo dunque da non aumentare l’importanza di certi punti a scapito di altri; se è necessario tener conto di un certo insieme di campioni a scapito di altri, tuttavia, una soluzione come quella appena proposta può essere intelligente.

Si noti che la media è un operatore lineare: si può dimostrare banalmente, sfruttando la linearità dell’operatore integrale, il fatto che:

$$\langle cf(x) + dg(x) \rangle = \langle cf(x) \rangle + \langle dg(x) \rangle = c\langle f(x) \rangle + d\langle g(x) \rangle$$

Varianza

Un altro momento frequentemente utilizzato è la cosiddetta “varianza”: con la media si è ottenuto un valore fittizio in grado di rappresentare l’intera funzione di densità; ciò che ci si può chiedere, a questo punto, è: la media rappresenta “bene” la funzione di densità, o no? In altre parole, si può dire che il punto che media i valori assunti dalla funzione di densità sia *quello* dal momento che quasi tutti i punti “importanti”, ad ampiezza elevata della funzione di densità si trovino in un intorno della media, o dal momento che vi è una grossa dispersione?

La varianza è in grado di quantificare la dispersione, rispetto al valore medio, dei punti della funzione di densità: se la varianza sarà elevata, si avrà una media poco rappresentativa della funzione, dal momento che la dispersione risulta essere molto elevata; una varianza bassa è invece indicatore di una buona rappresentazione della media.

La varianza, come si può intuire dalla generica forma dei momenti, si può calcolare come:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 P(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Ciò è naturalmente estensibile al caso in cui si voglia pesare con una funzione, anziché con pesi uniformi, analogamente alle medie:

$$\sigma_{f(x)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - \langle f(x) \rangle)^2 P(x) dx = \langle f^2(x) \rangle - \langle f(x) \rangle^2$$

Un modo di verificare le affermazioni appena fatte può essere introdotto con un esempio “classico”: alla domanda “Quanto vale la varianza della costante?”, la risposta non può che essere “0”: data una funzione di densità costante, essa potrà assumere, come il nome suggerisce, un singolo valore, indipendentemente da x . Per questo motivo, la media coinciderà con il valore stesso della costante, e, poiché non vi

è dispersione (dal momento che la funzione di densità ha solo un valore), la varianza sarà nulla.

2.1.2 Funzioni caratteristiche monodimensionali

Un modo alternativo di studiare quantità, senza utilizzare direttamente funzioni di densità come quelle precedentemente introdotte, può essere quello di passare dal nostro operatore preferito: l'integrale di Fourier. Si definisce la “funzione caratteristica monodimensionale” la media integrale, utilizzando come funzione di mediazione un'armonica $e^{j\vartheta x}$:

$$M(\vartheta) = \langle e^{j\vartheta x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\vartheta x} P(x) dx$$

Si ricorda che, data una generica variabile ξ , lo sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale è:

$$e^{\xi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi^n}{n!}$$

Considerando la funzione caratteristica, è possibile riscrivere tutto come:

$$M(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(j\vartheta x)^n}{n!} P(x) dx$$

Si noti, a questo punto, il seguente fatto: si ha un x^n che moltiplica $P(x)$, integrando sulla retta reale; riprendendo le nozioni precedentemente introdotte, questo si può vedere come “momento n -esimo della funzione di densità”, quindi:

$$M(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(j\vartheta)^n}{n!} x^n P(x) dx$$

A questo punto la sommatoria è indipendente da x , dunque si può portare fuori dall'integrale, per linearità; l'integrale si può semplificare come “momento n -esimo” della funzione di densità, ottenendo quindi:

$$M(\vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(j\vartheta)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(j\vartheta)^n}{n!} \cdot \langle x^n \rangle$$

Si noti un fatto: si ha a che fare con la serie di Taylor, serie notoriamente dotata della seguente caratteristica: una funzione di partenza viene sviluppata in una base

di monomi, in modo da approssimarla con una funzione polinomiale di grado sempre maggiore. Quando si parla di “approssimare”, in termini di serie di Taylor, si parla di “derivare”. Quello che abbiamo attualmente ottenuto, è un risultato del tipo:

$$M(\vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(j\vartheta)^n}{n!} \cdot \langle x^n \rangle$$

Si sa tuttavia che, dalla teoria generale della serie di Taylor, si avrebbe:

$$M(\vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^n M(\vartheta)}{\partial \vartheta^n} \cdot \frac{\vartheta^n}{n!}$$

Si possono dunque eguagliare le due espressioni, rendendole simili, in modo da ottenere un risultato molto interessante:

$$M(\vartheta) = \sum_{n=1}^{+\infty} j^n \frac{(\vartheta)^n}{n!} \cdot \langle x^n \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^n M(\vartheta)}{\partial \vartheta^n} \cdot \frac{\vartheta^n}{n!} \Big|_{\vartheta=0}$$

Da qui, si può banalmente ricavare, dal momento che le espressioni sono equivalenti, che:

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{j^n} \frac{\partial^n M(\vartheta)}{\partial \vartheta^n} \Big|_{\vartheta=0}$$

Questo risultato è molto interessante: una volta ottenuta in qualche maniera un’espressione della funzione caratteristica, è possibile, mediante una semplice operazione di derivazione, ottenere i momenti n -esimi; ciò è molto più semplice rispetto al dover calcolare l’integrale della definizione del momento.

Come esiste una formula per il passaggio da funzione di densità a funzione caratteristica, esiste anche la sua duale; si può infatti dire, invertendo l’operatore, che:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\vartheta) e^{-j\vartheta x} d\vartheta$$

Osservazioni e proprietà

Le funzioni caratteristiche, oltre a semplificare notevolmente il calcolo dei momenti n -esimi, posseggono alcune proprietà interessanti, che ora analizzeremo brevemente; si introdurrà quindi un insieme di condizioni necessarie e sufficienti, affinché

una generica funzione di variabile complessa si possa trattare come una funzione caratteristica.

Considerando $\vartheta = 0$, si ha:

$$M(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1$$

Questo fatto si può interpretare in un modo abbastanza semplice: quando si media una funzione utilizzando come funzione di peso la funzione costante, l'operazione di mediazione non esiste più, dal momento che non vi è un fattore che attribuisca i pesi alle varie grandezze; l'operazione di mediazione si riduce a un'operazione di integrazione, ottenendo di fatto il risultato appena proposto.

Altra proprietà interessante riguarda il comportamento della funzione complessa coniugata alla caratteristica:

$$M^*(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\vartheta x} P^*(x)dx = M(-\vartheta)$$

Da qua, si può anche affermare, cambiando il segno iniziale:

$$M^*(-\vartheta) = M(\vartheta)$$

Ulteriore proprietà: come nel caso della funzione di densità, il valore assoluto della funzione caratteristica valutata per un certo ϑ_0 è sempre minore o uguale di 1:

$$|M(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_0} \leq 1$$

Questo poiché:

$$|M(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\vartheta x} P(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{j\vartheta x}| |P(x)| dx$$

Grazie alla diseguaglianza di Cauchy-Schwartz; osservando a questo punto che $P(x)$ è sempre positiva, e che $e^{j\vartheta x}$ è un termine a modulo unitario (poiché esclusivamente oscillante), si può dire che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{j\vartheta x}| |P(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1$$

Quindi:

$$|M(\vartheta)| \leq M(0) = 1$$

Un'ultima osservazione per quanto concerne le funzioni caratteristiche monodimensionali: si può affermare che una funzione caratteristica sia una funzione di variabile complessa, ma non che tutte le funzioni di variabili complesse sono anche funzioni caratteristiche: il fatto di aver utilizzato valori assoluti e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz non ci ha infatti, finora, permesso di considerare un fattore molto importante delle funzioni di densità, ossia la loro positività. Al fine di determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché una generica funzione di variabile complessa sia anche una funzione caratteristica, si può fare il seguente ragionamento: se esiste un'altra funzione $g(\vartheta)$, tale per cui:

$$M(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\vartheta') \cdot g(\vartheta' + \vartheta) d\vartheta'$$

E

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\vartheta)|^2 d\vartheta = 1$$

Si dimostra ora questo risultato: se questa funzione $g(\vartheta)$ esiste, allora si ha che:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\vartheta) e^{-j\vartheta x} d\vartheta$$

Questo si può ri-scrivere utilizzando g :

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\vartheta') g(\vartheta' + \vartheta) e^{-j\vartheta x} d\vartheta' d\vartheta$$

Si considera a questo punto un cambio di variabili:

$$\vartheta'' = \vartheta' + \vartheta; \quad d\vartheta'' = d\vartheta$$

Da ciò, l'integrale si riduce a diventare:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vartheta) e^{-j\vartheta x} d\vartheta \right|^2$$

Quindi, se la funzione $g(\vartheta)$ esiste e soddisfa la condizione in questione, $P(x)$ è una funzione di densità, poiché positiva, e $M(\vartheta)$ di conseguenza è una funzione caratteristica. Se $P(x)$ per ipotesi è normalizzata a 1 (come qualsiasi funzione di densità), per il teorema di Parseval lo sarà anche $g(\vartheta)$, in norma euclidea.

2.1.3 Densità bidimensionali

Il fatto di dover lavorare con due grandezze contemporaneamente (tempo e frequenza), costringe a studiare non solo funzioni di densità o funzioni caratteristiche monodimensionali, bensì anche multidimensionali (nella fattispecie, bidimensionali); il caso monodimensionale sotto molti punti di vista è fondamentale, in quanto spesso le nozioni si riconducono a esso, tuttavia si deve sapere che il passaggio da funzioni monodimensionali a multidimensionali non è del tutto indolore: si avranno, oltre ai concetti già affrontati, nuovi concetti molto importanti da conoscere, specie in ottica di uno studio dell'analisi in tempo-frequenza.

La definizione di funzione di densità bidimensionale non è molto differente rispetto a quella del caso monodimensionale: date due variabili, due quantità x e y , la densità bidimensionale $P(x, y)$ è l'ammontare di una certa grandezza al variare delle due grandezze, delle due quantità.

Come nel caso precedente, è possibile definire l'ammontare totale della grandezza, A_{tot} , mediante l'integrale non sulla retta reale, ma sul piano \mathbb{R}^2 della densità:

$$A_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy dx$$

Come nei casi precedenti, si sceglie di normalizzare l'ammontare totale della funzione di densità a 1, in modo da ottenere, per ciascun punto (x, y) , un valore indicante relativamente al valore complessivo la quantità di grandezza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy dx = 1$$

Una volta definite queste notazioni, è possibile introdurre un certo insieme di proprietà e caratteristiche per le funzioni di densità bidimensionali, in modo da poter semplificare il loro studio.

Marginali

Un concetto molto importante, specialmente in ambito di analisi in tempo-frequenza, è quello di densità marginali: data una funzione di densità bidimensionale $P(x, y)$, una tecnica molto comoda per studiarla potrebbe essere quella di scomporla (quando possibile) in due funzioni di densità monodimensionali: una, in grado di descrivere l'andamento della densità al variare della sola quantità x , l'altra in grado di descrivere l'andamento della densità al variare della sola quantità y . Una vol-

ta effettuata questa “suddivisione”, è possibile applicare tutte le idee e le tecniche precedentemente affrontate, in modo da completare lo studio.

Quale può essere un’idea? Supponendo che sia possibile farlo (cosa che verrà discussa effettivamente in seguito), un’idea potrebbe essere quella di ottenere funzioni in grado di descrivere l’andamento della funzione di densità in una sola variabile, integrando nell’altra variabile la funzione di densità congiunta, ossia quella bidimensionale: sommando infatti tutti i contributi di una variabile di una funzione di densità bidimensionale, a certe condizioni (ossia se una variazione di x è “indipendente” dal valore di y e viceversa), si considerano già “trattati” i contributi della variabile, dunque solo i contributi dell’altra variabile avran peso.

Si possono definire le cosiddette funzioni di densità “marginali” $P_x(x)$ e $P_y(y)$ come:

$$P_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy; \quad P_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dx$$

Per ora si introduce esclusivamente questa definizione, che verrà ripresa, ridiscussa e contestualizzata in ambito tempo-frequenza.

Medie globali

Data una funzione “di peso” $g(x, y)$, è possibile estendere banalmente il concetto di media al concetto di media globale, ossia al concetto di media della funzione di densità multidimensionale, nel seguente modo:

$$\langle g(x, y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) P(x, y) dy dx$$

Funzioni caratteristiche multidimensionali e calcolo dei momenti

Non si approfondisce particolarmente il metodo di calcolo diretto dei momenti (come invece fatto per quanto concerne le densità monodimensionali) in quanto il metodo più intelligente e più frequentemente utilizzato per il calcolo dei momenti delle funzioni di densità si basa sull’uso di un concetto precedentemente introdotto: quello di funzione caratteristica.

Anche nel caso di funzioni di densità multidimensionali è possibile introdurre un equivalente dominio reciproco, che permette di ottenere notevoli semplificazioni sotto certi punti di vista; si può definire dunque la funzione caratteristica bidimensionale estendendo il concetto precedente, considerando le variabili reciproche ϑ e τ ,

considerando questa volta la mediazione della funzione di densità su un esponenziale con due componenti:

$$M(\vartheta, \tau) = \langle e^{j\vartheta x + j\tau y} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\vartheta x + j\tau y} P(x, y) dy dx$$

Esiste ovviamente anche la trasformazione duale alla precedente:

$$P(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\vartheta, \tau) e^{-j\vartheta x - j\tau y} P(x, y) d\vartheta d\tau$$

Considerando la somma degli esponenti dello stesso esponenziale come il prodotto di due esponenziali, si può analogamente a prima ricavare lo sviluppo in serie di Taylor, sfruttare la normalizzazione dell'integrale sul piano reale della funzione di densità, eguagliare alla definizione di polinomio in serie di Taylor come somma di monomi con coefficienti uguali alle derivate parziali, e ottenere, in maniera del tutto uguale a prima, un'espressione operativa in grado di calcolare semplicemente i momenti della funzione di densità multidimensionale:

$$\langle x^n y^m \rangle = \frac{1}{j^n j^m} \frac{\partial^{n+m}}{\partial \vartheta^n \partial \tau^m} M(\vartheta, \tau) \Big|_{\vartheta, \tau=0}$$

Una piccola nota aggiuntiva: come si sa dalle nozioni precedentemente introdotte, sostituendo "0" alla variabile reciproca della funzione caratteristica, si ottiene "1": in tal caso, infatti, l'integrale di mediazione si riduce essere un integrale sulla retta reale della funzione di densità, normalizzato a 1.

Questa osservazione può essere utile anche nel caso di funzioni di densità / funzioni caratteristiche multivariate: esiste infatti un interessante legame tra la funzione caratteristica multivariata e le funzioni caratteristiche marginali (nel caso che ovviamente esse esistano e siano rispettate): volendo ottenere, a partire da una funzione caratteristica multidimensionale una funzione caratteristica marginale, è possibile provare a ragionare così: annullando tutte le variabili reciproche tranne quella della quale si intende calcolare la marginale, tutti i contributi degli esponenziali si annulleranno, tranne quello interessato:

$$\begin{aligned} M(\vartheta, \tau) \Big|_{\tau=0} &= M(\vartheta, 0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\vartheta x + j0y} P(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\vartheta x} P(x, y) dy dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vartheta x} P(x) dx = M(\vartheta)$$

Si può dunque ripetere per l'altra variabile lo stesso ragionamento, ottenendo:

$$M(\vartheta, 0) = M(\vartheta)$$

$$M(0, \tau) = M(\tau)$$

Correlazione e dipendenza

Si è parlato di funzioni marginali, come d'altra parte del fatto che si han due variabili; ciò che ci si può chiedere, a questo punto, è: effettivamente, una variabile è indipendente dall'altra? In altre parole, il fatto che la funzione di densità, al variare del valore di una certa variabile assuma determinati valori, è indipendentemente dal variare dell'altra variabile?

Tra le varie definizioni introdotte, ne è stata introdotta una riguardante i momenti della densità, momenti misti; ciò che si può dire è che, se le variabili sono indipendenti, allora il momento misto di primo ordine è pari al prodotto dei momenti primi marginali:

$$\langle xy \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$$

Si introduce, a partire da questa equazione, un indicatore molto importante: la covarianza.

$$\text{cov}_{xy} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$$

A seconda del valore assunto, si potrà quantificare il grado di correlazione tra le due variabili, per quanto concerne la funzione di densità multivariata $P(x, y)$; date σ_x e σ_y le due radici delle varianze, si suol definire il coefficiente di correlazione ρ come:

$$\rho = \frac{\text{cov}_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Data la normalizzazione, il coefficiente di correlazione può variare da -1 a +1 per qualsiasi funzione di densità.

Si noti un fatto molto, molto importante: correlazione e dipendenza sono concetti imparentati, ma non assolutamente coincidenti: se esiste una qualche correlazione

tra le due variabili, esiste una certa dipendenza tra le due variabili; non è tuttavia detto che, se la correlazione è nulla, allora sia nulla anche la dipendenza tra le variabili (a meno di casi specifici eventualmente citati in seguito). La nozione appena introdotta permette di avere un indicatore qualitativo della dipendenza, della possibile presenza di dipendenza quantomeno, tra le variabili della funzione di densità, ma non è assolutamente un indicatore preciso e assoluto, a causa delle differenze tra correlazione e dipendenza: quello che l'indicatore fornisce infatti è un'informazione sui momenti primi e secondi (a causa della normalizzazione per le deviazioni standard), quindi, a meno di particolari ipotesi aggiuntive, si tratta di informazioni preziose ma al contempo viziose.

Media e varianza condizionale

Nella sezione precedente è stato introdotto un problema finora non considerato: il fatto che, data una funzione di densità multidimensionale $P(x, y)$, le variabili interne non siano indipendenti. Dal momento che molto spesso esistono casistiche di questo genere, è necessario introdurre alcune nozioni aggiuntive, basate sul fatto che, data una funzione di densità e una quantità che si intende variare al fine di determinare le variazioni "marginali" della grandezza finale, è necessario tener conto delle condizioni in cui si trova l'altra variabile. Si introduce quindi una notazione del tipo:

$$P(y|x)$$

Dove si intende indicare il fatto che si ha una densità al variare della variabile y , a seconda delle condizioni di una variabile x fissata a un certo valore. Questo tipo di notazione indica una "densità condizionale".

Ricavare una densità condizionale a partire dalle densità marginali e congiunte è relativamente semplice: partendo dalla densità congiunta, al fine di determinare la densità condizionale fissata una certa variabile, è necessario normalizzare la congiunta per la marginale:

$$P(y|x) = \frac{P(x, y)}{P(x)} \quad P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$

Precedentemente, è stato introdotto il coefficiente di correlazione ρ , ossia un indicatore in grado di quantificare la correlazione tra due variabili al variare delle quali una funzione di densità restituisce valori. Le definizioni appena introdotte possono permettere di trovare non la definizione di correlazione, bensì la definizione di dipendenza: se infatti capita che:

$$P(y|x) = \frac{P(x, y)}{P(x)} = P(y)$$

Significa che:

$$P(x, y) = P(x) \cdot P(y)$$

Quindi, si può dire che le funzioni di densità siano indipendenti, e non solo scorrelate tra loro.

Fatta l'introduzione, si estende il concetto di momento, e nella fattispecie quelli di media e varianza, per quanto concerne le densità condizionali; si definisce $\langle y \rangle_x$ la media condizionale della densità di probabilità $P(x, y)$ al variare della sola y , fissato un valore di x , come:

$$\langle y \rangle_x = \int_{-\infty}^{+\infty} yP(y|x)dy = \frac{1}{P(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} yP(x, y)dy$$

Come il concetto di media si può estendere a quello di media condizionale, così quello di varianza può essere esteso al concetto di varianza condizionale; si definisce quindi $\sigma_{y|x}^2$ la varianza condizionale, per quanto riguarda la funzione di densità $P(x, y)$, considerando la variabile y e fissata x :

$$\sigma_{y|x}^2 = \frac{1}{P(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \langle y \rangle_x)^2 P(x, y)dy = \langle y^2 \rangle_x - \langle y \rangle_x^2$$

Relazioni tra medie e varianze condizionali e globali

Per concludere, si presenta un ultimo risultato, piuttosto importante per quanto riguarderà l'analisi in tempo-frequenza. Sono state analizzate, mediante questa analisi astratta (senza introdurre un significato fisico alle grandezze) medie locali (calcolate su funzioni di densità marginali) e medie globali (calcolate su funzioni di densità congiunte). Si possono trovare collegamenti interessanti tra le due categorie di medie, collegamenti che verranno ora esposti.

Si consideri la media condizionale considerando la variabile y , fissata x , ossia $\langle y \rangle_x$: questa funzione rappresenta una media ottenuta fissando un singolo valore della variabile x ; sommando tutti i contributi (integrando) della variabile x , si può pensare di ottenere la media globale rispetto alla variabile y ; si verifica se è vero, calcolando la media marginale rispetto alla sola variabile y :

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yP(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yP(y|x)P(x)dydx$$

Recuperando le definizioni precedentemente introdotte, si ottiene:

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle y \rangle_x P(x) dx$$

Un ragionamento analogo può essere effettuato per quanto riguarda la varianza globale e la varianza condizionale: si media la funzione di densità marginale rispetto a x , $P(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{y|x}^2 P(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \langle y \rangle_x)^2 P(x, y) dy dx = \\ &= \langle y^2 \rangle - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle y \rangle_x^2 P(x) dx \end{aligned}$$

Al membro destro dell'equazione, a questo punto, si somma e sottrae il termine $\langle y \rangle^2$, ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{y|x}^2 P(x) dx = \langle y \rangle^2 - \langle y \rangle^2 + \langle y^2 \rangle - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle y \rangle_x^2 P(x) dx$$

A questo punto, due osservazioni: da un lato, si sa che la varianza si può calcolare come differenza tra il momento secondo e il quadrato della media, ossia:

$$\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \sigma_y^2$$

D'altro canto, si ha che:

$$\langle y \rangle^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle y \rangle_x^2 dx$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{y|x}^2 P(x) dx = \sigma_y^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} (\langle y \rangle_x^2 - \langle y \rangle^2) dx$$

Questa dimostrazione porta a un'interessante conclusione: la varianza globale è sempre composta da due contributi: da un lato si ha la media della varianza standard, dall'altro lo scarto della media condizionale rispetto alla media globale.

2.2 Densità tempo-frequenza

A questo punto della trattazione sono state poste tutte le basi necessarie all'introduzione di uno studio formale dell'analisi in tempo-frequenza. Come già fatto intuire precedentemente, lo scopo fondamentale dell'analisi in tempo-frequenza e introdurre funzioni in grado di descrivere la densità di energia di un segnale contemporaneamente nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza, ossia di poter quantificare quali armoniche, in un certo tempo, producono l'energia del segnale.

Si noti che a questo punto tornano utili tutti i discorsi introduttivi concernenti le densità multidimensionali: in una semplice analisi di Fourier o nel dominio del tempo, si considera di fatto una sola variabile; in un'analisi classica si considera dunque solo una densità monodimensionale. Quando si studiano, mediante la stessa funzione di densità, i contributi contemporaneamente in due domini, tornano utili molti dei concetti precedentemente introdotti.

2.2.1 Caratteristiche di una distribuzione tempo-frequenza

Ci si concentrerà principalmente, come già preannunciato, sullo studio di densità di energia e potenza (soprattutto energia), dove si considereranno sostanzialmente tre grandezze: il segnale nel dominio del tempo $s(t)$, la sua trasformata di Fourier $S(\nu)$, e la densità tempo-frequenza congiunta di energia $P(t, \nu)$. Dei segnali nel dominio di tempo e frequenza, spesso si considereranno i moduli quadri, ossia le densità energetiche nel tempo ($|s(t)|^2$) e le densità spettrali di energia ($|S(\nu)|^2$).

Marginali

Una delle più importanti condizioni da soddisfare, in una distribuzione tempo-frequenza, è il rispetto delle marginali: come già introdotto in un senso puramente astratto, per funzioni di densità marginali si intendono quelle funzioni di densità, in una sola variabile, ottenute integrando la densità multidimensionale in tutte le altre variabili. Nella fattispecie, in ambito di analisi in tempo-frequenza, le funzioni marginali di densità (energetiche) sono:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \nu) d\nu \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \nu) dt$$

In questo caso, tuttavia, ci si prefigge un obiettivo (purtroppo non sempre raggiungibile, come si vedrà studiando una delle più importanti distribuzioni tempo-frequenza): il fatto che queste densità marginali coincidano con le densità temporali

e spettrali di potenza, ossia con i moduli quadri rispettivamente del segnale variabile nel dominio del tempo e della sua trasformata di Fourier; se questo fatto è rispettato, ossia se valgono le seguenti condizioni:

$$|s(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \nu) d\nu$$

$$|S(\nu)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \nu) dt$$

Allora si dice che “la distribuzione tempo-frequenza rispetta i marginali”.

Energia totale

Riprendendo le nozioni introdotte generalmente, è possibile calcolare nel caso specifico delle distribuzioni tempo-frequenza l'energia totale del segnale, mediante il seguente calcolo:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \nu) d\nu dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu$$

Si noti che questa condizione è più debole rispetto al rispetto delle marginali: se una funzione di densità soddisfa le marginali, automaticamente il metodo di calcolo dell'energia totale appena proposto è assolutamente valido; nel caso tuttavia il teorema dell'energia totale sia valido, non è possibile aggiungere nulla al calcolo delle marginali: questo teorema è in grado di proporre un metodo di calcolo per l'energia, senza tuttavia introdurre ipotesi aggiuntive sulle singole densità nel tempo e nella frequenza, quindi non garantendo condizioni sufficienti per il rispetto delle marginali.

Positività

Una delle caratteristiche fondamentali per quanto concerne le distribuzioni in tempo-frequenza è la positività, ossia il fatto che esse possano assumere esclusivamente valori maggiori o uguali di 0. Anche per quanto concerne questa proprietà, come per il caso delle marginali, esistono casi fondamentali di distribuzioni in tempo-frequenza che non rispettano questa ipotesi; a differenza delle marginali, tuttavia, questa fornisce limiti ben più pesanti, dal momento che si perde il significato energetico attribuibile alla funzione: essa non è più, di fatto, una densità di energia, dal momento che l'energia negativa non può avere significato fisico.

Si vedrà in seguito che uno dei criteri a partire dai quali si progetta una distribuzione in tempo-frequenza è proprio la positività della distribuzione.

Medie e varianze

Si può riprendere in maniera del tutto naturale i risultati precedentemente ottenuti, per presentarli in ambito di tempo-frequenza; dai risultati precedenti, si sa che:

$$P(\nu|t) = \frac{P(t, \nu)}{P(t)} \quad P(t|\nu) = \frac{P(t, \nu)}{P(\nu)}$$

Dove $P(t)$ e $P(\nu)$ sono le marginali delle distribuzioni; si noti che questa teoria è valida anche se le marginali non sono soddisfatte: questa teoria è assolutamente generale, e prescinde dal fatto che le distribuzioni marginali coincidano effettivamente con le densità temporali e spettrali di energia.

Si ha che:

$$\langle \nu \rangle_t = \frac{1}{P(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu P(t, \nu) d\nu = \varphi'(t)$$

$$\langle t \rangle_\nu = \frac{1}{P(\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} t P(t, \nu) dt = -\psi'(\nu)$$

Cosa è stato ottenuto? Beh, $\varphi'(t)$ rappresenta la frequenza istantanea per un dato t , e dualmente $\psi'(\nu)$ rappresenta il tempo medio nel quale vi è una certa frequenza, ossia il tempo dove mediamente sono contenute certe frequenze.

Di queste grandezze, è possibile introdurre la varianza, indicatore classico della variabilità, utilizzando il momento secondo, ossia la deviazione standard condizionale:

$$\sigma_{\nu|t}^2 = \frac{1}{P(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu - \langle \nu \rangle)^2 d\nu$$

$$\sigma_{t|\nu}^2 = \frac{1}{P(\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 dt$$

Cosa significa tutto ciò? Sono state definite le medie condizionali di tempo e frequenza, dove si considera in sostanza, data una certa posizione del tempo, la frequenza media più presente in esso, e viceversa per frequenza e tempo. Le varianze hanno lo stesso significato che è stato finora introdotto: verificare e quantificare l'affidabilità del valore medio: se a un dato istante di tempo le frequenze in gioco sono molte e diverse, la varianza sarà molto elevata, dal momento che la media sarà

poco rappresentativa; se dualmente si ha una concentrazione spettrale nei dintorni di una certa frequenza, la varianza sarà piccola. Stesso discorso per il tempo: se, data una certa frequenza, essa è presente solo a un dato istante di tempo, la varianza sarà bassa.

Un esempio in grado di chiarire quest'idea può essere l'uso di un segnale monocromatico: dal momento che un segnale monocromatico ha una sola frequenza per qualsiasi istante di tempo, si può dire che la sua rappresentazione in tempo-frequenza sia univoca, dunque la media in frequenza sarà concentrata sul valore della frequenza del segnale, mentre la varianza in frequenza sarà nulla. Per il tempo, è molto più problematico: la stessa frequenza esiste in ogni istante di tempo, dunque, se da un lato l'eguaglianza tempo-frequenza è molto semplice da studiare sotto il punto di vista delle frequenze esistenti, più difficile sarà per i tempi in cui esistono, poiché la stessa frequenza esisterà in tutti gli istanti di tempo.

Invarianza a traslazione in tempo-frequenza

Dato un generico segnale nel tempo $s(t)$, e un segnale a esso identico ma traslato nel tempo di un ritardo t_0 , $s(t - t_0)$, si vuole capire quale dovrebbe essere l'andamento della distribuzione corrispondente, in tempo-frequenza. Ci si può aspettare che, se si ha subito una traslazione di t_0 sulla retta temporale, allora si subirà una traslazione di t_0 anche nel piano tempo-frequenza, ottenendo:

$$P(t, \nu) \longrightarrow P(t - t_0, \nu)$$

Lo stesso discorso può essere fatto per quanto riguarda la frequenza: se si trasla lo spettro di un fattore ν_0 , ottenendo, a partire dalla trasformata di Fourier di $s(t)$, $S(\nu)$, la funzione $S(\nu - \nu_0)$. Ci si può aspettare che dunque si abbia anche una traslazione per quanto concerne la componente spettrale del piano tempo-frequenza:

$$P(t, \nu) \longrightarrow P(t, \nu - \nu_0)$$

I due effetti si possono anche gestire contemporaneamente: se che nel dominio del tempo si introduce un ritardo nel segnale e lo si moltiplica per un esponenziale complesso, si ottengono, nel piano tempo-frequenza, da un lato la traslazione temporale, dall'altro la traslazione spettrale¹.

$$s(t) \longrightarrow e^{j2\pi\nu_0 t} \implies P(t, \nu) \longrightarrow P(t - t_0, \nu - \nu_0)$$

¹Per la dimostrazione di queste proprietà, considerate singolarmente, si faccia riferimento all'Appendice B : Trasformata di Fourier

Riscaldamento

Dato un generico segnale nel dominio del tempo $s(t)$, dato il segnale $s_r(t)$ definito come:

$$s_r(t) = \sqrt{a} s(at)$$

Si tratta di una versione riscalata nel tempo di $s(t)$. A seconda di a , il nuovo segnale sarà più veloce o più lento, dunque a supporto più compatto o più esteso. Come si sa dalla Teoria dei Segnali (vedi Appendice B), lo spettro del segnale è pari a:

$$S_r(\nu) = \frac{1}{\sqrt{a}} S\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Cosa significa ciò in tempo-frequenza? Beh, combinando i due effetti del riscaldamento, si ha semplicemente che:

$$P_s(t, \nu) = P\left(at, \frac{\nu}{a}\right)$$

Questo fatto è abbastanza scontato, a partire dalle sole conoscenze dell'analisi in frequenza rispetto all'analisi nel tempo: riscaldare un segnale nel dominio del tempo comporta un riscaldamento inversamente proporzionale a quello effettuato nel dominio della frequenza; quello che si avrà in tempo-frequenza sarà un risultato del tutto analogo, combinando tuttavia i due effetti sulla distribuzione congiunta risultante.

2.3 Principio di indeterminazione in tempo-frequenza

Come si sa dalla Teoria dei Segnali, per quanto riguarda lo studio di un segnale nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza, esiste un particolare principio, detto "principio di indeterminazione", che fornisce limiti riguardanti i supporti dei segnali nei due domini.

Ragionando separatamente su di un generico segnale nel dominio del tempo $s(t)$ e sulla sua trasformata di Fourier $S(\nu)$, si può vedere che:

$$T^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |s(t)|^2 dt$$

$$B^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu - \langle \nu \rangle)^2 |S(\nu)|^2 dt$$

Dove ovviamente $s(t)$ e $S(\nu)$ devono essere legati mediante la coppia di integrali di Fourier.

Calcolando le varianze da una distribuzione congiunta tempo-frequenza, si può ottenere qualcosa di interessante:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 P(t, \nu) dt d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 P(t) dt$$

$$\sigma_\nu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu - \langle \nu \rangle)^2 P(t, \nu) dt d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu - \langle \nu \rangle)^2 P(\nu) d\nu$$

Al fine di legare il risultato del principio di indeterminazione valido sulle singole variabili in un risultato più generale, basato sullo studio dell'indeterminazione in tempo-frequenza causata da un'eccessiva varianza (come precedentemente descritto), è necessaria un'ipotesi fondamentale: il fatto che le marginali siano rispettate. In tal caso, si può dire che il principio di indeterminazione sia estensibile al caso di densità congiunte in tempo-frequenza.

Supponendo dunque di rispettare i marginali, vi è un ulteriore problema: in tempo-frequenza, ossia analizzando il segnale contemporaneamente nel tempo e nella frequenza, non esiste un metodo univoco per “unificare” i due domini, ossia non esiste un'unica distribuzione in grado di rappresentare in un piano tempo-frequenza un determinato segnale². Si hanno informazioni ulteriori: si sa che la distribuzione congiunta avrà supporto non limitato o nel tempo, o nella frequenza, o in entrambi, indipendentemente dalla distribuzione.

Il risultato fondamentale che si ottiene, parlando di principio di indeterminazione, è il seguente:

$$\sigma_y \cdot \sigma_x \geq \eta$$

Dove η è una costante universale, calcolabile come un funzionale del segnale.

Questa condizione è rispettata sempre, indipendentemente dal soddisfare la condizione sulle densità marginali³.

²Si approfondirà l'argomento nel prossimo capitolo, dove si proporranno le idee rudimentali dietro al progetto di distribuzioni tempo-frequenza

³Il significato della costante η è parzialmente approfondito nell'Appendice B, riguardante la trasformata di Fourier, riferendosi al principio di indeterminazione; non è stata comunque introdotta un'analisi del principio di indeterminazione su operatori generici, considerando dunque una casistica limitata.

2.3.1 Proprietà del supporto finito debole e forte

A partire dal principio di indeterminazione è possibile effettuare, come già introdotto, alcune osservazioni concernenti il supporto della funzione di densità congiunta tempo-frequenza. Una prima occasione in cui si è parlato di supporto, riguarda il riscaldamento: come già noto dalla Teoria dei Segnali, un riscaldamento in un dominio comporta nel dominio reciproco un riscaldamento inversamente proporzionale.

Si supponga che si abbia, nel dominio del tempo, un segnale non nullo in un intervallo di tempo compreso tra due istanti t_1 e t_2 , $t_1 < t_2$. Essendo il segnale nullo al di fuori degli istanti di tempo, ci si potrebbe aspettare che la distribuzione in tempo-frequenza del segnale sia nulla, prima e dopo i due tempi-limite: in questo caso, si dice che la distribuzione abbia un supporto finito debole nel tempo, ossia che:

$$P(t, \nu) = 0, t \notin (t_1; t_2)$$

Si noti che questa condizione non è per forza rispettata dalle varie distribuzioni tempo-frequenza: rientra tra le caratteristiche che si desiderano avere, al momento del progetto di una certa distribuzione, ma non sempre è possibile ottenerla.

Lo stesso discorso si potrebbe applicare in maniera del tutto analoga alla frequenza: dire che la distribuzione ha supporto debole in frequenza, significa che si possono identificare due frequenze limite, ν_1 e ν_2 , al di fuori delle quali lo spettro della funzione è nullo, sia nella trasformata di Fourier del segnale sia nella sua rappresentazione tempo-frequenza:

$$P(t, \nu) = 0, \nu \notin (\nu_1; \nu_2)$$

Esiste, in ambito di tempo-frequenza, una terza condizione: il fatto che vi sia in uno dei due domini un gap, ossia che il segnale per un certo intervallo di tempi sia nullo, in tutti gli altri no (o, dualmente, che lo spettro sia nullo per un certo range di frequenze e per tutti gli altri no). Trattando ad esempio il caso in cui il segnale nel dominio del tempo vale zero per un certo intervallo di tempo, si potrebbe desiderare, dalla distribuzione in tempo-frequenza, che anch'essa sia nulla in quell'intervallo di tempo. Se la distribuzione soddisfa queste ipotesi, si dice che essa abbia un "supporto finito forte".

Si noti ancora una volta che una distribuzione tempo-frequenza non può essere concentrata in una regione finita del piano tempo-frequenza: il principio di indeterminazione pone chiari limiti sui supporti dei singoli segnali nel dominio del tempo e

nel dominio della frequenza, impedendo di fatto la possibilità di avere una condizione di questo genere.

2.3.2 Osservazioni finali

Il fatto che esista, in ambito di tempo-frequenza (ma anche semplicemente in ambito di analisi in frequenza tradizionale), un principio di indeterminazione, è riconducibile allo studio delle funzioni di densità marginali, o, più precisamente, al fatto che esse sono correlate: variando le caratteristiche di una delle due marginali, automaticamente cambiano anche le caratteristiche dell'altra. Questo permette di concludere che le variabili tempo e frequenza non siano tra loro scorrelate.

Ciò si può osservare introducendo un maggior formalismo matematico: come dimostrato, nel caso sia rispettata la condizione sui marginali, il principio di indeterminazione è applicabile alle varianze globali dei segnali. Un metodo di calcolo delle varianze è basato sull'uso di un teorema precedentemente dimostrato, affermando che:

$$\sigma_{\nu}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\nu|t}^2 P(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\langle \nu \rangle_t - \langle \nu \rangle)^2 P(t) dt$$

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{t|\nu}^2 P(\nu) d\nu + \int_{-\infty}^{+\infty} (\langle t \rangle_{\nu} - \langle t \rangle)^2 P(\nu) d\nu$$

Volendo ricollegarsi al principio di indeterminazione, si possono moltiplicare le due varianze, e trovare che il valore risultante sarà sempre maggiore di una certa costante (che sarà η^2).

Caratterizzando le distribuzioni tempo-frequenza in questi termini, è possibile dimostrare, per ciascuna di esse, di quanto si discosti dalla condizione base del principio di indeterminazione.

Capitolo 3

Principali distribuzioni tempo-frequenza

In questo capitolo della trattazione verranno presentate alcune delle principali distribuzioni utilizzate nell'ambito dell'analisi in tempo-frequenza, al fine di fornire i mezzi fondamentali per uno studio di questo tipo. A un'analisi formale di queste distribuzioni si aggiungeranno alcuni esempi teorici e pratici di analisi in tempo-frequenza, ottenuti mediante il software MATLAB, munito del "Time-Frequency Toolbox".

3.1 STFT e Spettrogramma

Uno degli strumenti storicamente (e non solo) più importanti nell'ambito dell'analisi di segnali non stazionari è la STFT, ossia la Short Time Fourier Transform (letteralmente, trasformata di Fourier a tempo corto). L'idea nascosta dietro questo tipo di analisi è fondamentalmente la seguente: come si sa dall'introduzione, considerando la trasformata di Fourier dell'intero segnale si ottiene sostanzialmente una rappresentazione spettrale del medesimo, nella quale quindi si ha, per ciascuna armonica, il contributo che essa fornisce durante l'intero segnale, ossia considerato per tutti gli istanti di tempo nei quali esso esiste. L'idea alla base della STFT è basata sul seguente stratagemma: anziché considerare l'intero segnale, esso viene suddiviso, al variare del tempo, in molti intervalli; anziché trasformare l'intero segnale, si considera per ciascuno degli intervalli la trasformata di Fourier, in modo da avere, invece di un'unico spettro per l'intero segnale, molti spettri "temporalmente locali", in grado di associare un contenuto spettrale in ciascun intervallo temporale. Viene effettuata la cosiddetta operazione di "finestramento" nel dominio del tempo e in quello della

frequenza: si considera una funzione “a finestra”, “a porta” $h(t)$, in grado di limitare il segnale entro un certo intervallo di tempo; per ciascuna finestra, traslata di un tempo τ , si considererà la trasformata di Fourier, che avrà dunque una forma del tipo:

$$X(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t - \tau)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Questo, di fatto, è il modo più semplice di fare analisi in tempo-frequenza: supponendo di considerare un generico segnale, si potrà avere un'approssimazione del contenuto spettrale del segnale per un intervallo di valori di tempo, di fatto ottenendo una maggior localizzazione rispetto alla trasformata di Fourier: mediante la trasformata semplice, come già detto, è possibile ottenere informazioni globali; in questo caso, con questo stratagemma, scegliendo opportunamente la finestra temporale $h(t)$, è possibile localizzare maggiormente (tendenzialmente a proprio piacimento, a meno di alcuni problemi che verranno tra breve esposti) il contenuto spettrale del segnale, assegnando per ciascun intervallo di tempo un contenuto spettrale¹. La localizzazione non è naturalmente massima: quello che si considera è una sorta di “spettro mediato” nell'intervallo di tempo, dunque non è possibile garantire il fatto che, per un istante di tempo, vi sia esattamente quel contenuto spettrale (cosa che difficilmente sarà realizzabile in ambito tempo-frequenza, come si vedrà); si tratta comunque di un risultato semplice e utilizzato molto frequentemente.

Una volta definita la STFT, lo spettrogramma è un'estensione del tutto banale: lo spettrogramma rappresenta semplicemente la densità tempo-frequenza di energia ottenuta a partire dalla STFT, dunque è calcolabile mediante il calcolo del modulo quadro della STFT appena definita:

$$P_{SP}(t, \nu) = |X(t, \tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\tau - t)e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \right|^2$$

3.1.1 Proprietà dello spettrogramma

Una volta introdotto un discorso generale, si introduce uno studio alle principali caratteristiche della distribuzione tempo-frequenza. Verranno riprese le nozioni in-

¹Esiste una distribuzione duale, ossia la SFTT (Short-Frequency Time Transform), in grado di fornire una descrizione duale, più indicata della STFT quando si intende studiare quali siano i tempi nei quali esiste una certa frequenza. La definizione è del tutto duale a quella della STFT, e non verrà considerata ulteriormente.

trodotte nello scorso capitolo e applicate direttamente allo spettrogramma, in modo da evidenziarne i pregi e i limiti.

Energia totale

L'energia totale, come è ben noto, si può ottenere integrando l'espressione operativa dello spettrogramma su tutto il piano tempo-frequenza. Si sceglie, come metodo di calcolo, quello basato sul calcolo della funzione caratteristica dello spettrogramma; come si sa dalle nozioni precedenti, si può dire che:

$$P(t, \nu) = |X_t(\nu)|^2 = |x_\nu(t)|^2$$

La funzione caratteristica sarà dunque pari a:

$$\begin{aligned} M_{SP}(\vartheta, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_t(\nu)|^2 e^{j2\pi t(\vartheta+\nu)} dt d\nu = \\ &= A_x(\vartheta, \tau) \cdot A_h(-\vartheta, \tau) \end{aligned}$$

Dove:

$$A_x(\vartheta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^* \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) \cdot x \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) e^{j2\pi\vartheta t} dt$$

A partire dalla funzione caratteristica si può calcolare l'energia, scrivendo che:

$$E_{SP} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{SP}(t, \nu) dt d\nu = M_{SP}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt$$

poiché solitamente si sceglie che l'energia della finestra sia normalizzata a 1, l'energia dello spettrogramma sarà coincidente con l'energia del segnale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = 1 \implies E_{SP} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Marginali

Come si sa, le funzioni marginali si possono ottenere integrando sulla retta identificata dalla variazione della variabile opposta rispetto alle funzioni di densità che si intendono calcolare; nel caso del tempo, ad esempio, la funzione marginale si può calcolare come:

$$\begin{aligned}
P(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X_t(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\tau-t)x^*(\tau')h^*(\tau'-t)e^{-j2\pi\nu(\tau-\tau')}d\tau d\tau' d\nu = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\tau-t)x^*(\tau')h^*(\tau'-t)\delta(\tau-\tau')d\tau d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 |h(\tau-t)|^2 d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} A_x^2(\tau)A_h^2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

In modo del tutto duale, si può verificare che:

$$P(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(\nu')B_H^2(\nu-\nu')d\nu'$$

Dove per $B(\nu)$ si intende una funzione tale per cui:

$$B^2(\nu) = |S(\nu)|^2$$

Ciò che si può verificare da questi calcoli è che lo spettrogramma non rispetta la condizione sulle marginali, ossia che:

$$P(t) \neq |s(t)|^2$$

$$P(\nu) \neq |S(\nu)|^2$$

Il fatto che le marginali non siano soddisfatte è collegabile al meccanismo interno all'idea stessa di spettrogramma: la finestrazione, ossia il fatto che si introduca una finestra temporale modifica di fatto le caratteristiche del segnale. Osservando gli integrali, si vede chiaramente che l'unica differenza sta in effetti nel fatto che si ha un contributo dettato anche dal modulo quadro della funzione finestra. Quello che capita è in pratica il fatto che l'energia della finestra modifica l'energia globale della distribuzione, rendendo impossibile, dunque, il calcolo delle marginali, dal momento che contengono contributi di fatto sconosciuti.

Proprietà di supporto finito

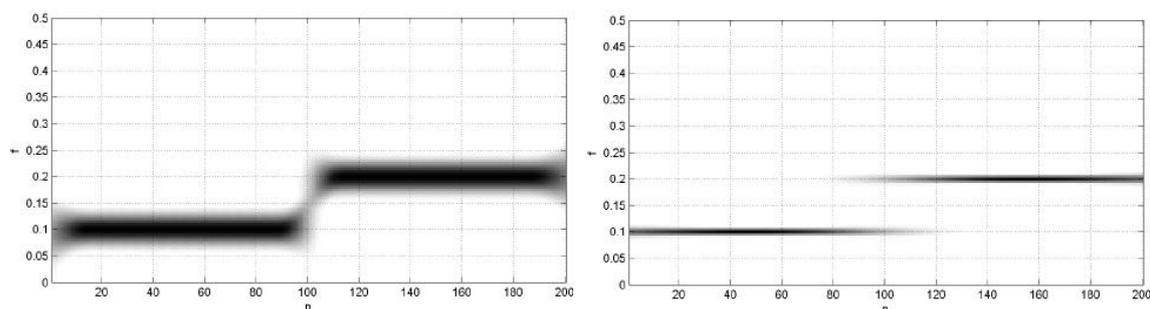
Ci si potrebbe porre un'ulteriore domanda: esistono condizioni tali per cui lo spettrogramma sia in grado di avere un supporto finito? Si supponga che il segnale sia nullo prima di un certo tempo t_0 , e si supponga di considerare, nel piano tempo-frequenza ricavato a partire dallo spettrogramma, un istante di tempo inferiore a t_0 . Non è assolutamente detto che prima di t_0 lo spettrogramma produca solo valori nulli: ciò dipende, di fatto, dalla finestra temporale, che potrebbe “campionare” valori anche positivi, coinvolgendo così lo spettrogramma. Quando una finestra non è sufficientemente precisa da riuscire a ottenere esattamente in prossimità dell'inizio dell'intervallo di punti in cui il segnale è nullo una mediazione dello spettro tale da permettere che il segnale sia nullo (cosa molto, molto spesso verificata), la proprietà del supporto finito non è verificata. Si deve dunque dire che, generalmente, questa proprietà, per lo spettrogramma, non è verificata. Se una finestra di lunghezza non idonea arriva a campionare armoniche successive a quelle nulle, in modo da introdurre un contenuto spettrale anche dove, nel segnale reale, non ve ne sarebbe.

Cenni alla scelta della larghezza di finestra idonea

L'idea alla base dello spettrogramma, come già detto, è quella di “campionare” una parte del segnale e farne la trasformata di Fourier nell'intervallo. Il discorso è stato approfondito senza considerare di fatto un elemento molto importante: la larghezza della finestra temporale; al variare della larghezza della finestra, si potrà ottenere una diversa “risoluzione” nel tempo o nella frequenza. Per “risoluzione” si vuole intendere la “precisione”, la “definizione”, l'assenza di indeterminazione nel diagramma tempo-frequenza: nel caso del chirp lineare, ad esempio, una buona risoluzione permetterebbe di visualizzare il chirp sostanzialmente come una retta verticale, la cui pendenza è data dalla rapidità di variazione della frequenza del segnale. Intuitivamente, si può dire ciò: se si vuole avere una buona localizzazione, una buona risoluzione temporale, è necessario considerare una finestra corta, limitata. Per il principio di indeterminazione non è possibile ottenere una risoluzione arbitraria in tempo e frequenza dunque, a seconda di ciò che si interessa ottenere, si sceglierà una finestra corta (per migliorare la risoluzione nel tempo a scapito di quella in frequenza) o lunga (per migliorare la risoluzione in frequenza a scapito di quella nel tempo).

Si cerca di spiegare in maniera più “visiva” questo fatto:

Come si vede, scegliendo una finestra corta, la definizione nel tempo è molto elevata: al variare del tempo, si distingue facilmente quando si ha la variazione di



frequenza nel segnale; il valore della frequenza nei vari tempi non è tuttavia ben definito: il fatto di aver utilizzato una finestra così corta ha comportato il fatto di avere una grossa indeterminazione in frequenza, il che si traduce come “egual possibilità di avere più frequenze per gli stessi istanti di tempo”, anche quando di fatto il segnale non ha un contenuto spettrale di questo genere.

Usando una finestra lunga, accade il contrario: lo spettrogramma “ritarda” a campionare gli elementi, avendo sicuramente un’ottima precisione in frequenza, dal momento che i tempi consentono di localizzare in maniera più efficace il contenuto spettrale del segnale, ma creando, per i tempi “limite” tra i “salti” tra valori di frequenze, una sovrapposizione: per gli stessi istanti di tempo, “limite”, sono di fatto riconosciuti, dallo spettrogramma, più valori di frequenza, a causa di una “cattiva mediatura” provocata dalla finestra temporale troppo lunga, che campiona armoniche “di troppo”.

Positività

Una delle condizioni fondamentali affinché una funzione sia una densità, come già precedentemente detto, è la positività, ossia il fatto che essa assuma sempre valori maggiori o uguali di 0. Nel caso dello spettrogramma, la condizione è banalmente verificata, dal momento che essa viene definita come il modulo quadro della Short Time Fourier transform.

3.1.2 Alcuni esempi teorico/pratici

Per concludere ciascuna delle descrizioni delle distribuzioni tempo-frequenza che saranno analizzate fino al termine della trattazione, si proporranno alcuni esempi pratici, basati sull’uso del software di calcolo numerico MATLAB; per chi non lo conoscesse, MATLAB è un potente software in grado di ottenere diversi tipi di elabo-

razioni dei dati in ingresso, siano essi in forma scalare o vettoriale. Su MATLAB si appoggiano diversi tipi di toolbox, in grado di effettuare le più svariate operazioni. Nel caso della trattazione, si utilizza il “Time-Frequency Toolbox”, ossia una collezione di script implementanti le principali tecniche di analisi in tempo-frequenza, tra quelle descritte durante la trattazione, recuperato dal sito:

<http://tftb.nongnu.org>

Dal momento che questo è il primo esempio pratico, verrà proposta una presentazione dettagliata dei segnali introdotti, per poi osservare un’applicazione pratica concernente la distribuzione appena analizzata, ossia lo spettrogramma.

Al fine di considerare diverse casistiche, verranno considerati sostanzialmente tre segnali:

- Un chirp lineare;
- Due chirp lineari, considerati assieme (mediante operazione di somma, consentita dalla linearità delle trasformazioni utilizzate);
- Un segnale sperimentale, prelevato dal sito internet precedentemente proposto, contenente il suono emesso da un pipistrello.

I segnali (una volta posizionati tutti gli script .m nella cartella di lavoro di MATLAB) vengono caricati mediante il seguente script:

```
clear all
close all

load batsig
sig0 = fmlin(128, 0, 0.5, 64);
sig1 = fmlin(128, -0.2, 0, 64);
sig2 = fmlin(128, 0, 0.2, 64);
sig = sig1 + sig2;
```

Il segnale “sig0” è il chirp lineare considerato singolarmente; “sig1” e “sig2” sono i due chirp, che verranno sommati nel segnale risultante “sig”. Ciascun chirp lineare viene ottenuto mediante il comando “fmlin()” (ossia, segnale modulato in frequenza, con variazione lineare), i cui parametri sono il numero di punti (scelta 128 in quanto potenza di 2, al fine di semplificare i conti, come MATLAB suggerisce in fase di definizione del segnale), la frequenza normalizzata di partenza, la frequenza normalizzata di termine, e un valore temporale di riferimento (si è scelto il 64esimo punto, ossia il punto “centrale”). I dati del segnale sperimentale si trovano nella variabile “batsig”, contenuta nell’ambiente di lavoro (workspace) dopo aver eseguito il precedente script. I risultati proposti nella trattazione sono stati ottenuti mediante MATLAB 7.5.0 (R2007b), regolando mediante la GUI del Time-Frequency Toolbox alcune opzioni: si sceglie di proporre, per ogni analisi in tempo-frequenza effettuata, il segnale nel dominio del tempo, il segnale nel dominio della frequenza, con due visualizzazioni tempo-frequenza: una bidimensionale, in modalità “pcolor”, una in modalità “surf”, tridimensionale.

Date queste premesse, è possibile presentare i risultati dell’analisi dei tre segnali, per quanto riguarda lo spettrogramma.

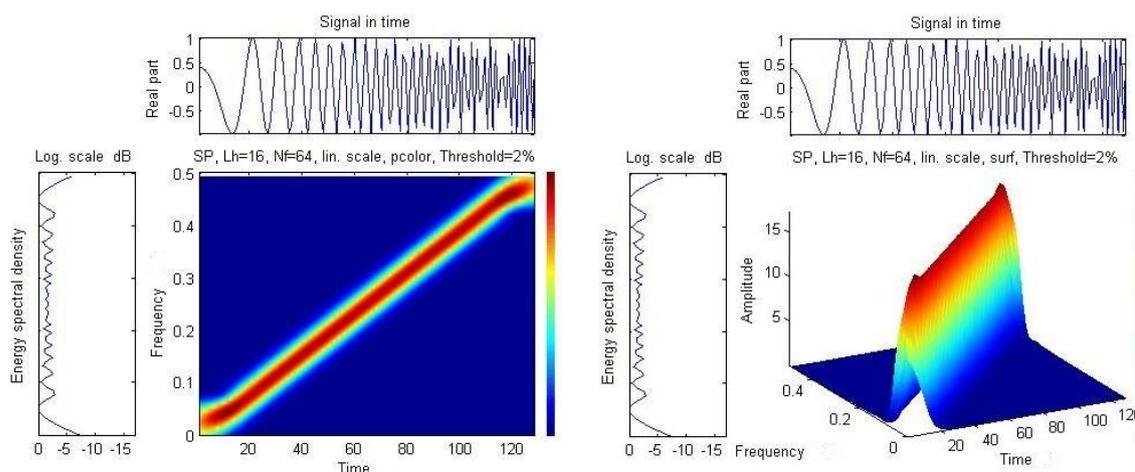
Chirp lineare singolo

L’analisi mediante spettrogramma del chirp lineare singolo, ottenuta mediante il seguente comando:

```
tfrsp(sig0)
```

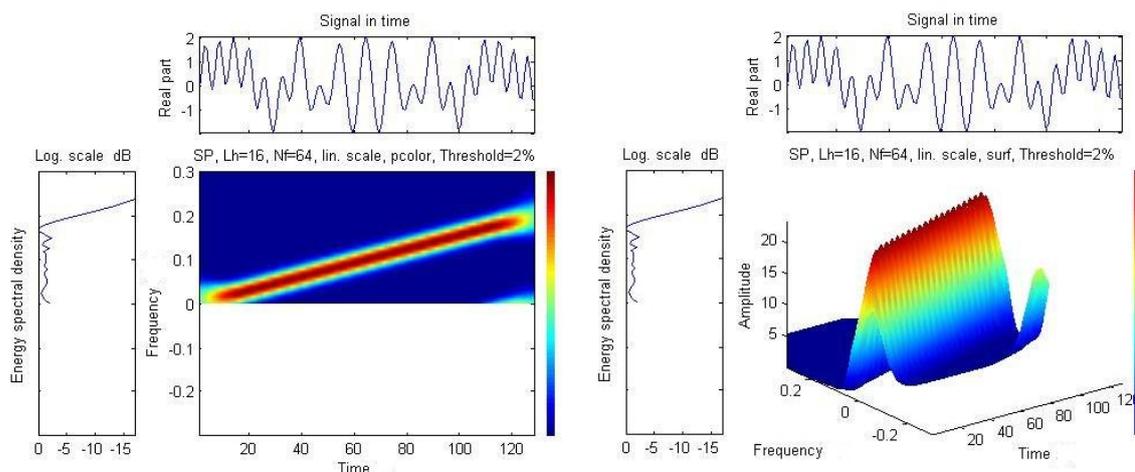
Ha prodotto i seguenti risultati:

Come finestra per lo spettrogramma non sono state introdotte opzioni; il TFTB di base utilizza una finestra di Hamming, ossia una particolare finestra a coseno rialzato. Si può osservare che le rappresentazioni sono assolutamente coincidenti con quelle che ci si potrebbero aspettare da un chirp: crescita lineare della frequenza al variare del tempo. La rappresentazione non è tuttavia eccellente: si ha una cattiva “definizione” dell’immagine, causata dal compromesso selezionato della finestra di Hamming al fine di ottimizzare, per quanto sia possibile, la definizione stessa e la localizzazione delle frequenze.



Somma di due chirp lineari

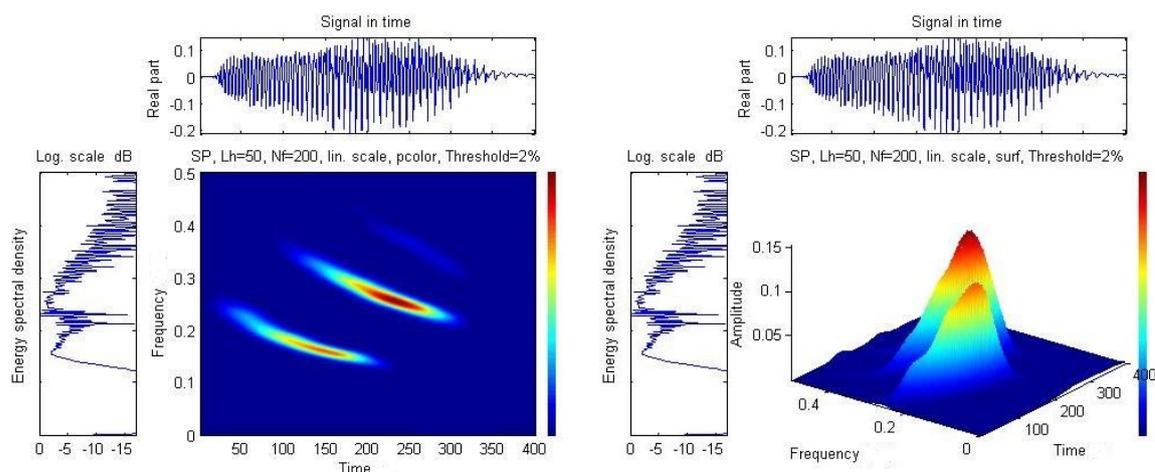
L'analisi mediante spettrogramma della somma dei due chirp lineari è stata ottenuta mediante il precedente comando, applicato alla variabile "sig". Sono stati dunque prodotti i seguenti risultati:



Non è possibile visualizzare il chirp a "frequenza negativa", rispetto alla normalizzazione effettuata da TFTB; a parte questa fenomenologia, non si registrano altri particolari inconvenienti, quantomeno rispetto alla precedente analisi: il segnale è rappresentato mediante una localizzazione non ottimale, come ci si poteva aspettare.

Segnale sperimentale

Mediante la solita procedura, sono stati ricavati i seguenti risultati grafici:



In questo caso la finestrazione risultante dalla finestra di Hamming si rivela più efficace; si tratta di un segnale molto differente dal precedente, dunque, evidentemente, una finestra di questo tipo sembra essere più efficace, come si può osservare sia dalla figura bidimensionale sia dalla figura tridimensionale. Da un confronto con altre distribuzioni tempo-frequenza, sarà eventualmente possibile effettuare altre osservazioni e confermare il giudizio proposto.

3.2 Distribuzione di Wigner-Ville

La distribuzione di Wigner (detta anche di Wigner-Ville in onore dello studioso che la propose in termini di distribuzione tempo-frequenza) rappresenta la base per il progetto di distribuzioni tempo-frequenza diverse da quelle in qualche modo “collegate” allo spettrogramma.

La prima apparizione in ambito scientifico di questa distribuzione è attribuita al fisico Eugene Wigner, in ambito di studio di correzioni quantistiche nella teoria della meccanica statistica, nel 1932. L'idea fondamentale nascosta dietro questa distribuzione, idea che potrebbe in qualche modo ricordare i nostri fini, era quella di eliminare dall'equazione di Schrödinger la nota funzione d'onda Ψ , sostituendola con una densità di probabilità variabile però nello spazio delle fasi, anziché nello spazio convenzionalmente usato (considerando quindi una sorta di funzione d'onda variante però nel dominio reciproco). A partire da queste considerazioni, Ville ri-propose, circa quindici anni dopo l'uscita dell'articolo originale di Wigner, un articolo nel quale sfruttava la distribuzione di Wigner in ambito tempo-frequenza, ossia per lo studio dei segnali non-stazionari.

In termini del segnale $x(t)$, o del suo spettro $S(\nu)$, la distribuzione di Wigner si può definire come:

$$W(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^* \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau$$

Oppure:

$$W(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^* \left(\nu + \frac{1}{2}\vartheta \right) x \left(\nu - \frac{1}{2}\vartheta \right) e^{-j2\pi\tau\vartheta} d\vartheta$$

Le due espressioni sono del tutto equivalenti: sostituendo nella prima definizione l'espressione della trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, sfruttando le proprietà.

Si noti il seguente fatto, dalla semplice lettura dell'espressione appena introdotta: il valore del segnale trattato mediante la distribuzione di Wigner per un certo istante di tempo t si ottiene sommando (mediante l'operatore integrazione) parti del segnale in un tempo "passato" moltiplicate per parti del segnale in un tempo "futuro". Immaginando idealmente di sovrapporre i valori per l'insieme dei tempi "passati" su quello dei tempi "futuri", se vi sono sovrapposizioni, ossia punti nei quali passato e futuro coincidono, allora questi punti saranno presenti sul piano tempo-frequenza risultante dalla trasformazione. Ciò è osservabile dall'integrale: si ha, di fatto, il prodotto di questi due termini del segnale; avere "sovrapposizioni" significa avere sia "a destra" sia "a sinistra" valori non nulli del segnale $x(t \pm \frac{1}{2}\tau)$; questo fatto implica che la "sovrapposizione" sarà data dal prodotto del valore assunto dal segnale nel tempo passato con quello del valore assunto dal segnale nel tempo futuro; questo fatto provocherà alcuni problemi.

3.2.1 Proprietà della distribuzione di Wigner-Ville

In questa sottosezione verranno analizzate le principali proprietà della distribuzione di Wigner-Ville, al fine di completarne la caratterizzazione. Le caratteristiche analizzate saranno differenti da quelle dello spettrogramma, dal momento che si parla di due distribuzioni tempo-frequenza fondamentalmente diverse.

Calcolo della funzione caratteristica

Una delle innovazioni nell'uso di questa distribuzione in tempo-frequenza, attribuibile a Ville, consiste nell'utilizzo di un approccio basato sullo studio della funzione caratteristica della distribuzione tempo-frequenza. Si propone dunque il calcolo di quest'ultima:

$$\begin{aligned}
M(\vartheta, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\vartheta t} W(t, \nu) dt d\nu = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\vartheta t + j2\pi\tau\nu} x^* \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) e^{-j2\pi\tau'\nu} d\tau' dt d\nu = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\vartheta t} \delta(\tau - \tau') x^* \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) d\tau' dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^* \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) dt = \\
&= A(\vartheta, \tau)
\end{aligned}$$

Realità

La distribuzione di Wigner assume valori sempre reali, anche nell'ipotesi (non fisicamente realizzabile) che il segnale assuma valori complessi.

Una condizione sufficiente affinché una generica quantità sia reale, è quella secondo cui il suo complesso coniugato sia uguale al numero stesso; nel nostro caso:

$$W^*(t, \nu) = W(t, \nu)$$

Si verifica questo fatto:

$$\begin{aligned}
W^*(t, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) x^* \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) e^{j2\pi\tau\nu} d\tau = \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) x^* \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(t + \frac{1}{2}\tau \right) x^* \left(t - \frac{1}{2}\tau \right) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau = W(t, \nu)
\end{aligned}$$

Si noti che la proprietà di realtà si potrebbe anche osservare a partire dalla funzione caratteristica: se infatti vale la condizione:

$$M^*(-\vartheta, -\tau) = M(\vartheta, \tau)$$

Si può dire che la distribuzione sia reale. Si può verificare, a partire dal calcolo della funzione caratteristica, che questa condizione sia infatti verificata.

Simmetria

Una proprietà interessante della distribuzione di Wigner-Ville è una proprietà di simmetria: considerando un segnale $x(t)$ reale nel dominio nel tempo, si sa che il suo spettro sarà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, nel dominio di Fourier; la distribuzione di Wigner-Ville preserva questa proprietà, per i segnali reali:

$$x(t) \in \mathbb{R} \implies W(t, \nu) = W(t, -\nu)$$

Marginali

Esaminando la funzione caratteristica precedentemente calcolata e ricordando i risultati ottenuti nel capitolo precedente, si può ottenere con facilità il fatto che:

$$M(\vartheta, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{j2\pi\vartheta t} dt$$

$$M(0, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)| e^{j2\pi\tau\nu} d\nu$$

Essendo queste le funzioni caratteristiche dei marginali, allora anche i marginali sono soddisfatti. Si può naturalmente dimostrare anche utilizzando la definizione di marginali vera e propria, ma si è scelto di utilizzare questa breve dimostrazione al fine di sfruttare un approccio un po' "alternativo", che spesso si rivela fondamentale.

Traslazione in tempo e in frequenza

Tra le svariate proprietà della distribuzione di Wigner-Ville, vi è anche la possibilità di effettuare traslazioni sia nel dominio del tempo sia nel dominio della frequenza, come descritto in via teorica nel capitolo precedente. L'ipotesi che si intende verificare è la seguente:

$$\text{Se } x(t) \longrightarrow e^{j2\pi\nu_0 t} x(t - t_0) \implies W(t, \nu) \longrightarrow W(t - t_0, \nu - \nu_0)$$

Ciò si può dimostrare usando la definizione di distribuzione di Wigner:

$$W_{tras}(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu_0(t-\frac{\tau}{2})} x^* \left(t - t_0 - \frac{1}{2}\tau \right) e^{-j2\pi\nu\tau} x \left(t - t_0 + \frac{1}{2}\tau \right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^* \left(t - t_0 - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(t - t_0 + \frac{1}{2}\tau \right) e^{-j2\pi\tau(\nu-\nu_0)} d\tau =$$

$$= W(t - t_0, \nu - \nu_0)$$

Proprietà del supporto finito e bilinearità

Si riprenda un ragionamento precedentemente fatto: dato un generico segnale nel dominio del tempo, al fine di comprendere qualitativamente il significato della distribuzione di Wigner-Ville, un'idea potrebbe essere quella di “sovrapporre” tempi positivi e negativi rispetto un certo tempo di riferimento t ; a seconda del fatto che vi siano o meno “sovrapposizioni” tra le due parti dei grafici, la distribuzione di Wigner-Ville assumerà valori nulli o non nulli.

A questo punto, si possono considerare alcune casistiche, in modo da poter determinare in maniera quantomeno qualitativa la validità delle proprietà del supporto in questo tipo di distribuzioni.

1. Se il segnale nel dominio del tempo è non nullo per tutti i tempi, la “sovrapposizione” provocherà sempre la presenza di valori non-nulli, poiché sia a “sinistra” sia a “destra” dell'istante di riferimento t i valori assunti dal segnale saranno non nulli.
2. Se un segnale è nullo per un certo intervallo di valori, per esempio prima di un certo istante t (cosa che avviene ogni qual volta si abbia un segnale causale ad esempio, ossia un segnale nullo per $t < 0$), immaginando di sovrapporre il semipiano sinistro sul semipiano destro, non vi saranno punti in cui il segnale assumerà valori non nulli.
3. Stesso discorso se il segnale è non nullo solo per un certo numero di punti: solo per tutti gli istanti di tempo “sovrapposti” in cui entrambi i segnali (passati e futuri rispetto t) assumono valori non nulli si avrà di fatto un valore non nullo assunto dal segnale trattato mediante la distribuzione.
4. Ragionando mediante le sovrapposizioni, esistono casi in cui le sovrapposizioni portano a un fatto abbastanza spiacevole: la distribuzione tempo-frequenza può assumere valori non nulli anche in intervalli in cui il segnale è di fatto nullo. Ciò capita ad esempio quando il punto t è scelto al centro di un intervallo in cui il segnale è nullo. Se si ha un andamento di questo genere, la sovrapposizione tra i due segnali sarà non nulla, dunque anche per istanti in cui il tempo è nullo si avrà un risultato non-nullo per quanto riguarda la funzione di densità risultante

Dall'ultima osservazione si può evincere quello che probabilmente è l'aspetto più negativo della distribuzione di Wigner-Ville: essa è sostanzialmente una buona distribuzione, poiché soddisfa tutte le principali proprietà, ma presenta un enorme problema, ossia il fatto di essere una distribuzione bilineare.

Come si può intuire osservando la definizione, questa distribuzione è quadratica (ciò coincide con il dire "bilineare"), dal momento che la distribuzione risultante è ottenuta mediante la trasformazione di un segnale ottenuto dal prodotto di due componenti del segnale di partenza, ossia quelle passate e future rispetto a un tempo di riferimento t . Questo fatto introduce un fenomeno molto spiacevole, ossia quello dei "cross-terms" (termini incrociati): come nel caso dell'ultima osservazione (4), può capitare che, anche per valori temporali in cui il segnale dovrebbe essere nullo, si abbiano valori non nulli. Nell'ambito dello spettrogramma questo fatto era imputabile a una cattiva finestrazione sotto il punto di vista della definizione del tempo, finestrazione che mediava di fatto componenti che non dovrebbero essere presenti con altre più significative, introducendo un visibile errore nel supporto della distribuzione risultante. In questo caso la fenomenologia non dipende dal tipo di finestrazione, di campionamento che si utilizza, bensì dal fatto che la distribuzione di Wigner-Ville è bilineare, dunque per questo motivo presenta termini spuri (i cross-terms) i quali per l'appunto presentano termini aggiuntivi negativi ai fini della rappresentazione.

Il fatto che la distribuzione sia bilineare comporta un ulteriore enorme problema: la bilinearità comporta la presenza dei cross-terms, molto fastidiosi al momento di effettuare analisi di segnali reali, ossia non-didattici (quali chirp, o segnali semplici, dai quali si potrebbe intuire a priori quale potrebbe essere il risultato finale in tempo-frequenza), ma soprattutto fastidiosi in quanto introducono un ulteriore fatto nefasto: a causa dei termini incrociati, la distribuzione di Wigner-Ville di un generico segnale può assumere valori negativi. Ciò è inammissibile: ciascuna distribuzione tempo-frequenza è ideata per essere una densità di energia, e le funzioni di densità notoriamente non devono assumere valori negativi.

Questo ultimo aspetto storicamente non ha comportato grossi problemi: la parte negativa della distribuzione è sempre stata "evitata", ossia non le è mai stato dato un significato fisico; il fatto che ci siano termini incrociati tuttavia come già detto comporta grossi problemi nell'uso della distribuzione di Wigner, che dunque non è sempre idonea in ambito di analisi in tempo-frequenza.

3.2.2 Alcuni esempi teorico/pratici

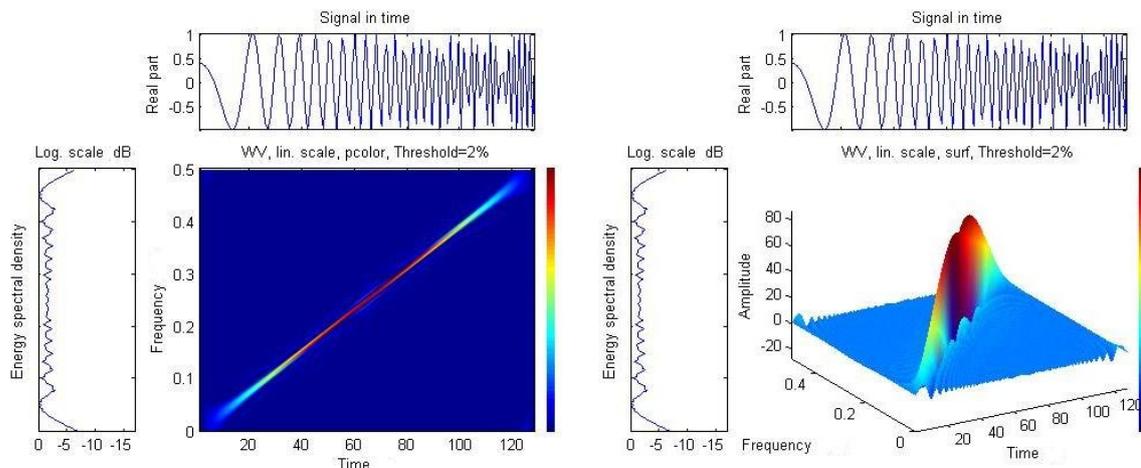
Come effettuato nella precedente sezione per quanto concerne lo spettrogramma, verranno anche in questa sezione proposti gli stessi tre esempi, in modo da poter verificare ciò che è stato scritto nella parte teorica della trattazione e fare alcuni confronti.

Chirp lineare singolo

Viene proposta l'analisi del primo esempio, ossia il chirp lineare semplice. Cambiando il tipo di distribuzione, cambia ovviamente il comando che si utilizza al fine di produrre l'analisi in tempo-frequenza; in questo caso, per produrre un diagramma tempo-frequenza basato sulla distribuzione di Wigner-Ville, si userà il comando:

```
tfrwv(sig0)
```

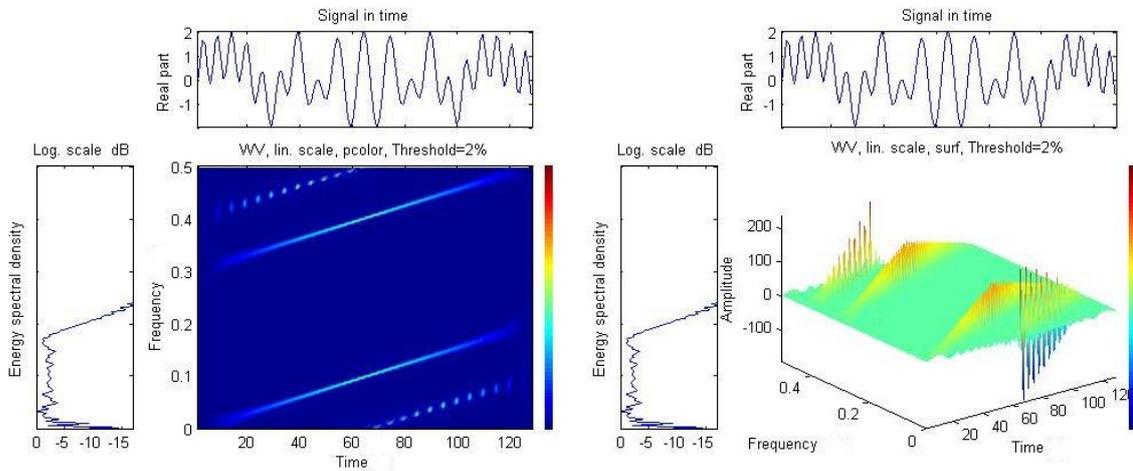
Sono stati ottenuti i seguenti risultati grafici:



Come si può notare immediatamente, rispetto alla precedente rappresentazione si ha una localizzazione eccellente in tempo e in frequenza; come già detto in ambito teorico, dunque, la distribuzione di Wigner-Ville permette di rappresentare il segnale modo estremamente definito. Si può tuttavia notare, dal grafico tridimensionale, uno dei grandi limiti di questa distribuzione: la distribuzione assume anche valori negativi, proprio come anticipato nella teoria.

Somma di due chirp lineari

Si presenta a questo punto il secondo esempio, basato sulla variabile “sig”:

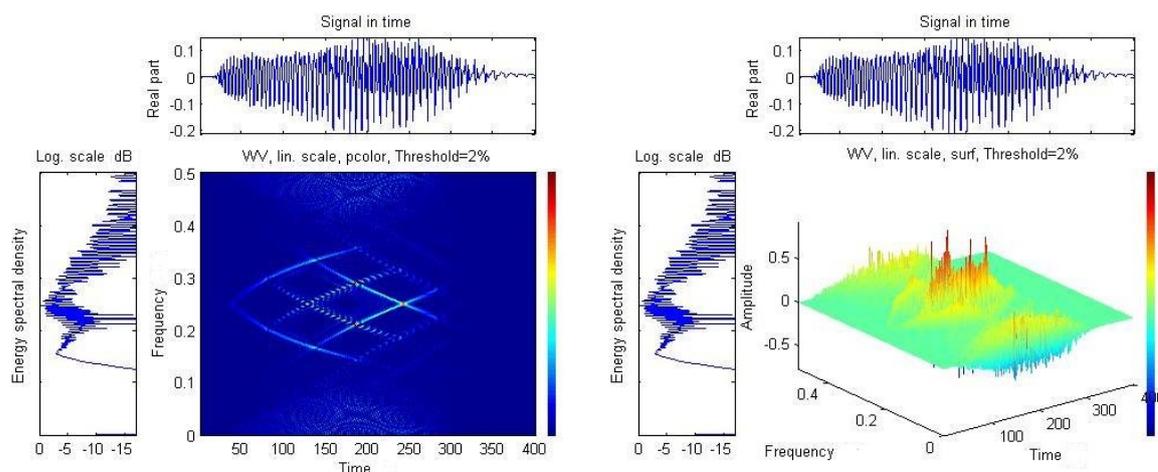


Sia la rappresentazione bidimensionale sia quella tridimensionale presentano l'enorme difetto della distribuzione di Wigner-Ville: la presenza di cross-terms. Utilizzando un segnale di poco più complicato rispetto al precedente, è possibile notare in maniera così evidente questo preoccupante limite della distribuzione. La localizzazione continua a essere ovviamente ottima, e il segnale principale si può distinguere semplicemente dai cross-terms, dal momento che sono ben note le sue caratteristiche; ancora più evidente rispetto al caso precedente, inoltre, è il contributo negativo presente nella distribuzione. Il prossimo esempio mostrerà in maniera ancora più evidente i limiti della distribuzione in questione.

Segnale sperimentale

Si presenta a questo punto l'esempio concernente il segnale sperimentale, basato sulla variabile “batsig” del workspace:

Studiando un segnale “reale” i limiti della distribuzione di Wigner-Ville divengono evidenti: quando il segnale non è molto semplice, come la combinazione lineare di chirp precedentemente presentata, la presenza dei cross-terms rende notevolmente difficile la caratterizzazione in tempo-frequenza del segnale. Come nei casi precedenti, la rappresentazione è caratterizzata da un'ottima localizzazione delle componenti del segnale, ma mai come ora questa rappresentazione non può essere utilizzata a scopi analitici: i termini interferenti rendono veramente troppo complicata un'ana-



lisi del segnale, rendendo preferibile un'analisi mediante spettrogramma, per quanto le prestazioni in termini di definizione del segnale siano assolutamente peggiori.

3.3 La Classe di Cohen

Nella scorsa sezione è stata descritta e caratterizzata una delle più importanti distribuzioni in ambito di tempo-frequenza: la distribuzione di Wigner-Ville. Di essa si è detto che ha molti vantaggi, ma anche un grosso, enorme problema: la bilinearità, e la conseguente presenza di cross-terms, ossia termini incrociati che, in molti casi, disturbano violentemente la rappresentazione del segnale in un dominio tempo-frequenza.

Finora sono state presentate due delle più importanti distribuzioni, ossia lo spettrogramma e la suddetta Wigner-Ville, ma, data la semplicità nel progetto di nuove distribuzioni e soprattutto la necessità nello studio di segnali non-stazionari (ossia le cui caratteristiche variano al variare del tempo), continuavano a nascere distribuzioni tempo-frequenza, più o meno correlate tra loro, senza che esistesse una classificazione in grado di catalogarle e differenziarle per gli aspetti fondamentali. Tra gli anni '40 (periodo in cui nei laboratori Bell venne ideato lo spettrogramma) e '60 vennero pubblicati diversi lavori nei quali si definivano, senza partire da schemi ben definiti, diverse distribuzioni tempo-frequenza.

Nel 1966 Leon Cohen innovò lo studio dell'analisi in tempo-frequenza, introducendo una classe di distribuzioni, detta Classe di Cohen (Cohen's Class), in un articolo del *Journal of Mathematical Physics*. Questa classe era in grado di racchiu-

dere tutte le distribuzioni tempo-frequenza, e classificarle in base a un parametro: il cosiddetto “kernel” della distribuzione.

Si propone la formulazione della “classe generale” o “classe di Cohen”, ossia l’espressione a partire dalla quale si ottengono tutte le rappresentazioni tempo-frequenza:

$$C(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^* \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(u + \frac{1}{2}\tau \right) \varphi(\vartheta, \tau) e^{-j2\pi\vartheta t - j2\pi\vartheta\nu - j2\pi\vartheta u} du d\tau d\vartheta$$

Dove il “kernel” è dato dalla funzione $\varphi(t, \nu)$.

Si osservi la formula, poiché essa contiene elementi già analizzati in precedenza: si può notare, in questa formula, un’enorme analogia con una distribuzione precedentemente analizzata, ossia la Wigner-Ville. Di fatto, l’osservazione di Cohen fu proprio basata sulla Wigner-Ville: essa è un’ottima distribuzione in tempo-frequenza, a meno del problema dei cross-terms. Quello che si può fare, dunque, a partire dalla Wigner-Ville, è utilizzarla come “prototipo” per tutte le altre distribuzioni tempo-frequenza, cercando di eliminare i cross-terms mediante l’applicazione di una funzione supplementare, il “kernel”, ossia una funzione in grado in qualche modo di “filtrare” il contributo dei cross-terms. Il kernel dunque altri non rappresenta che una funzione di filtraggio, in grado di ridurre il contenuto dei cross-terms, a costo di peggiorare tuttavia le altre proprietà della distribuzione di Wigner-Ville.

Ciò in cui differiscono dunque le varie distribuzioni tempo-frequenza, utilizzando la classificazione di Cohen, è proprio questa funzione filtrante: a seconda della rappresentazione che si intende ottenere e a seconda dei segnali che si intendono trattare, converrà utilizzare un kernel piuttosto che un altro.

3.3.1 Proprietà generali del kernel

La differenziazione delle varie distribuzioni in tempo-frequenza sono generate dai diversi kernel applicabili alla distribuzione di base, ossia alla Wigner-Ville. Al fine di ottenere una determinata distribuzione in tempo-frequenza, è possibile selezionare come kernel funzioni dotate di diverse caratteristiche; al fine di imporre queste caratteristiche, è necessario proporre alcune condizioni, riconducibili alle condizioni già studiate precedentemente, in modo da ottenere informazioni generali.

Marginali

Al fine di ricavare una condizione generale per il kernel affinché la distribuzione appartenente alla classe di Cohen soddisfi i marginali, è necessario integrare l'espressione della classe di Cohen nella variabile complementare. Si considera ad esempio il marginale rispetto al tempo, dunque l'integrazione va fatta rispetto alla frequenza; poiché nessuna espressione dipende direttamente da ν , ciò che si otterrà sarà semplicemente la stessa espressione della classe di Cohen, all'interno del cui integrale si moltiplica per una $\delta(\tau)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} C(t, \nu) d\nu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x^* \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(u + \frac{1}{2}\tau \right) \varphi(\vartheta, \tau) e^{-j2\pi\vartheta t - j2\pi\vartheta\nu - j2\pi\vartheta u} du d\tau d\vartheta = \end{aligned}$$

Da ciò, osservando le analogie del capitolo precedente, si può notare che ciò equivale a dire:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta, 0) |x(u)|^2 e^{j\vartheta(u-t)} d\vartheta du$$

Si impone a questo punto che questa espressione sia uguale al modulo quadro di $x(t)$; a tal fine, bisogna far in modo da “eliminare” un integrale. Ciò si può ottenere, di fatto, ponendo un integrale pari a una delta di Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta, 0) e^{j2\pi\vartheta(u-t)} d\vartheta = \delta(t - u)$$

L'unico modo in cui ciò può capitare, è avere una funzione φ tale per cui:

$$\varphi(\vartheta, 0) = 1$$

Questa è la condizione che deve essere rispettata affinché la condizione sul marginale temporale sia verificata. In maniera del tutto duale, si può dimostrare che la condizione affinché la marginale spettrale sia rispettata, è semplicemente:

$$\varphi(0, \tau) = 1$$

Da qui si può aggiungere una nota, riguardo il principio di indeterminazione: come precedentemente affermato, il principio di indeterminazione è verificato se

e solo se entrambe le marginali sono rispettate; se dunque si verificano entrambe le condizioni sul kernel appena presentate, si può dire che valga il principio di indeterminazione sulla distribuzione tempo-frequenza.

Energia totale

Una delle condizioni che si possono desiderare, al fine di avere una densità con significato fisico, è il fatto che essa abbia l'energia normalizzata a 1. Questo fatto si può verificare se e solo se è verificata la seguente condizione:

$$\varphi(0, 0) = 1$$

Ciò si potrebbe dimostrare calcolando:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(t, \nu) d\nu dt$$

E osservando il fatto che tutti i conti tendono a ridurre l'integrale al solo valore del kernel, valutato per $\tau = \varphi = 0$; da qui, si normalizza il kernel a 1.

Traslazione in tempo e in frequenza

affinché un segnale $x(t)$ sia traslato di un tempo t_0 e di una frequenza ν_0 , è necessario che esso venga trattato come:

$$x(t) \longrightarrow e^{j2\pi\nu_0 t} x(t - t_0)$$

In tal caso, si può dimostrare (si tralascia la dimostrazione) il fatto che la caratteristica del kernel della distribuzione tale per cui si verifichi la condizione è la sua indipendenza da tempo e frequenza: $\varphi(\vartheta, \tau)$ è una funzione delle variabili ϑ e τ ; se l'istante temporale o la posizione spettrale che si considera influenza il valore del kernel scelto, allora la traslazione nel tempo e in frequenza non sarà applicabile, ossia non sarà possibile dire che:

$$x(t) \longrightarrow e^{j2\pi\nu_0 t} x(t - t_0) \implies C_{tras}(t, \nu) = C(t - t_0, \nu - \nu_0)$$

Riscaldamento

Una proprietà introdotta solo in un contesto teorico e generico, ma non ancora riscontrata in una distribuzione tempo-frequenza, è la proprietà del riscaldamento. Dato $x_{sc} = \sqrt{a} x(at)$, si vorrebbe che:

$$C_{sc}(t, \nu) = C\left(at, \frac{\nu}{a}\right)$$

Questa condizione è verificata se e solo se il kernel è una funzione del solo prodotto delle due variabili: anziché variare nelle due singole variabili ϑ e τ , il kernel deve variare secondo una funzione del prodotto delle due variabili, ossia $\vartheta \cdot \tau$. A questa condizione, la distribuzione progettata a partire dalla classe di Cohen rispetta la proprietà di riscalamento.

Supporto finito debole e forte

Esistono due condizioni per quanto riguarda sia la proprietà del supporto finito debole sia per la proprietà del supporto finito forte. Come si può immaginare, quella del supporto finito forte sarà più stringente rispetto all'altra. Si descriverà esclusivamente la condizione nel tempo, poiché quella in frequenza ha motivazioni del tutto analoghe a quella nel tempo.

Affinché sia verificata la proprietà del supporto finito debole, è necessario che la distribuzione valga zero prima che il segnale incominci ad assumere valori non nulli, e dopo che smetta di assumerne; ciò si può identificare mediante la seguente condizione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta, \tau) e^{-j2\pi\vartheta t} d\vartheta = 0, \quad |\tau| \leq 2|t|$$

Per quanto riguarda la frequenza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta, \tau) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau = 0, \quad |\vartheta| \leq 2|\nu|$$

La condizione sul supporto finito forte è ancora più stringente: supporto finito forte significa che la distribuzione vale zero per un certo intervallo in cui il segnale vale zero. Nel caso di distribuzioni bilineari, sono valide le seguenti proprietà; per quanto riguarda il tempo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta, \tau) e^{-j2\pi\vartheta t} d\vartheta = 0, \quad |\tau| \neq 2|t|$$

E per quanto riguarda la frequenza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta, \tau) e^{-j2\pi\tau\nu} d\tau = 0, \quad |\vartheta| \neq 2|\nu|$$

3.3.2 Distribuzione di Choi-Williams

Si vuole proporre a questo punto una delle più significative applicazioni teorico/pratiche nate in seguito alla classificazione di Cohen: la funzione di distribuzione di Choi-Williams. Il nome della distribuzione deriva dagli studiosi che, nel 1989, la proposero per la prima volta, e attualmente è una delle distribuzioni più utilizzate in ambito di studio di segnali non-stazionari.

Come precedentemente detto, la funzione “kernel” rappresenta sostanzialmente un filtro, atto a eliminare i contributi dei cross-terms provocati dalla bilinearità della funzione di distribuzione di Wigner-Ville. Traendo ispirazione dalla parola “filtro”, si può provare a motivare, quantomeno sotto un punto di vista molto intuitivo, il significato del kernel applicato da Choi e Williams:

$$\varphi(\vartheta, \tau) = e^{-\frac{(\vartheta\tau)^2}{\sigma}}$$

Dove σ è un parametro modificabile a seconda del segnale e del tipo di filtraggio.

Questo andamento potrebbe ricordare un concetto molto noto in elettronica: quello di filtro passa-basso. Come è ben noto dallo studio dell'Elettrotecnica e dell'Automatica, una funzione di trasferimento del tipo:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + j\omega_0}$$

Presenta un polo sulla pulsazione $-\omega_0$; antitrasformando questa espressione, è possibile ritrovare una funzione di tipo esponenziale. Altro modo di vedere la cosa, è il fatto che un filtro passa basso si realizza con un condensatore in un ramo in parallelo al circuito; l'equazione risultante del circuito è differenziale del primo ordine, dunque la soluzione avrà un andamento di tipo esponenziale, essendo l'esponenziale l'autofunzione dell'operatore “derivata”. L'idea di Choi e Williams, dunque, è quella di utilizzare un filtro di tipo passa basso, al fine di tentare di eliminare i disturbi provocati dai cross-terms.

La distribuzione risultante, $C_x(t, \nu)$, sarà, sostituendo le espressioni:

$$C_{CW}(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^* \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(u + \frac{1}{2}\tau \right) e^{-\frac{(\vartheta\tau)^2}{\sigma}} e^{-j2\pi\vartheta t - j2\pi\vartheta\nu - j2\pi\vartheta u} du d\tau d\vartheta$$

Se ne esaminano a questo punto le principali caratteristiche:

Proprietà del supporto finito forte e debole

Si esamina a questo punto la proprietà del supporto finito, utilizzando la nozione precedentemente introdotta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta, \tau) e^{-j2\pi\vartheta t} d\vartheta = \sqrt{\frac{\pi\sigma}{\tau^2}} e^{-\frac{\sigma t^2}{4\tau^2}}$$

Come si può vedere, in teoria la condizione sul supporto forte non è rispettata; la condizione che permette la validazione della proprietà del supporto debole, invece, tendenzialmente non è valida, a meno che non si considerino valori di σ sufficientemente elevati, in modo da permettere che l'esponenziale assuma valori sufficientemente bassi da essere considerati simili a 0, quantomeno in prima approssimazione.

Marginali

Si può verificare banalmente, utilizzando le proprietà precedentemente ricavate, che il kernel di Choi-Williams soddisfa entrambe le marginali; osservando infatti l'espressione del kernel:

$$\varphi(\vartheta, \tau) = e^{-\frac{(\vartheta\tau)^2}{\sigma}}$$

Sia che $\vartheta = 0$, sia che $\tau = 0$, il kernel senza dubbio varrà 1, dunque entrambe le marginali saranno soddisfatte:

$$\varphi(0, \tau) = \varphi(\vartheta, 0) = 1$$

Riduzione dell'interferenza di cross-term

Lo scopo per cui vengono progettate distribuzioni in tempo-frequenza basate sull'uso di kernel di Choi-Williams, come dovrebbe ormai esser ben noto, è ridurre l'interferenza dovuta ai termini incrociati nati a causa della bilinearità della distribuzione di Wigner. A seconda di come si “impostano” i parametri della Choi-Williams, nella fattispecie a seconda di come si sceglie σ , si potrà avere un diverso effetto di filtraggio sulla distribuzione in tempo-frequenza. Come si può osservare dall'espressione del kernel, il parametro σ regola “quanto” viene introdotto il peso del kernel nella distribuzione complessiva: se il valore di σ è molto elevato, ad esempio, si può vedere che l'argomento dell'esponenziale tende asintoticamente a 0, ma quindi

l'esponenziale a valere 1. La distribuzione tempo-frequenza con kernel unitario è la Wigner-Ville; si può immaginare che un valore elevato di σ non sia troppo indicato.

Unica nota: il fatto di “filtrare” la distribuzione tempo-frequenza non è sempre positivo: utilizzare un filtraggio eccessivo potrebbe comportare una perdita di informazione, ad esempio una perdita di risoluzione in tempo-frequenza; se da un lato dunque un σ elevato comporterebbe un filtraggio troppo basso, e la presenza troppo evidente di termini incrociati, dall'altro un sigma troppo basso potrebbe comportare un filtraggio troppo elevato e quindi danneggiare eccessivamente le informazioni sul piano tempo-frequenza, comportando perdita di informazione. Come in ogni cosa, è necessario trovare un buon compromesso tra filtraggio e definizione in tempo-frequenza, in modo da ottenere un buon risultato.

3.3.3 Alcuni esempi teorico/pratici

Viene infine presentata, come precedentemente effettuato nelle due grandi distribuzioni tempo-frequenza proposte, una serie di esempi pratici ottenuti mediante il TFTB. A priori ci si può aspettare un risultato peggiore in termini di definizione, rispetto alla precedente Wigner-Ville, ma un'attenuazione dei cross-terms, che dovrebbero diventare meno influenti.

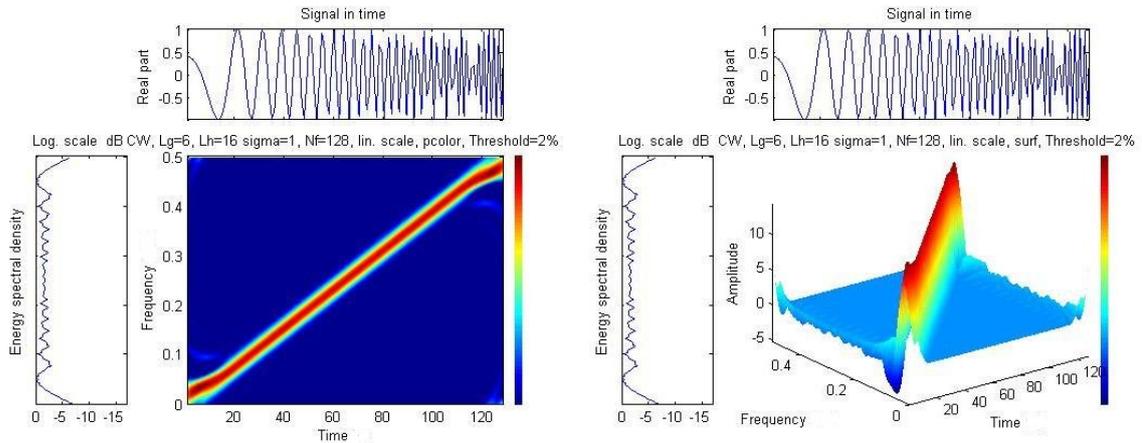
Chirp lineare singolo

Viene proposta l'analisi del primo esempio, ossia il chirp lineare semplice. Cambiando il tipo di distribuzione, cambia ovviamente il comando che si utilizza al fine di produrre l'analisi in tempo-frequenza; in questo caso, per produrre un diagramma tempo-frequenza basato sulla distribuzione di Choi-Williams, si userà il comando:

```
tfrcw(sig0)
```

Il calcolatore ha dunque prodotto il seguente risultato:

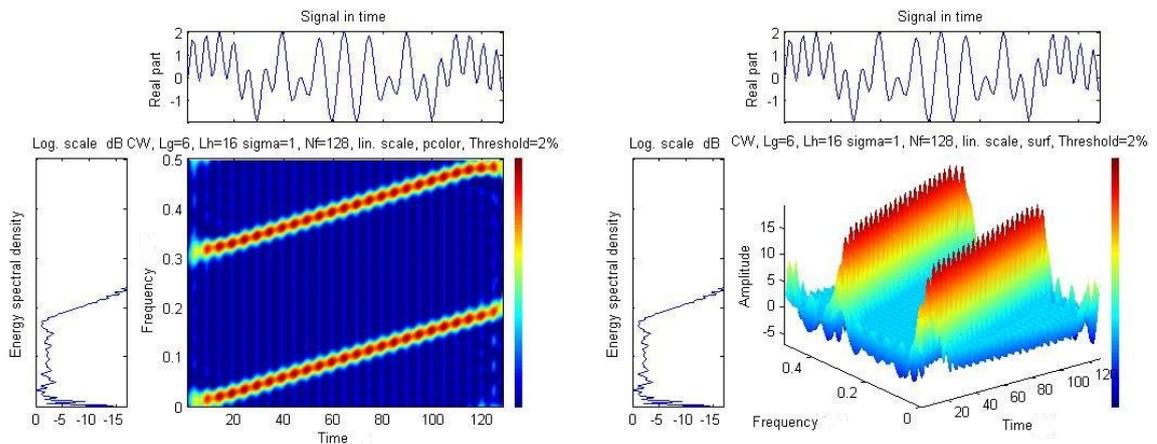
Nel caso del chirp lineare semplice si ottiene un risultato più definito rispetto allo spettrogramma, ma assolutamente meno definito rispetto alla distribuzione di Wigner-Ville, che per l'analisi di questo segnale risulta essere la migliore; il segnale appena studiato è tuttavia molto semplice, poiché tendenzialmente non presenta “sovrapposizioni di frequenze”, ossia la presenza di diverse frequenze per gli stessi tempi, limitando dunque gli effetti negativi; si può immaginare che, se i futuri



risultati saranno di questa portata, delle tre distribuzioni questa potrebbe essere la migliore, nonostante la non eccellente definizione.

Somma di due chirp lineari

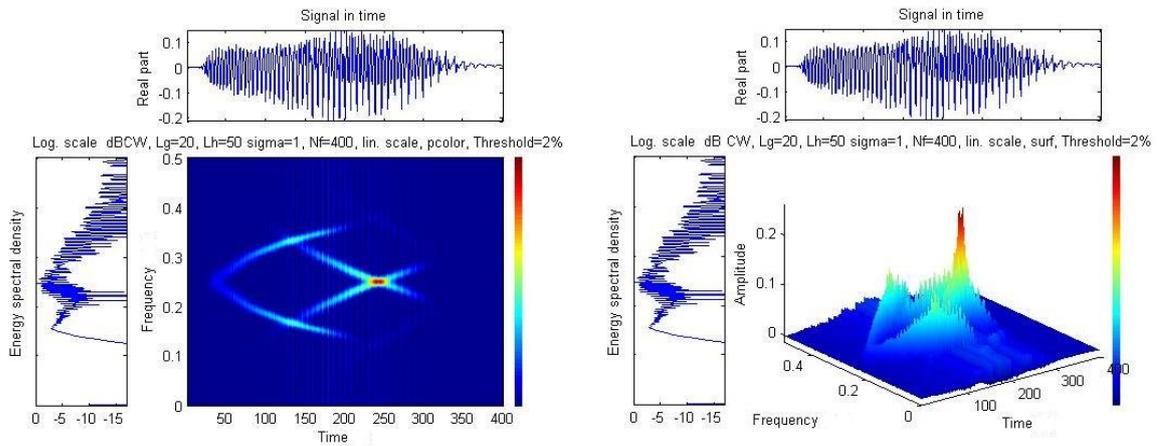
Si analizza mediante la distribuzione di Choi-Williams la somma dei due chirp lineari, ottenendo il seguente risultato:



Si può a questo punto apprezzare la potenza di questa distribuzione: i cross-terms sono stati eliminati in maniera del tutto efficace, perdendo senza dubbio parte della risoluzione della distribuzione di Wigner-Ville, ma senza raggiungere livelli negativi quali quelli dello spettrogramma.

Segnale sperimentale

Viene analizzato il segnale sperimentale:



Anche in questo caso il risultato ottenuto sembra essere ottimo: buona definizione, ossia buona localizzazione in tempo e in frequenza, e scarsa presenza di cross-terms. Si può certamente dire, da questi esempi, di aver trovato un'ottima distribuzione tempo-frequenza: localizzazione non ottima ma sicuramente soddisfacente, quantomeno per molte applicazioni, e ottima rimozione dei termini interferenti causati dalla bilinearità della distribuzione di Wigner.

Appendice A

Introduzione alla rappresentazione di spazi funzionali

La presente appendice si prepone sostanzialmente alcuni obiettivi: un'introduzione ai concetti fondamentali necessari per caratterizzare spazi molto più complicati da studiare rispetto al tipico caso degli spazi vettoriali reali su due o tre dimensioni, introduzione a partire dalla quale si proporranno metodi per la rappresentazione di spazi di dimensioni finite e infinite. Questa introduzione permetterà di introdurre il secondo obiettivo, ossia considerare le serie di Fourier come esempio banale di sviluppo, mediante una base ortonormale, di funzioni appartenenti a una ben determinata classe; sulla falsa riga delle serie di Fourier, verrà proposta una delle rappresentazioni classiche di segnali in tempo-frequenza, sfruttando la teoria introdotta nella trattazione e nell'appendice in questione.

A.1 Introduzione agli spazi funzionali

La fisica per molti anni (fino all'avvento della cosiddetta "fisica moderna") ha potuto utilizzare, al fine di realizzare modelli di vario genere, strumenti matematici relativamente semplici e che in qualche modo potrebbero essere compresi mediante semplici esempi concernenti il mondo in cui viviamo: l'analisi matematica in una o più variabili, di fatto, introduce metodi in grado di studiare sotto un punto di vista qualitativo e quantitativo fenomenologie presenti in spazi molto semplici da vedere e modellizzare, dal momento che sono molto simili al mondo in cui viviamo. A meno di effetti relativistici, infatti, il mondo è modellizzabile mediante un semplice spazio vettoriale euclideo continuo di dimensione 3, \mathbb{R}^3 ; mediante l'uso di metodi analitici

introdotti su spazi di questo tipo, è possibile studiare fenomenologie riguardanti la meccanica, la termodinamica, la fluidodinamica, l'elettromagnetismo, l'ottica e tutte le altre branche della cosiddetta "fisica classica". La nascita di nuove branche della fisica, appartenenti alla cosiddetta "fisica moderna", ha comportato, al fine di introdurre una modellistica completa, la nascita di nuovi spazi sui quali è necessario operare, spazi ben più complicati da studiare e meno riconducibili alla nostra concezione di "spazio": il fatto di introdurre nella fisica componenti aleatorie introduce la necessità di utilizzare spazi ad esempio con un numero infinito di dimensioni, o non euclidei, sui quali identificare e utilizzare vari modelli.

Come si può immaginare, costruire da zero una teoria, una definizione di spazio, non è assolutamente semplice, poiché potrebbe stravolgere la vecchia concezione di spazio; ciò che è stato fatto, è cercar di "generalizzare", a partire da nozioni ben comprese, la concezione di spazio n -dimensionale, ottenendo caratteristiche minimali che uno spazio deve possedere al fine di essere caratterizzabile.

A.1.1 Spazi metrici

Uno spazio metrico è un concetto astratto che permette di studiare elementi analitici basilari già affrontati nell'analisi classica, quali la convergenza di successioni o la continuità di funzioni. Alla base della possibilità di studiare un determinato spazio, è necessario "pretendere" qualcosa da esso, ossia identificare caratteristiche che possono essere utilizzate per classificare i vari tipi di spazi esistenti; riportandosi ad un concetto intuitivo, un buon modo per definire gli "spostamenti" su di uno spazio è quello di introdurre un concetto in grado di definire, in un dato spazio, una distanza. Quello che si intende fare dunque è cercare spazi nei quali sia possibile definire una "metrica", ossia una funzione in grado di rappresentare, nello spazio in studio, il concetto di distanza.

Una metrica su di un insieme M è una funzione $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi le seguenti proprietà.

Per ogni $x, y, z \in M$:

- $d(x, y) \geq 0$;
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$ (Diseguaglianza di Minkowski, o Diseguaglianza triangolare).

Se la funzione d è una metrica su M , allora la coppia (M, d) è chiamata “spazio metrico”.

Si noti che su di un insieme M potrebbe essere possibile definire più di una metrica (a condizione che essa non sia composta da un singolo punto); se tuttavia a partire da un dato insieme M è evidente quale sarà la conseguente metrica utilizzata, spesso si riduce la notazione chiamando direttamente M e non la coppia (M, d) “spazio metrico”.

Si sappia che, dato N un sottoinsieme dello spazio metrico M (con metrica d), dunque $N \subset M$, è possibile, per ogni $x, y \in N$, limitare il dominio della metrica d a N , ottenendo quella comunemente detta “metrica indotta”. Non si approfondisce l’argomento, poiché non fondamentale ai termini della trattazione; si sceglie di introdurre alcune ulteriori definizioni e teoremi riguardanti la convergenza di successioni su spazi metrici, poiché più avanti potrebbero tornare utili.

Data una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico (M, d) , essa si dice “convergente” a un certo $x \in M$ se, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale per cui:

$$d(x, x_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Come nel caso dell’analisi in una variabile, è possibile definire il concetto di limite della successione a partire da questo concetto, dicendo che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

A partire da ciò, data la successione $\{x_n\}$ definita nello spazio metrico (M, d) , essa è detta “successione di Cauchy” se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

A partire da ciò che è stato finora definito, è possibile dire le stesse cose in differenti maniere; le precedenti definizioni sono equivalenti a:

$$d(x, x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty; \quad d(x_m, x_n) \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$$

Si può a questo punto introdurre un teorema molto importante: data $\{x_n\}$ una successione convergente in uno spazio metrico (M, d) , allora:

- Il limite

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

esiste ed è unico;

- Ogni sottosuccessione di $\{x_n\}$ converge a x ;
- $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy.

A partire da questo teorema è possibile definire diverse proprietà e classi di sottoinsiemi di spazi metrici, introducendo una topologia per spazi di questo tipo; dal momento che le nozioni topologiche non sono fondamentali per la trattazione, non si proseguirà, tuttavia si può immaginare che esistano enormi analogie con le nozioni topologiche dell'analisi in più variabili; si sceglie dunque di privilegiare alle nozioni topologiche, date per scontate, alcune ulteriori nozioni, concernenti la continuità delle funzioni su spazi metrici.

Dati gli spazi metrici (M, d_M) e (N, d_N) , data la funzione $f : M \rightarrow N$:

- La funzione f è continua sul punto $x \in M$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \forall y \in M$$

- La funzione f è continua su M se è continua su ogni punto di M ;
- La funzione f è uniformemente continua su M se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in M, \quad d_M(x, y) < \delta \implies d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dove δ è un numero scelto indipendentemente da x e y .

Vale, a partire da queste definizioni, il seguente teorema: date (M, d_M) , (N, d_N) spazi metrici, e $f : M \rightarrow N$ una funzione, allora:

- f è continua su $x \in M$ se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ definibile sullo spazio metrico (M, d_M) con x_n convergente a x , la successione di funzioni $\{f(x_n)\}$ in (N, d_N) converge alla funzione $f(x)$;
- f è continua su M se e solo se sono valide entrambe le seguenti condizioni:
 1. Per ogni insieme aperto $A \subset N$, l'insieme $f^{-1}(A) \subset M$ è ancora aperto;
 2. Per ogni insieme chiuso $A \subset N$, l'insieme $f^{-1}(A) \subset M$ è ancora chiuso.

Uno spazio metrico (M, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente nel suddetto spazio metrico. Allo stesso modo, dato $A \subset M$, A è completo se ogni successione di Cauchy in A converge a un elemento di A .

Un generico spazio vettoriale di k dimensioni, \mathbb{F}^k con $k \geq 1$ è uno spazio metrico completo; ciò è abbastanza intuitivo: si tratta di una semplice estensione a k dimensioni della retta reale. Non è purtroppo assolutamente garantito il fatto che uno spazio metrico sia completo, anche se gli esempi considerati nel seguito dell'appendice lo saranno.

Al fine di completare le nozioni preliminari atte a definire gli spazi su cui si opererà, si introduce un'ulteriore definizione, con alcune conseguenze ad essa annesse: la definizione di compattezza.

Dato uno spazio metrico (M, d) , un insieme $A \subset M$ è compatto se ogni successione $\{x_n\}$ in A contiene una sottosuccessione che converga a un elemento di A . Un insieme $A \subset M$ è relativamente compatto se la chiusura \overline{A} è compatta. Se l'intero insieme M è compatto, allora lo spazio metrico (M, d) è uno spazio metrico compatto.

Dato uno spazio metrico (M, d) e un sottoinsieme di M , $A \subset M$, allora:

- Se A è completo allora esso è chiuso;
- Se M è completo allora A è completo se e solo se è chiuso;
- Se A è compatto allora esso è chiuso e limitato;

Vale il teorema di Bolzano - Weierstrass: ogni sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio vettoriale a k dimensioni è compatto.

La compattezza è una proprietà molto potente e importante, ma spesso è difficile da ottenere; il teorema di Bolzano - Weierstrass riesce a garantirla per un grosso insieme di spazi; nella teoria più generale, quella degli spazi metrici, si han situazioni differenti: spesso, gli spazi metrici sono costituiti da insiemi di funzioni definite su altri spazi (questo, capita spesso parlando di analisi funzionale). Limitandoci a parlare di spazi vettoriali, dei quali studieremo in sostanza una "famosa estensione" (gli spazi di Hilbert), si può introdurre un altro teorema piuttosto interessante.

Dato uno spazio metrico compatto (M, d) , data una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{F}$ continua, allora esiste una costante $b > 0$ tale per cui

$$|f(x)| \geq b \quad \forall x \in M$$

Ossia, f è limitata. Se nel dettaglio $\mathbb{F} \equiv \mathbb{R}$, allora l'estremo superiore (sup) e inferiore (inf) della funzione esistono e sono finiti, ossia esistono x_s e x_i , $x_s, x_i \in M$, tali per cui:

$$f(x_s) = \sup \{f(x) : x \in M\}, \quad f(x_i) = \inf \{f(x) : x \in M\}$$

A.1.2 Spazi normati

Si è detto che può essere molto importante, al fine di caratterizzare spazi complicati, introdurre un concetto di distanza. Un ulteriore concetto molto interessante sotto il punto di vista dell'attuale trattazione è quello di "norma": come in spazi vettoriali ordinari, quali \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 si può introdurre l'idea di "lunghezza" di un vettore, in spazi vettoriali generici, ad esempio infinito-dimensionali, si può introdurre un concetto analogo, ossia il già citato concetto di norma.

Dato un generico spazio vettoriale X definito a partire da \mathbb{F} , una norma su X si definisce come una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui qualsiasi punto $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ è tale da:

- $\|x\| \geq 0$;
- $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se nello spazio vettoriale X esiste una norma, allora esso è anche chiamato "spazio vettoriale normato" o "spazio normato". Se X è uno spazio normato, viene detto "vettore unità" qualsiasi x tale per cui $\|x\| = 1$.

Spazi normati finito-dimensionali

Gli esempi più basilari di spazi normati sono sicuramente quelli finito-dimensionali. Si può dimostrare che qualsiasi spazio finito-dimensionale sia normato, anche se la norma dipende dalla scelta della base utilizzata per generare lo spazio. Su ciascuno spazio si possono introdurre diversi tipi di norme, in diverse maniere; a seconda delle caratteristiche dello spazio, tuttavia, una norma potrebbe essere scambiata con un'altra; si introducono a tal scopo alcune definizioni.

Dato lo spazio vettoriale X , e date $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X , si dice che le due norme siano equivalenti se esistono m e M tali per cui, per ogni $x \in X$:

$$m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$$

A partire dalla definizione di norma, è possibile trovare un collegamento con gli spazi metrici. Dati nella fattispecie X uno spazio vettoriale, e date $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ norme sullo spazio vettoriale X , date d e d_1 le metriche definite da $d(x, y) = \|x - y\|$, $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$, supposto che esista un $K > 0$ tale per cui $\|x\| \leq K \|x\|_1$ per ogni $x \in X$, data $\{x_n\}$ una successione su X

- Se $\{x_n\}$ converge a x nello spazio metrico (X, d_1) allora $\{x_n\}$ converge a x nello spazio metrico (X, d) ;
- Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy sullo spazio metrico (X, d_1) allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d) .

A partire da ciò è possibile introdurre dei corollari in grado di caratterizzare uno spazio metrico a partire dalla conoscenza delle caratteristiche di un altro: data $\{x_n\}$ una successione definita sullo spazio vettoriale X :

- La successione $\{x_n\}$ converge a x nello spazio metrico (X, d) se e solo se essa converge a x anche nello spazio metrico (X, d_1) ;
- La successione $\{x_n\}$ è di Cauchy nello spazio metrico (X, d) se e solo se lo è anche nello spazio metrico (X, d_1) ;
- Lo spazio metrico (X, d) è completo se e solo se anche (X, d_1) è completo.

Spazi di Banach

Parlando nella fattispecie di spazi infinito-dimensionali, dato ad esempio uno spazio vettoriale X , è possibile che esistano differenti norme su X non equivalenti. Nella fattispecie, oltre a questa proprietà, vi sono altre proprietà non estensibili in maniera naturale al caso di spazi infinito-dimensionali. Ciò che si intende fare in questa sottosezione, dunque, è ricercare, un insieme di proprietà basilari per gli spazi infinito-dimensionali, in modo da poter introdurre una teoria basilare sugli spazi di Hilbert.

A partire da tutti i teoremi colleganti norma, metrica e completezza introdotti su spazi finito-dimensionali, si introduce una fondamentale classe di spazi: gli spazi di Banach.

Per spazio di Banach si intende un generico spazio vettoriale normato completo rispetto alla metrica associata alla norma. Si completa ora il discorso generale sugli spazi normati, introducendo un ultimo teorema, in grado di permettere una migliore classificazione degli spazi di Banach:

- Ogni spazio vettoriale normato finito-dimensionale è uno spazio di Banach;
- Se X è uno spazio metrico compatto allora l'insieme delle funzioni continue definite su X , $C_{\mathbb{F}}(X)$, è uno spazio di Banach;
- l^p è uno spazio di Banach, per $1 \leq p \leq \infty$;
- Se X è uno spazio di Banach e Y è un sottospazio lineare di X , allora Y è uno spazio di Banach se e solo se Y è chiuso in X .

A.2 Spazi infinito-dimensionali

A.2.1 Prodotti scalari

Sono state introdotte le principali idee in grado di permettere una caratterizzazione di un generico spazio. Come si sa dallo studio dell'algebra lineare, e dall'introduzione della scorsa sezione, è possibile identificare la "lunghezza di un vettore" mediante una funzione detta "norma".

Un altro concetto molto importante, assieme a quello di norma, è quello di "prodotto scalare". Come si sa dalla fisica, un significato attribuibile, in uno spazio finito-dimensionale (esempio classico utilizzato in fisica e ingegneria è lo spazio vettoriale reale tridimensionale, \mathbb{R}^3), il prodotto scalare tra due vettori appartenenti allo spazio rappresenta una proiezione del primo vettore sul secondo. Dati due vettori $a, b \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle a|b \rangle \triangleq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Ciò si può esprimere anche in forma polare:

$$\langle a|b \rangle = \|a\| \|b\| \cos(\vartheta)$$

Dove come norme si utilizza la norma 2, o norma euclidea:

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad \|b\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

E ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori.

In un generico spazio vettoriale reale X , per prodotto interno si definisce una funzione $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definita su $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale per cui, per ogni $x, y, z \in X$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\langle x|x \rangle \geq 0$;
- $\langle x|x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\langle \alpha x + \beta y|z \rangle = \alpha \langle x|z \rangle + \beta \langle y|z \rangle$;
- $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$.

Nel caso lo spazio X anziché reale sia complesso, la quarta proprietà assume una variante:

$$\langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$$

Dato X un generico spazio dotato di prodotto scalare, dati $x, y \in X$, allora:

- $|\langle x|y \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \cdot \langle y|y \rangle$
- La funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $\|x\| = \langle x|x \rangle^{\frac{1}{2}}$ è una norma su X .

Il fatto che siano valide le precedenti affermazioni è fondamentale al fine di introdurre uno degli elementi più interessanti in ambito di spazi sui quali è definito un prodotto scalare: la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz; la prima delle due affermazioni si può infatti riscrivere come:

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

A.2.2 Ortogonalità

Introdurre i prodotti scalari è fondamentale al fine di introdurre il concetto di “fase” per generici vettori appartenenti a generici spazi. Come si sa, su di uno spazio sul quale è definito un prodotto scalare, è valida la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz. A partire da essa, si può dire che:

$$-1 \leq \frac{\langle x|y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

Quindi si può dire che la fase ϑ si può definire come:

$$\vartheta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle x|y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

Questo concetto di fase è molto semplice da interpretare su spazi “semplici”, quali l’ormai classico spazio vettoriale di dimensione 2 (piano): si tratterebbe, infatti, dell’angolo compreso tra due vettori.

Quando ci si trova in uno spazio più complicato, un concetto di fase, in questo senso, non ha molto senso: quando si ha infatti a che fare con 4, 5, o infinite dimensioni, la sola visualizzazione dello spazio è estremamente difficile (per non dire impossibile), dunque i significati geometrici di questo tipo vanno abbandonati. Lo scopo della presente sezione, tuttavia, non è quella di introdurre rappresentazioni visive, geometriche di un vettore in un generico spazio, bensì ottenere particolari condizioni in grado di facilitare lo studio di spazi per ora impossibili da caratterizzare.

Una condizione molto importante, al fine di caratterizzare spazi anche di tipo molto particolare, è la ricerca dell’indipendenza lineare dei vettori appartenenti allo spazio: come è noto, un insieme di vettori linearmente indipendenti che, se combinati mediante trasformazioni lineari di vario genere, riescono a generare l’intero spazio, formano una cosiddetta “base”.

Una condizione molto interessante che due vettori possono avere tra loro è l’ortogonalità, ossia il fatto che la fase compresa tra loro sia pari a:

$$K \frac{\pi}{2}, \quad K \in \mathbb{N}$$

in questo caso, infatti, $\cos(\vartheta) = 0$.

A partire dalla definizione di prodotto scalare, è possibile proporre dunque la seguente definizione: dato un generico spazio sul quale è definito un prodotto scalare, X , dati i vettori $x, y \in X$, essi sono detti ortogonali se

$$\langle x|y \rangle = 0$$

Introduciamo a questo punto alcune definizioni e alcuni teoremi a partire da questa definizione, in modo da sfruttare in modo massiccio l’ortogonalità tra due vettori.

Dato X uno spazio sul quale è associato un prodotto scalare, l’insieme $\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subset X$ è detto ortonormale se $\|e_n\| = 1$ per $1 \leq n \leq k$, e $\langle e_m|e_n \rangle = 0$ per ogni $m \neq n$.

A partire da questo risultato è possibile introdurre un altro teorema, fondamentale e che da qui in poi permetterà l’introduzione di una caratterizzazione totale

di una larga classe di spazi: ogni insieme ortonormale di dimensione k , formato da $\{e_1, \dots, e_k\}$ è linearmente indipendente. Nel caso lo spazio X sia k -dimensionale, allora l'insieme in questione rappresenta una base ortonormale per lo spazio; ciò significa che, in altre parole, qualsiasi elemento (vettore) $x \in X$ può essere espresso come:

$$x = \sum_{n=1}^k \langle x | e_n \rangle e_n$$

Ossia, può essere intuitivamente presentato come la somma di tutte le proiezioni del vettore su ciascun elemento della base ortonormale, moltiplicato per il vettore della base ortonormale.

Due sono gli elementi particolarmente interessanti in questa rappresentazione: il fatto che ci sia questo concetto di “proiezione”, e il fatto che si possa interamente ottenere il risultato come “somma” delle proiezioni. Vediamo perché tutto ciò è possibile:

- Si è detto che l'insieme ortonormale è una base per lo spazio; si vuole ricordare e ribadire, al fine di chiarificare le idee, che una base è un insieme di vettori in grado di rappresentare qualsiasi vettore appartenente allo spazio. Come si sa dai corsi di algebra lineare, infatti, per “base” si intende un insieme di vettori tali da essere dei generatori linearmente indipendenti. Il fatto che vi sia indipendenza lineare è garantito dall'ortonormalità dei vettori, mentre il fatto che siano generatori, ossia in grado di “raggiungere” qualsiasi vettore dello spazio è dato dal fatto che la dimensione dell'insieme coincide, per ipotesi, con la dimensione dello spazio in questione;
- Molto interessante è il fatto che la combinazione con la quale si combinano i vari elementi è dato da una semplice somma pesata: ciascun “peso” è dato dalla proiezione, ottenuta come si può immaginare mediante prodotto scalare di un vettore dall'orientamento qualsiasi sullo spazio, su di un vettore ben definito. Proiettare significa considerare il peso, rispetto al vettore, della variazione nello spazio a partire da una singola componente (una di k , dove k è la dimensione dello spazio). Il fatto che la combinazione pesata sia ottenuta mediante una somma, è possibile dal momento che tutti gli spazi in studio sono rigorosamente lineari, dunque chiusi rispetto all'operazione di somma e di moltiplicazione per scalare. Si può dire che, anche in questi spazi generici, valga il principio di sovrapposizione degli effetti, dunque che la somma permetta di avere una combinazione valida.

Si introduce un teorema, fondamentale soprattutto in ambito di spazi a dimensione infinita, che per la sua importanza merita di essere dimostrato: dato X uno spazio k -dimensionale sul quale è definito un prodotto scalare, data una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_k\}$, allora, per ogni valore di k :

$$\left\| \sum_{n=1}^k a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^k |a_n|^2$$

Dimostrazione: considerando l'ipotesi di ortogonalità e le proprietà del prodotto scalare, è possibile sviluppare il membro sinistro dell'equazione come:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^k a_n e_n \right\|^2 &= \left\langle \sum_{m=1}^k a_m e_m \left| \sum_{n=1}^k a_n e_n \right. \right\rangle = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k a_m \bar{a}_n \langle e_m | e_n \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^k a_n \bar{a}_n = \sum_{n=1}^k |a_n|^2 \end{aligned}$$

Si definisce “complemento ortogonale” di un generico sottospazio A dello spazio X sul quale è definito un prodotto scalare l'insieme:

$$A^\perp = \{x \in X : \langle x | a \rangle = 0 \quad \forall a \in A\}$$

Questo insieme semplicemente contiene l'insieme dei vettori, appartenenti allo spazio X , tali da essere ortogonali (nel senso precedentemente definito) a qualsiasi vettore appartenente allo spazio A . In altre parole, il complemento ortogonale dell'insieme rappresenta l'insieme dei vettori tali per cui, se “proiettati” su un qualsiasi vettore di A , avranno proiezione nulla.

A.2.3 Basi ortonormali per spazi infinito-dimensionali

Finora i risultati sono stati introdotti su di un normale spazio k -dimensionale, dove k è un valore finito. In realtà, è possibile generalizzare, indipendentemente dal valore di k , ossia della dimensione dello spazio, i concetti finora pensati, introducendo il concetto di spazio di Hilbert.

Per spazio di Hilbert \mathcal{H} si intende un qualsiasi spazio sul quale sia definibile un prodotto scalare, che sia completo rispetto alla metrica associata con la norma indotta dal prodotto scalare.

L'idea di base ortonormale è molto interessante poiché, come tra poco si vedrà, essa è estensibile anche per spazi infinito-dimensionali, quali ad esempio gli spazi di Hilbert nel loro significato più generico.

Dato X un generico spazio sul quale è definito un prodotto interno, una sequenza $\{e_n\} \subset X$ è detta “successione ortonormale” se $\|e_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $\langle e_m | e_n \rangle = 0$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, dove $m \neq n$.

Esiste un risultato molto importante: qualsiasi spazio infinito-dimensionale sul quale sia definito un prodotto scalare, contiene una successione ortonormale.

In un generico spazio sul quale è definibile un prodotto scalare X , data una successione $\{e_n\}$ ortonormale in X , per ogni $x \in X$ si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x | e_n \rangle|^2$$

Converge; è inoltre valida la diseguaglianza di Bessel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x | e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e data una successione ortonormale $\{e_n\}$ in \mathcal{H} , data $\{a_n\}$ una successione in \mathbb{F} , allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Converge se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

In questo caso, vale la seguente eguaglianza:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

Questo teorema è assolutamente fondamentale, poiché, se verificato, potrà avere conseguenze rilevabili nel mondo fisico di portata enorme, come si specificherà in seguito. Si sceglie di dimostrarlo, in modo da permettere la comprensione ulteriore, in seguito, di alcuni meccanismi fondamentali.

Si supponga che la successione della quale si calcola la norma converga, e sia uguale ad un dato vettore x :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Per qualsiasi $m \in \mathbb{N}$, dunque, si può dire che:

$$\langle x | e_m \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^k a_n e_n \middle| e_m \right\rangle = a_m$$

Utilizzando la diseguaglianza di Bessel, si può dire che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x | e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

A questo punto è stato impostato un bound; supposto che la seguente serie converga:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

Si può dire che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si può avere:

$$x_k = \sum_{n=1}^k a_n e_n$$

Per ogni $j, k \in \mathbb{N}$, con $k > j$, si può dire che:

$$\|x_k - x_j\|^2 = \left\| \sum_{n=j+1}^k a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=j+1}^k |a_n|^2$$

Se la serie dei moduli quadri degli a_n converge a un valore, allora convergono anche le somme parziali, dunque, per i teoremi precedentemente introdotti, essa forma una successione di Cauchy. Quindi $\{x_k\}$ è una successione di Cauchy nello spazio di Hilbert \mathcal{H} e converge. Da qua, il teorema è verificato introducendo il passaggio al limite:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k a_n e_n \right\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |a_n|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \end{aligned}$$

Da qui in teorema è dimostrato.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché la condizione converga è il fatto che:

$$\{a_n\} \in l^2$$

Negli spazi di Hilbert si ha un particolare vantaggio: dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e data una successione ortonormale $\{e_n\}$ in \mathcal{H} , allora per qualsiasi $x \in \mathcal{H}$ la seguente serie sicuramente converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x | e_n \rangle e_n$$

Questa espressione può suggerire qualcosa: tornando indietro di qualche pagina, si può ritrovare un'espressione analoga, in ambito di definizione di basi ortonormali e rappresentazione di vettori generici. Ciò che si sta finora garantendo, è il fatto che un'estensione per $k \rightarrow \infty$ della precedente successione converga a un valore prettamente finito. Si proverà a questo punto ad attribuire un particolare significato a questo tipo di rappresentazione.

Dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e data una successione ortonormale $\{e_n\}$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

$$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$$

$$\overline{\text{Sp}} \{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x | e_n \rangle e_n \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x | e_n \rangle|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Cosa significa tutto ciò? Beh, dato un generico spazio di Hilbert \mathcal{H} , ossia un generico spazio sul quale sia definito un prodotto scalare, completo rispetto alla metrica indotta dalla norma, se il complemento ortogonale dell'insieme delle successioni ortogonali è nullo, allora si può dire che lo span (insieme delle combinazioni lineari) lineare chiuso, ossia l'intersezione di tutti i sottospazi lineari chiusi di \mathcal{H} contenenti le combinazioni lineari degli elementi della successione ortogonale in studio coincida con lo spazio \mathcal{H} stesso. Ciò equivale a dire, di fatto, che qualsiasi vettore x appartenente allo spazio di Hilbert in questione può essere rappresentato mediante una combinazione lineare degli elementi della successione, dove i coefficienti scalari sono

dati dalla proiezione del vettore su ciascuno di essi. Se una di queste condizioni è valida, allora la successione $\{e_n\}$ è una base ortonormale per lo spazio \mathcal{H} , ossia a partire da essa è possibile identificare qualsiasi vettore dello spazio infinito-dimensionale.

Non si è fatto cenno alla quarta condizione (anch'essa sufficiente affinché si possa parlare di base sullo spazio di Hilbert in questione): la quarta condizione afferma che la somma dei moduli quadri di tutte le proiezioni su ciascun vettore della base in grado di generare \mathcal{H} , calcolate mediante prodotto scalare (con il procedimento di Gram-Schmidt), equivale al quadrato della norma del vettore x , per qualsiasi x appartenente a \mathcal{H} . Questo è un punto chiave per la trattazione, poiché si collega di fatto un'informazione riguardante un generico vettore dello spazio alle sue proiezioni sulla base ortonormale utilizzata. Per gli studiosi di Teoria dei Segnali, questo teorema potrebbe essere anche riconosciuto come “teorema di Parseval”, ossia come il teorema in grado di legare l'energia di un segnale alla somma dei coefficienti della sua serie di Fourier. Si noti che per ora non è stata introdotta in alcun modo la serie di Fourier: si sta introducendo esclusivamente una teoria generale in grado di rappresentare spazi dalle caratteristiche estremamente stravaganti, come quelli finora descritti.

A.2.4 Serie di Fourier

Si introducono a questo punto, come uno di tutti i possibili sviluppi in serie, intesi come combinazione lineare degli elementi di una data base ortonormale in grado di rappresentare qualsiasi vettore in un generico spazio di Hilbert \mathcal{H} , le cosiddette “serie di Fourier”.

La prima cosa è capire: di tutti gli spazi di Hilbert, qual è uno spazio nel quale ci si potrebbe ambientare in maniera “idonea” per uno sviluppo di questo tipo? Beh, un'idea potrebbe esser quella di scegliere, come ambiente-base, $L^2_{\mathbb{R}}$, ossia l'insieme delle funzioni reali integrabili, in senso di Lebesgue, in modulo quadro. Questo sarà lo spazio di partenza. Come precedentemente introdotto, questo spazio è uno spazio di Hilbert, dunque è possibile tentare l'applicazione di tutti i discorsi teorici precedentemente proposti.

Si consideri il seguente insieme di funzioni:

$$E = \left\{ e_n(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{jnx} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si tratta, volendo attribuire un significato fisico, di un insieme di armoniche, ossia di funzioni sinusoidali elementari. L'idea che si intende utilizzare, dunque, è ricercare una base per lo spazio $L^2_{\mathbb{R}}$ costituita da funzioni sinusoidali.

Si calcola il prodotto scalare della funzione, considerandone un'estensione continua mediante l'integrazione:

$$\langle e_m | e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j(m-n)x} dx$$

Consideriamo a questo punto il seguente fatto: se $m = n$, l'esponenziale complesso si riduce a diventare un'unità:

$$e^{j0} = 1$$

Quindi, integrando, si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

Dal momento che, tuttavia, la classe di funzioni da noi scelta è normalizzata per 2π , si può dire che il risultato finale sia normalizzato a 1.

Se $m \neq n$, si ottiene, dato $k = m - n$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx} dx &= \frac{1}{jk} e^{jkx} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{jk} [e^{jk\pi} - e^{-jk\pi}] = \\ &= \frac{1}{jk} [e^{jk\pi} - e^{jk\pi}] = 0 \end{aligned}$$

Ciò è molto interessante: data una generica successione di armoniche e^{jn_x} , essa è ortonormale, nello spazio di partenza (ossia $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi; \pi]$).

La serie di Fourier, dunque, può essere intesa come combinazione lineare delle proiezioni, su di una base di funzioni sinusoidali. In maniera del tutto analoga è possibile definire la trasformata di Fourier, considerando n variabile, anziché in un insieme discreto, in un insieme con la potenza del continuo (\mathbb{R}). Considerando la tradizionale estensione di prodotto scalare tra due funzioni:

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x) dx$$

Si possono ottenere risultati del tutto analoghi.

A.2.5 Osservazioni finali

Seppur in termini prettamente formali e matematici, dunque, è stato ottenuto un risultato con un forte significato fisico. Il fatto di aver ottenuto la serie di Fourier

(e, di conseguenza, la trasformata di Fourier) come caso particolare di una serie di generalizzazioni, è possibile comprenderne i limiti. Un limite ottenuto a partire da tutte le osservazioni fatte è chiaro: tutti i discorsi fatti possono funzionare in un contesto preciso, quello dello spazio $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi; \pi]$; uno sviluppo in serie di Fourier dunque può esistere, a partire dalle dimostrazioni e teorie introdotte, esclusivamente in questo spazio. La cosa non è in alcun modo limitante: nel mondo fisico / ingegneristico, raramente capita di dover utilizzare funzioni particolarmente patologiche; molto spesso, nella fisica, è stato sufficiente utilizzare funzioni integrabili in senso di Riemann, esistenti su di uno spazio vettoriale di tre dimensioni. Come detto nell'introduzione all'appendice, la nascita della fisica moderna, in particolare della meccanica quantistica, ha introdotto nella fisica la necessità di utilizzare spazi molto più complicati di quelli abitualmente studiati, restando in questo specifico caso comunque nell'ambito di spazi di Hilbert, dotati dunque comunque di una certa regolarità. L'introduzione utilizzata per le serie di Fourier dunque, per quanto potrebbe non essere valida per qualsiasi funzione, è sicuramente valida per una classe di più funzioni, o segnali, molto più ampia di quella relativa a quelli realmente esistenti, non rappresentando dunque un limite vero e proprio per lo strumento matematico.

Si vuole evidenziare il fatto che, dal momento che tutti i teoremi riguardanti un generico spazio di Hilbert sono applicabili, allora è valido anche il noto teorema di Parseval, affermando il fatto che, come già accennato nel corso della trattazione, la norma al quadrato della serie rappresentante il valore di un certo vettore o , meglio, di una certa funzione appartenente all'insieme delle combinazioni lineari delle funzioni appartenenti allo spazio, è equivalente alla somma dei moduli quadri dei coefficienti ottenuti mediante la proiezione della funzione su ciascun elemento i -esimo della base scelta (nel nostro caso, la base di Fourier, ossia gli elementi della successione ortogonale di funzioni armoniche).

Questo teorema presenta un grosso, enorme limite, che si può evincere dalla sola dimostrazione utilizzata: al fine di dimostrare il teorema di Parseval sono state utilizzati mezzi matematici non "locali", bensì "globali", basati sullo studio dell'applicazione della diseguaglianza di Bessel e sullo studio della convergenza in norma della serie; avendo sfruttato mezzi "globali", risulta impossibile ottenere informazioni locali quali quelle riguardanti l'analisi in tempo-frequenza, dove si intende, per due grandezze, avere informazioni su "ciascun coefficiente", "ciascuna variabile", in entrambi i domini, non un'informazione globale sulla somma di tutti i contributi delle proiezioni nei due domini.

A.3 Espansione di Gabor

A partire da tutta la teoria finora introdotta si vuole a questo punto concludere l'appendice presentando almeno brevemente un risultato molto interessante in grado di introdurre un particolare approccio di analisi in tempo-frequenza. Questo approccio, sostanzialmente, può essere riconosciuto come una sorta di generalizzazione della distribuzione tempo-frequenza "spettrogramma", proposta nel terzo capitolo della trattazione.

La differenza tra ciò che si sta per trattare e le idee finora presentate è la seguente: mediante le tecniche finora introdotte, è stato effettuato lo sviluppo in serie, l'espansione, l'individuazione delle componenti di un vettore mediante l'uso di una singola base ortonormale qualsiasi. Questo tipo di idea è sicuramente valido ai fini di introdurre una semplice analisi in frequenza: dato un certo spazio, si sfrutta l'esistenza di una successione ortogonale tale da poter generare, mediante le combinazioni lineari dei suoi elementi, qualsiasi elemento appartenente allo spazio, in modo da poter rappresentare un vettore (una funzione) mediante una certa base di vettori (o di funzioni, dal momento che si sta parlando di spazi funzionali). Fino a questo punto, tuttavia, non è stato possibile introdurre un metodo per l'espansione di funzioni, in grado di scomporre una funzione mediante l'uso di due basi, ossia considerando nello sviluppo finale contemporaneamente due domini.

Il fisico ungherese Dennis Gabor concepì l'idea di sviluppare una funzione a una sola variabile (quale ad esempio un segnale, ossia una generica grandezza variabile nel tempo) mediante una base di due variabili, dove una variabile è la reciproca dell'altra (caso eccellente per quanto concerne l'analisi in tempo-frequenza: a partire da un esame variabile nel dominio del tempo, si ottiene così una rappresentazione in un piano tempo-frequenza).

L'idea alla base di questo sviluppo consiste nel discretizzare il piano tempo-frequenza, suddividendolo in una "griglia" composta da punti tra loro equispaziati sui due assi (tempo e frequenza); data una distanza temporale T , e una distanza in frequenza N , un generico punto si può identificare come:

$$t_i = nT \quad \nu_i = mN \quad -\infty \leq n, m \leq +\infty$$

L'idea fondamentale di Gabor fu quella di considerare il fatto che un generico segnale potesse essere espanso nella forma:

$$x(t) = \sum_{n,m} c_{n,m} h_{n,m}(t) \quad n, m \in]-\infty; +\infty[$$

Dove:

$$h_{n,m}(t) = h(t - mT)e^{j2\pi nNt}$$

Dove $c_{n,m}$ sono i coefficienti, i pesi della funzione, e $h(t)$ è una funzione a una variabile. Ciascun coefficiente, al variare di n e m , indica il peso, l'intensità della funzione di densità risultante in questo dominio bidimensionale discretizzato.

Ci si potrebbe porre una domanda: esiste, a questo punto, una funzione ottimale per essere $h(t)$? Si cerchi di interpretare il significato vero e proprio di $h(t)$: essa deve essere una funzione in grado di gestire, al variare della propria posizione, il peso delle componenti temporali e delle componenti spettrali del segnale, in modo da fornirne la miglior rappresentazione contemporaneamente nel tempo e nella frequenza possibili. A limitare questo tipo di rappresentazione, come è ben noto dalla trattazione, è il principio di indeterminazione della trasformata di Fourier: il dominio della rappresentazione nel dominio del tempo del segnale fornisce precisi limiti al dominio della rappresentazione nel dominio spettrale, e viceversa. Dalla trattazione, nonché dall'Appendice B, si può evincere il fatto che il miglior segnale in termini di compattezza come prodotto tempo-frequenza sia la funzione gaussiana:

$$h(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha t^2}$$

I coefficienti da ricavare ai termini di caratterizzare l'espansione non sono unici, come non sono unici i metodi di calcolo approntati al fine di determinarli. Non si approfondirà ulteriormente l'argomento.

A.3.1 Applicazione dell'espansione di Gabor : cross-terms

Il formalismo di Gabor per l'espansione in tempo-frequenza di generici segnali variabili nel dominio del tempo può essere utilizzato per molti obiettivi che non vengono analizzati in quest'appendice. Ciò che si intende fare, per completare il discorso, è presentare un'applicazione teorica di questo tipo di formalismo. Nella trattazione si è parlato di distribuzione di Wigner-Ville, distribuzione eccellente se non per un difetto abbastanza importante da considerare: la presenza di cross-terms. Mediante il formalismo di Gabor è possibile "visualizzare" analiticamente la presenza di cross-terms, riuscendo così a dar loro un significato matematico.

Dal momento che il formalismo di Gabor produce l'espansione di una generica funzione matematica nel dominio in cui essa varia e nel suo dominio reciproco,

si sviluppa il termine bilineare da integrare nell'espressione della distribuzione di Wigner-Ville secondo l'espansione di Gabor:

$$x^* \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) x \left(u + \frac{1}{2}\tau \right) = \sum_{n',m'} \sum_{n,m} c_{n',m'}^* c_{n,m} h_{n',m'}^* \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) h_{n,m} \left(u + \frac{1}{2}\tau \right)$$

La forma generale della distribuzione di Wigner-Ville in espansione di Gabor può essere scritta come:

$$W(t, \nu) = \sum_{n',m'} \sum_{n,m} c_{n',m'}^* c_{n,m} W_{n',m';n,m}(t, \nu)$$

Dove il coefficiente $W_{n',m';n,m}(t, \nu)$ è calcolato mediante la definizione di classe di Cohen per n, m , utilizzando kernel unitario:

$$W_{n',m';n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{n',m'}^* \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) h_{n,m} \left(u + \frac{1}{2}\tau \right) dud\tau d\vartheta$$

Espandendo le sommatorie, è possibile dividerle in due sotto-sommatorie, distinguendone una globale, e una in cui non si considerano $n = n'$ e $m = m'$:

$$W(t, \nu) = \sum_{n,m} |c_{n,m}|^2 W_{n,m;n,m}(t, \nu) + \sum_{n,mn \neq n' m \neq m'} c_{n',m'}^* c_{n,m} W_{n',m';n,m}(t, \nu)$$

Ciò è vero, ipotizzando che le $h(t)$ siano effettivamente funzioni gaussiane, come supposto da Gabor. In tal caso, si riescono a distinguere due sommatorie: la prima, contenente i soli termini di energia, come una sorta di Parseval in tempo-frequenza, e l'altra in cui si considerano termini spuri, derivanti dall'errore causato dalla bilinearità della distribuzione di Wigner-Ville. In questo modo, prettamente matematico, è stato possibile presentare quantomeno i passi fondamentali ai fini di ricavare un'espressione analitica dei cross-terms.

Osservazioni finali

La rappresentazione di Gabor completa di fatto l'appendice, introducendo un'idea riguardo lo sviluppo in serie, l'espansione, di una funzione in una variabile in una somma di funzioni in più variabili. Questo tipo di rappresentazione introduce un formalismo molto interessante che si è scelto di presentare quantomeno in forma "primordiale", anche per una motivazione in grado di permettere un'intuizione ulteriore

riguardo una delle distribuzioni in tempo-frequenza: di fatto, l'idea dello spettrogramma e quella dell'espansione di Gabor non sono molto lontane tra loro. Questo, di fatto, perché in entrambe le rappresentazioni è presente un concetto, quello di "suddivisione" dello spazio mediante una sorta di processo di discretizzazione (di fatto, più evidente nel discorso dell'espansione di Gabor).

La differenza fondamentale tra spettrogramma ed espansione di Gabor è la seguente: se da un lato l'espansione di Gabor è basata sullo studio di un'espressione di sintesi, atta cioè a ricercare da subito una base idonea per la ricostruzione del segnale, nello spettrogramma si parte dall'espressione analitica, e da essa si definisce una base ad hoc di funzioni atta a "analizzare" il segnale, finestrandolo. In entrambi i casi, tuttavia, può capitare un fatto molto spiacevole rispetto a ciò che è stato precedentemente detto per quanto concerne le basi di spazi di Hilbert e nella fattispecie le basi di Fourier: spesso, le funzioni costituenti la base per le espansioni di Gabor e in spettrogrammi, sono non ortonormali. La teoria espressa nella sezione, nonostante ciò, è da considerarsi assolutamente valida e applicabile, come finora fatto.

Appendice B

Trasformata di Fourier

Viene introdotta nella presente appendice un'analisi più completa rispetto a quella introdotta nel cuore della trattazione, riguardo il mezzo fondamentale sul quale si basa l'analisi in frequenza di segnali, la trasformata di Fourier.

Si potrebbe incominciare l'appendice con un interrogativo: perché vogliamo un mezzo più potente della già eccellente serie? La risposta è semplice: un limite che abbiamo annunciato, ma non sufficientemente evidenziato, è il fatto che la serie di Fourier è in grado di sviluppare, di rappresentare, solo e unicamente segnali con dominio del tempo limitato, ossia a tempo di vita nel dominio del tempo limitato. Supponendo di avere tuttavia un segnale per esempio del tipo:

$$x(t) = u(t)e^{-kt}$$

Questo segnale è utilissimo: esso rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale modellizzante un circuito RC, e quindi di sicuro potrebbe essere studiata molto spesso quantomeno in ambito elettronico. Si ricordi che la soluzione di equazioni differenziali a coefficienti costanti ha comunque una forma contenente esponenziali di questo tipo, quindi moltissimi sistemi modellizzati mediante oscillatori armonici avrebbero bisogno, per un'analisi in frequenza, di avere un mezzo matematico di analisi come quello che vogliamo ottenere.

Come potremmo fare? Questo segnale non ha dominio limitato, infatti è non nullo su tutto il semiasse di tempo positivo. Servirà un qualcosa in grado di esprimere, nel dominio delle frequenze, anche un segnale a tempo di vita non limitato. Vediamo come arrivarci in modo quantomeno intuitivo.

B.1 Dalla Serie alla Trasformata di Fourier

Prima di gettarci in pasto ai formalismi (che comunque purtroppo in questa appendice potranno non essere soddisfacenti ai cultori della matematica formale), cerchiamo di capire una nuova cosa dalla serie di Fourier, o meglio di interpretare meglio il risultato dello sviluppo. Prima abbiamo sviluppato in serie una porta, un segnale a finestra rettangolare. Sviluppando in serie di Fourier questo segnale, cosa troviamo? Nel dominio delle frequenze troviamo non solo la funzione limitata nel suo tempo di esistenza, $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$, ma della stessa funzione prolungata per periodicità su tutto l'asse dei tempi. Spieghiamoci meglio: si considera un singolo periodo, ma di fatto il risultato che si ottiene è sviluppare la funzione per periodicità, ossia continuare a “ripetere” questo periodo, per tutto l'asse dei tempi, da $-\infty$ a $+\infty$.

Ciò che la serie di Fourier rappresenta non vale solo per un periodo, bensì per tutto l'asse reale; prima abbiamo infatti calcolato la serie di Fourier di una porta, ma quello che abbiamo di fatto ottenuto è la serie di Fourier di un'onda quadra: limitando l'onda quadra su di un suo periodo, infatti, si ottiene un singolo impulso rettangolare. Di qui, calcolando i coefficienti, si troverà una rappresentazione in serie di Fourier non solo della porta, bensì dell'intera onda quadra (o treno di impulsi) su tutta la retta reale \mathbb{R} .

Si può banalmente dimostrare che la serie di Fourier rispetta la definizione di periodicità, e dunque è periodica! Ricordando che:

$$x(t + T) = x(t)$$

Il segnale $x(t + T)$, sviluppato in serie di Fourier, varrà:

$$x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}n(t+T)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} e^{j\frac{2\pi}{T}nT}$$

Semplificando l'argomento dell'esponenziale, vediamo che si ottiene:

$$x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} e^{j2\pi n}$$

Ma $2\pi n$ è multiplo di 2π , dal momento che $n \in \mathbb{Z}$, e quindi possiamo dire che esso valga sempre 1:

$$x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = x(t)$$

In poche parole, abbiamo appena dimostrato che con la serie di Fourier si possono trattare tutti i segnali periodici che sull'intervallo-periodo base sono a energia finita. Ciò però vale ovviamente per un T finito, ossia per un periodo finito, tale per cui si possa riprodurre continuamente il contenuto di un singolo periodo sull'asse reale.

Proviamo a pensare a una cosa un po' particolare: abbiamo appena detto che T deve essere finito, al fine di poter calcolare tutto con la serie di Fourier. Ma se provassimo a raddoppiarlo? Cosa otterremmo? Vediamo un po': definiamo un nuovo periodo $T' = 2T$, e calcoliamo i relativi μ_n :

$$\mu'_n = \frac{1}{T'} \int_{-\frac{T'}{2}}^{+\frac{T'}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T'}nt} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j\frac{\pi}{T}nt} dt$$

Cosa abbiamo ottenuto? Vediamo, osservando semplicemente l'espressione precedente, che per n pari, i μ_n saranno gli stessi di prima; gli n dispari saranno invece nuovi, e avranno dei μ_n nuovi: abbiamo infatti diminuito il passo di campionamento, ossia la distanza minima sull'asse delle frequenze nel dominio di Fourier, e nella fattispecie dimezzato. Ciò che abbiamo fatto, dunque, raddoppiando il periodo, è stato "infittire" l'asse dei tempi, renderlo più fitto, aumentare i punti del dominio di esistenza. Nella fattispecie abbiamo raddoppiato il numero di punti esistenti:

$$\nu'_0 = \frac{1}{T'} = \frac{1}{2} \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \nu_0$$

La nuova "griglia" sarà doppiamente più fitta della precedente, poiché il passo si è dimezzato: nei punti pari ritroviamo i vecchi μ_n , nei dispari troviamo nuovi μ_n , che vanno a campionare sempre la stessa curva involuppo, ma aumentando la precisione e la qualità del campionamento.

Cosa possiamo fare ora, in maniera del tutto intuitiva? Se raddoppiando T abbiamo dimezzato il tempo di campionamento, proviamo a pensare cosa capiterebbe se continuassimo ad aumentare il periodo T dell'ipotetico segnale da analizzare: sicuramente il passo di frequenza diventerebbe minimo, infinitesimo; ciò che si otterrebbe, idealmente parlando, sarebbe passare da un insieme numerabile di punti, discreto, a uno più che numerabile, a un insieme completo, con la potenza del continuo: aumentare all'infinito il periodo farebbe tendere a 0 il tempo di campionamento, e quindi a un infinitesimo. Cerchiamo, per quanto sia possibile, di introdurre un po' di formalismo in tutto ciò:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T}nt'} dt' \right) e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Se il periodo $T \rightarrow +\infty$, avvengono i seguenti fatti, intuitivamente parlando:

- L'integrale più interno verrà valutato da $-\infty$ a $+\infty$, poiché il limite prolunga all'infinito l'intervallo di integrazione;
- Definendo le seguenti grandezze:

$$\frac{1}{T} = \nu_0$$

$$\frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T} = \Delta\nu$$

Dove $\Delta\nu$ dunque è il passo di campionamento in frequenza, dal momento che T cresce tendendo a ∞ , il $\Delta\nu$ tende a diventare un differenziale, ossia un $d\nu$;

- Non effettuiamo più passi discreti al variare di un $n \in \mathbb{Z}$, ma variamo nel continuo:

$$n\nu_0 = \nu, \nu \in \mathbb{R}$$

Tenendo conto di tutte queste espressioni, di tutto questi cambiamenti, otterremo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi\nu t'} dt' \right] e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

L'integrale più interno, tra parentesi quadre, viene definito $X(\nu)$, ossia la Trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, e sarà identificato come:

$$X(\nu) = \mathcal{F} \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

L'integrale più esterno riesce a invertire la trasformata, tornando al segnale di partenza nel dominio del tempo $x(t)$:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(\nu)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

Gli operatori che abbiamo appena introdotto, ossia la coppia trasformata/antitrasformata di Fourier, permettono di passare dal dominio del tempo al dominio delle frequenze segnali a tempo di vita non limitato, aperiodici. La trasformata di Fourier $X(\nu)$

viene detta anche “spettro delle frequenze” o “spettro in frequenza” (frequency spectrum) di un segnale, poiché rappresenta la naturale estensione per segnali aperiodici della serie di Fourier: se prima potevamo analizzare il contributo solo di frequenze n -esime, ora sarà possibile selezionare una qualsiasi frequenza appartenente all’asse reale, e studiarne il contributo, mantenendo le stesse idee precedentemente utilizzate e proposte per quanto riguarda lo studio mediante serie di Fourier.

Dal momento che $X(\nu)$ si definisce mediante un integrale complesso, possiamo banalmente intuire che essa sia una funzione complessa. Possiamo dunque esprimerla mediante la nostra solita notazione, come modulo e fase:

$$X(\nu) = |X(\nu)| e^{j\angle X(\nu)}$$

La trasformata di Fourier ci permette di analizzare segnali appartenenti a una classe molto più ampia rispetto a quelli sviluppabili in serie di Fourier; vi è tuttavia qualche analogia tra i due strumenti, come vogliamo ora dimostrare mediante un esempio pratico.

Esempio Pratico

Dato il segnale:

$$x(t) = Ap_T(t)$$

Calcolarne la trasformata di Fourier.

Utilizzando la definizione, possiamo semplicemente dire che:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{Ap_T(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ap_T(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi\nu t} dt = \frac{A}{-j2\pi\nu} e^{-j2\pi\nu t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{-j2\pi\nu} \left(e^{-j2\pi\nu \frac{T}{2}} - e^{j2\pi\nu \frac{T}{2}} \right) = \frac{A}{j2\pi\nu} \left(e^{j2\pi\nu \frac{T}{2}} - e^{-j2\pi\nu \frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A \sin(\pi\nu T)}{\pi\nu} \end{aligned}$$

Cosa abbiamo ritrovato? Un seno cardinale, esattamente come ci era capitato nel calcolo mediante serie di Fourier ! Abbiamo ottenuto dunque lo stesso risultato che avevamo ottenuto precedentemente, cosa che conferma la validità della trasformata da noi ricavata: i nostri ragionamenti, fino a qui, funzionano.

Esempio Pratico

Proviamo ora a fare qualcosa di diverso, cercando di applicare la trasformata di Fourier per il motivo per cui l'abbiamo creata: studiare segnali non periodici, a tempo di vita non limitato, e quindi non sviluppabili in serie di Fourier; consideriamo in questo esempio pratico il segnale:

$$x(t) = u(t)e^{-kt}$$

Calcoliamo al solito mediante la definizione:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-kt}e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(k+j2\pi\nu)} dt = \\ &= \frac{e^{-(k+j2\pi\nu)t}}{-(k+j2\pi\nu)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{k+j2\pi\nu} \end{aligned}$$

Beh, abbiamo calcolato la trasformata, calcoliamone modulo e fase! Utilizzando le proprietà dei numeri complessi, vediamo:

$$\begin{aligned} |X(\nu)| &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 4\pi^2\nu^2}} \\ \angle X(\nu) &= -\arctan\left(\frac{2\pi\nu}{k}\right) \end{aligned}$$

Nota, errore che può capitare spesso: il “-” si introduce davanti all’arcotangente dal momento che prima portiamo la funzione al numeratore, elevandola alla “-1”, e poi calcoliamo l’angolo a partire dalla tangente così ricavata.

Le armoniche dell’esponenziale, per quanto riguarda il loro modulo, sono concentrate sulle basse frequenze (poiché $|X(\nu)|$ è molto elevata in un intorno di $\nu = 0$, e tende a decrescere all’aumentare di ν).

B.2 Alcune Domande e Relative Risposte

Poniamoci alcune domande, riguardo ciò che abbiamo appena presentato e visto, cercando di rispondere, al fine di fornire idee e chiarire concetti.

B.2.1 Quali segnali sono trasformabili?

Alla domanda “quali segnali sono trasformabili?” potremmo rispondere molto banalmente: la trasformata di Fourier esiste sempre per segnali a energia finita, ossia per i segnali del mondo fisico. Vorrei far notare che esistono molti dibattiti sulle condizioni minimali di convergenza della trasformata di Fourier, che vengono affrontati, in Analisi Matematica, introducendo la Teoria delle Distribuzioni, e un determinato formalismo generalizzante il concetto di “funzione” nel concetto di “distribuzione”, e introducendo spazi distribuzionali di convergenza. Noi non considereremo tutto questo, anche perché per quanto teorica questa trattazione vuole essere rivolta a un lettore in cerca di “pratica”, non di formalismi (cercando di non andare troppo al di sotto dei limiti imposti dal “buon gusto” della matematica). Per noi, quindi, i segnali trasformabili mediante trasformata di Fourier saranno semplicemente tutti i segnali a energia finita. Vale, come per quanto riguarda la serie di Fourier, l’eguaglianza di Parseval, affermando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

L’energia del segnale nel dominio del tempo, e nel dominio della frequenza, resta sempre la stessa. Questo significa “convergenza in norma quadratica”: abbiamo la garanzia di avere la stessa energia, in entrambi i domini di studio.

B.2.2 Qual è il significato fisico delle frequenze negative?

Domanda interessante su di un argomento che non abbiamo ancora toccato: trasformando mediante la trasformata di Fourier un segnale, nel dominio delle frequenze avremo (praticamente sempre) tanti valori sul semiasse negativo quanti sul semiasse positivo. Ma quindi significa che si hanno contributi delle frequenze negative! Quello che ci chiediamo è: quale significato fisico hanno le frequenze negative?

La risposta è molto semplice: nessuno: fisicamente, non è possibile interpretare in alcun modo una frequenza negativa.

Abbiamo però un notevole vantaggio: i segnali del mondo fisico sono tutti reali, e quindi funzioni del tipo:

$$x(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Per questo motivo, come dimostreremo, il modulo della trasformata di Fourier è una funzione pari, la fase della trasformata di Fourier è dispari, e quindi le frequenze negative non aggiungono informazione, non dicono niente di nuovo sul segnale

(niente che non si possa capire guardando la parte positiva del segnale e conoscendo la relazione di parità/disparità rispettivamente di modulo e fase).

B.2.3 Abbiamo più armoniche nella serie o nella trasformata?

Domanda che potremmo porci, volendo, è la seguente: abbiamo più armoniche, cioè più punti da studiare, nella serie di Fourier o nella trasformata di Fourier? Quello che noi facciamo ogni volta è studiare i contributi delle singole armoniche, delle singole $e^{i2\pi\nu t}$, ossia degli esponenziali complessi. Quello che vogliamo capire è: ci sono più armoniche nella serie, o nella trasformata?

In entrambe le espressioni, abbiamo infinite armoniche. Il problema è che non tutti gli infiniti sono uguali! Nell'ambito della serie di Fourier, abbiamo che ciascun μ_n varia con $n \in \mathbb{Z}$, dove \mathbb{Z} è un insieme numerabile, cioè che ha la potenza del discreto. La trasformata di Fourier lavora su \mathbb{R} , e ha quindi la potenza del continuo, che è molto più che numerabile! Si tratta di due infiniti, ma di potenza molto diversa! Dalla topologia, infatti, possiamo sapere che \mathbb{R} è un insieme "completo", poiché copre tutti i vari "buchi" tra un razionale e un altro. Senza andare troppo nel dettaglio, si sappia dunque che, pur essendo entrambe infinite, le armoniche fornite dalla trasformata di Fourier sono molto maggiori di quelle fornite dalla serie di Fourier.

B.3 Introduzione ai segnali generalizzati: la Delta di Dirac

Il concetto di distribuzione (o di funzione generalizzata) nasce nel 1900 circa dal fisico Paul Adrien Maurice Dirac, che aveva bisogno di una modellizzazione ideale di particolari fenomeni, su tutti di quelli impulsivi. Dirac introdusse così la Delta, ossia il modello di un segnale impulsivo. Più avanti matematici del calibro di Schwartz, Sobolev e altri, introdussero un formalismo matematico per la teoria, estendendola notevolmente.

Il segnale generalizzato più interessante è la Delta di Dirac della quale stiamo facendo molte lodi: $x(t) = \delta(t)$. Possiamo dire che $\delta(t)$ sia il metodo di misura ideale per un fenomeno: un metodo di misura preciso, senza incertezze e latenze.

Impropriamente la definizione di Delta che si introduce è quella come integrale, anche se sarebbe più corretto parlare della più formale definizione mediante fun-

zionale. Utilizzando dunque una sorta di prodotto scalare, considerato in ambito distribuzionale, definiamo la Delta di Dirac applicata su di un segnale $x(t)$ come:

$$\langle \delta(t) | x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt \triangleq x(0)$$

Cosa significa tutto ciò? Cerchiamo di capirlo! Dato un segnale, vorremmo farne la misura in un punto, ossia rilevare, campionare il suo valore in un dato punto. Ciò che uno strumento di misura dunque fa, è effettuare la misura di $x(t_0)$, con una certa incertezza T sul valore catturato. Possiamo modellizzare la misura come il calcolo dell'area di una porta di altezza pari al segnale:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) p_T(t - t_0) dt$$

Due accorgimenti:

- Scegliamo di considerare una misura mediata, ossia di normalizzare l'integrale di un divisore T , dividendo dunque tutto per T (teorema della media integrale);
- poiché T è piccolo, dato che utilizziamo (o almeno ipotizziamo di utilizzare) uno strumento accuratissimo, l'area del tratto di rettangoloide si può circa approssimare con l'area della porta di altezza $x(t_0)$, ossia del segnale valutato nel punto, poiché ci si trova in un intorno di questo punto e si può considerare ciò una buona approssimazione:

$$\hat{x}(t) \sim \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) p_T(t - t_0) dt = \frac{x(t_0)}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 dt = T \cdot \frac{x(t_0)}{T} = x(t_0)$$

Ciò è vero, se la larghezza della porta, T , tende a 0: con uno strumento privo di indeterminazione, e quindi ideale. Come vedremo tra breve, questa è un'interpretazione, una definizione di $\delta(t)$.

B.3.1 Proprietà della Delta di Dirac

Elenchiamo qui un insieme proprietà od osservazioni riguardanti la Delta di Dirac, dimostrando quelle non banali che presenteremo.

Definizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

Definizione come limite di una porta per larghezza infinitesima

Come già detto, una possibile definizione di $\delta(t)$, è il limite della porta per $T \rightarrow 0$: se infatti T si stringe, e l'ampiezza della porta rimane costante, poiché l'integrale della porta deve sempre valere 1, possiamo immaginare che più lo "spessore", la "larghezza" della porta diventi infinitesima, più si elevi l'altezza, mantenendo sempre costante l'integrale, che varrà sempre 1:

$$\lim_{T \rightarrow 0} p_T(t) = \delta(t)$$

Nota: esistono altre definizioni asintotiche di δ , che forse definiremo in seguito.

Riscalamento di una Delta

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) = \frac{1}{|a|}x(0) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Dimostrazione: dalla teoria delle distribuzioni, utilizzando un po' di quel formalismo che ci sta così simpatico:

$$\langle \delta(at)|x(t) \rangle \triangleq \langle \delta(t)|\frac{1}{|a|}x(t) \rangle = \frac{1}{|a|}x(0) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Scaricando tutto come di solito si fa sulla funzione test, che in questo caso è il nostro "misurando", il segnale $x(t)$, si ottiene facilmente questa proprietà. Le motivazioni derivano dalla Teoria delle Distribuzioni, e si possono facilmente dimostrare estendendo i risultati ottenuti dalle distribuzioni regolari sullo spazio \mathcal{D} . In una dispensa di Teoria delle Distribuzioni sicuramente saranno formalizzati tutti i passaggi.

Lemma della precedente proprietà

La Delta di Dirac è una funzione pari (funzione generalizzata, ma chiamiamola senza troppi problemi funzione):

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

Dimostrazione: dalla proprietà appena vista:

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \delta(t) = \delta(t)$$

Supporto della Delta

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

La $\delta(t)$ è una funzione generalizzata il cui supporto è esclusivamente $t = 0$.

Proprietà di Campionamento

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Questa proprietà ha in sé probabilmente un alone di misticismo, ma in realtà è molto intuitiva; inoltre, è assolutamente fondamentale perché permette di “campionare” (come suggerito nel nome che le è stato scelto) un valore. La proprietà è intuitiva per il seguente motivo: se a una funzione moltiplichiamo una Delta di Dirac (in questo caso supposta centrata in 0), capita che tutto ciò che sta fuori dal supporto della Delta viene annullato (moltiplichiamo infatti la funzione per 0 per qualsiasi punto, come immaginiamo dalla proprietà del supporto appena presentata); tutto ciò che resta della funzione sarà dunque il valore presente sull’intersezione dei supporti delle due funzioni, e quindi solo nel punto in cui esiste la delta, ottenendo così banalmente questa formula.

Proprietà della Trasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j2\pi\nu t} dt = \delta(\nu)$$

Questa proprietà è veramente importantissima, e anche interessantissima, poiché deriva da una considerazione non ancora fatta sulla trasformata di Fourier. Prima di parlarne, diamone una dimostrazione basata sul formalismo della Teoria delle Distribuzioni.

Dimostrazione: consideriamo, dalla Teoria delle Distribuzioni, la Trasformata di Fourier di una $\delta(t)$, come:

$$\langle \delta(t) | e^{-j2\pi\nu t} \rangle = \langle \delta(t) | e^{-j2\pi\nu 0} \rangle = 1$$

Anticipando la proprietà di simmetria, valida per la trasformata di Fourier (che dopo discuteremo e dimostreremo ampiamente):

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(\nu) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi\nu t} dt = \delta(\nu)$$

Questo fatto ha un'interpretazione fisica veramente affascinante: se noi trasformiamo mediante Fourier una costante ($\nu = 0$), troveremo una $\delta(\nu)$, ossia un impulso fissato alla frequenza nulla. Se ci pensiamo, se il segnale nel tempo è una costante, significa che si ha solo ed esclusivamente una continua, e dunque solo una componente a frequenza nulla! Supponendo ora di avere invece una sinusoidale come esponenziale complesso a frequenza ν_0 , allo stesso modo avremo, nel dominio di Fourier, solo una $\delta(\nu - \nu_0)$, ossia una delta di Dirac centrata in ν_0 . Questo perché la sinusoidale ha una sola componente in frequenza, perché si può esprimere come una sola sinusoidale, e dunque è sufficiente una delta, una riga spettrale nel dominio di Fourier.

Derivata del gradino di Heavyside

Si può dimostrare, mediante la Teoria delle Distribuzioni, che:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \delta(t)$$

Essendo materia di Teoria delle Distribuzioni, si sceglie di trascurare qui la dimostrazione formale.

B.3.2 Esempio Pratico 1

Consideriamo, al fine di meglio comprendere le proprietà della Delta appena introdotte, tre esempi pratici, di cui questo è il primo. Questo esempio riguarderà la proprietà 6, e vuole essere esplicativo sul come applicarla “al meglio”: tutto ciò che sta tra “ $j2\pi$ ” e “ t ” sarà argomento della δ dopo aver calcolato l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi[\text{QUALCOSA}]t} dt = \delta([\text{QUALCOSA}])$$

Ad esempio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(x^3+x)t} dt = \delta(x^3 + x)$$

Nota: questa proprietà vale solo e soltanto se l'integrale viene calcolato su tutta la retta reale! Se così non fosse la proprietà non è valida, e bisogna calcolare con metodi più ‘classici’ il tutto.

B.3.3 Esempio Pratico 2

Dato il segnale $x(t)$:

$$x(t) = e^{j2\pi\nu_0 t}$$

Calcolarne la trasformata di Fourier.

Molto semplice:

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi(\nu-\nu_0)t} dt = \delta(\nu - \nu_0)$$

B.3.4 Esempio Pratico 3

Nota: questo esempio pratico è a dir poco fondamentale, e sarà usatissimo in tutta la trattazione. Si conosca dunque molto bene, data la sua enorme importanza.

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$:

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$$

Utilizziamo la formula derivante da quella di Eulero, ottenendo:

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{1}{2} [e^{j2\pi\nu_0 t} + e^{-j2\pi\nu_0 t}]$$

Niente di più banale! Riutilizzando l'esempio pratico 2, otterremo semplicemente:

$$X(\nu) = \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

Ossia, la trasformata di Fourier di un coseno è uguale alla somma di due δ , traslate di $+\nu_0$ e $-\nu_0$. Si ricordi sempre questo esempio, in quanto fondamentale.

B.4 Proprietà della Trasformata di Fourier

Al fine di poter studiare efficacemente l'analisi dei segnali, è necessario conoscere molto bene le proprietà della trasformata di Fourier. Per questo, ora elencheremo le prime proprietà, proponendo per ciascuna una dimostrazione, corredando il tutto con riflessioni che permettano di meglio coglierne l'essenza.

B.4.1 Proprietà di Linearità

Dato segnale $y(t)$ definito come:

$$y(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$Y(\nu) = \mathcal{F}\{y(t)\} = a\mathcal{F}\{x_1(t)\} + b\mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

Dimostrazione

Essendo l'integrale un operatore lineare operante su spazi vettoriali, si ha che:

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [ax_1(t) + bx_2(t)] e^{-j2\pi\nu t} dt = \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j2\pi\nu t} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = a\mathcal{F}\{x_1(t)\} + b\mathcal{F}\{x_2(t)\} \end{aligned}$$

B.4.2 Proprietà di Parità

Dato un segnale reale $x(t)$, allora il modulo della sua trasformata di Fourier, $|X(\nu)|$ è una funzione pari, mentre la fase della sua trasformata di Fourier è una funzione dispari.

Dimostrazione

In senso molto generale, potremmo interpretare $x(t)$ come modulo e fase nel piano complesso:

$$x(t) = |x(t)| e^{j\angle x(t)}$$

poiché tuttavia ci troviamo in \mathbb{R} , abbiamo che:

$$x(t) = \pm |x(t)|$$

poiché, trovandoci sull'asse reale, la fase può essere o 0 o π , se i numeri sono rispettivamente o positivi o negativi.

Possiamo dunque pensare alla quantità $e^{j2\pi\nu t}$, mediante la formula di Eulero, come:

$$e^{j2\pi\nu t} = \cos(2\pi\nu t) + j \sin(2\pi\nu t)$$

Possiamo dunque calcolare la trasformata di Fourier come somma di due contributi: quello della parte reale, e quello della parte immaginaria, partendo da ciò che abbiamo ottenuto:

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi\nu t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi\nu t) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi\nu t) dt = \operatorname{Re}[X(\nu)] + j \operatorname{Im}[X(\nu)] \end{aligned}$$

Possiamo fare alcune considerazioni: si vede molto bene, da queste ultime definizioni, che, in caso di funzioni reali (come secondo le ipotesi che abbiamo finora seguito per arrivare a questo risultato), che la parte reale sia una funzione pari, e la parte immaginaria una funzione dispari. Vediamo perché:

$$\operatorname{Re}[X(-f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi(-f)t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi\nu t) dt = \operatorname{Re}[X(\nu)]$$

$$\operatorname{Im}[X(-f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi(-f)t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi\nu t) dt = -\operatorname{Im}[X(\nu)]$$

poiché sappiamo dall'algebra che una funzione dispari al quadrato diviene pari, che la somma di funzioni pari è ancora una funzione pari, e che la radice di funzioni pari è ancora una funzione pari, avremo che:

$$|X(\nu)| = \sqrt{[\operatorname{Re}[X(\nu)]]^2 + [\operatorname{Im}[X(\nu)]]^2}$$

Senza dubbio è pari.

Per quanto riguarda la fase:

$$\angle X(\nu) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}[X(\nu)]}{\operatorname{Re}[X(\nu)]}\right)$$

Notoriamente, nel suo dominio, l'arcotangente è una funzione dispari, dunque abbiamo dimostrato la relazione di parità tra le trasformate.

Ci siamo dilungati tanto su questa proprietà perché essa è fondamentale: come abbiamo già accennato, essa elimina, per quanto riguarda segnali reali, la presenza

di informazione nelle frequenze negative, perché introduce concetti di simmetria che ci permettono ricavare tutte le informazioni dalle sole frequenze positive. Si noti che ciò vale su segnali reali solo perché $\angle X(\nu) = 0; \pi$: in questo modo valgono le proprietà trigonometriche che hanno permesso la proprietà. Uno sfasamento sul piano complesso annullerebbe la proprietà di parità, anche se ciò nei segnali è impossibile da verificarsi, in quanto i segnali con cui si ha a che fare nel mondo fisico sono grandezze reali.

B.4.3 Proprietà di Anticipo/Ritardo

Dato un segnale $y(t)$ definito come:

$$y(t) = x(t - T)$$

La sua trasformata è:

$$Y(\nu) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = X(\nu)e^{-j2\pi\nu T}$$

In altre parole un ritardo, nel dominio della frequenza, si può interpretare come il prodotto per un fattore lineare di fase, ossia per un'armonica. Si parla di fattore lineare di fase poiché esso non provoca di fatto variazioni nello spettro di energia del segnale:

$$x(t) \longrightarrow \mathcal{S}_x(\nu) = |X(\nu)|^2$$

$$y(t) \longrightarrow \mathcal{S}_x(\nu) = |X(\nu)e^{-j2\pi\nu T}|^2 = |X(\nu)| \cdot e^{-j2\pi\nu T^2} = |X(\nu)|^2$$

Un ritardo del segnale nel dominio del tempo, non provoca alcuna variazione nello spettro di energia in frequenza.

Dimostrazione

Dato $y(t) = x(t - t_0)$:

$$Y(\nu) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Mediante un cambio di variabili, abbiamo:

$$s = t - t_0; t = s + t_0; dt = ds$$

Da qua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi\nu(s+t_0)} ds = e^{-j2\pi\nu t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi\nu s} ds = X(\nu)e^{-j2\pi\nu t_0}$$

B.4.4 Proprietà di Modulazione

Si tratta di una proprietà assolutamente duale alla precedente, molto utilizzata in ambito di telecomunicazioni. Essa ci dice che, dato un segnale $x(t)$:

$$\mathcal{F} \{x(t)e^{j2\pi\nu_0 t}\} = X(\nu - \nu_0)$$

Intuitivamente, cosa capita? Se moltiplichiamo nel dominio del tempo un segnale per un'armonica, il segnale al variare del tempo varierà seguendo il profilo precedente, ma anche la curva involuppo "dettata" dall'armonica. Ciò che facciamo è simile all'accelerare la $x(t)$, facendole seguire l'involuppo della sinusoidale, dell'armonica.

A cosa può servire questa cosa? Supponiamo di avere due segnali nel tempo, ad esempio due comunicazioni, che devono "parlare" tra loro sullo stesso filo. Supponiamo di avere questi $x_1(t)$ e $x_2(t)$, e di doverli mettere sullo stesso doppino. Per fare ciò, dovremo moltiplicare per una certa armonica i due, e così sintonizzarli a frequenze diverse, in modo da farli parlare sullo stesso filo, senza far sì che si sovrappongano e creino problemi e interferenze l'uno sull'altro. In questo modo, nel tempo, moltiplicheremo così:

$$x_1(t)e^{j2\pi\nu_1 t}$$

$$x_2(t)e^{j2\pi\nu_2 t}$$

Si noti che noi effettuiamo riscalamenti mediante prodotto per esponenziali complessi, ma nella pratica si moltiplica, nelle applicazioni di telecomunicazioni (ad esempio), per dei coseni. Dal momento che l'esponenziale complesso non esiste, la migliore cosa che possiamo fare è accontentarci del coseno, e ottenere:

$$Y(\nu) = x_1(\nu) \cos(2\pi\nu_1 t) + x_2(\nu) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

Dimostrazione

La dimostrazione è abbastanza banale e simile alla precedente; vediamo che se moltiplichiamo la funzione per $e^{j2\pi\nu_0 t}$, otteniamo:

$$X_0(\nu) = \mathcal{F} \{x(t)e^{j2\pi\nu_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi\nu_0 t} e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi t(\nu-\nu_0)} dt = X(\nu-\nu_0)$$

B.4.5 Proprietà dello Scalamento

Dato un segnale $x(t)$, uno scalamento nel tempo corrisponde a uno scalamento opposto in frequenza:

$$\mathcal{F} \{x(kt)\} \longleftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\nu}{k}\right)$$

Prima di dimostrare tutto ciò, alcune osservazioni. Prima di tutto, ricordiamo che:

- Se $|k| > 1$, si ha una compressione nel tempo;
- Se $|k| < 1$, si ha una dilatazione nel tempo.

Qual è il significato di tutto ciò? A una compressione nel tempo corrisponde una dilatazione nel dominio delle frequenze, a una dilatazione nel dominio del tempo corrisponde una compressione nel dominio delle frequenze.

Cosa significa “comprimere” un segnale? Significa, se vogliamo guardare sotto questo punto di vista, “variare la velocità di percorrenza”: moltiplicando t per un fattore positivo e maggiore di 1, con lo stesso “tempo” avremo percorso una maggior porzione di segnale, e avremo quindi una velocità maggiore! Per “aumentare la velocità di percorrenza”, quindi, intendiamo semplicemente aumentare la pendenza dei tratti di curva.

Prendendo ad esempio una finestra triangolare, aumentando la velocità di percorrenza ci mettiamo meno tempo a “salire” su per il triangolo, ma quindi esso sarà più compresso. Ciò che capita in frequenza, è il fatto che serviranno sinusoidi più ripide, con frequenze più elevate, poiché una sinusoidale a bassa frequenza è di fatto piatta, e quindi non in grado di presentare ripide pendenze. In questo modo, se servono sinusoidi a frequenza più alta, lo spettro si dilaterà: serviranno armoniche a frequenza più alta, ma quindi più lontane dall’origine, e quindi a compressione nel tempo, capiamo che ha senso pensare che ci sia una dilatazione in frequenza.

La riduzione dell’ampiezza sulle basse frequenze è dovuta al fatto che abbiamo sempre e comunque convergenza in norma quadratica, e quindi la stessa energia rispetto al tempo! Vale sempre e comunque l’eguaglianza di Parseval, dunque il fattore di normalizzazione è giustificato, dal momento che così si avrà sempre la stessa energia in entrambi i domini.

Dimostrazione

$$\mathcal{F}\{x(kt)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(kt)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Effettuiamo a questo punto un cambio di variabili:

$$s = kt; \quad t = \frac{s}{k}; \quad dt = \frac{1}{k}$$

Da qua avremo:

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi\frac{\nu}{k}s} \cdot \frac{1}{k} ds$$

Facciamo un'osservazione: se $k > 0$, tutto regolare; se $k < 0$, allora l'esponentiale avrebbe segno negativo, ma ciò va contro la definizione di trasformata di Fourier: l'esponente deve avere sempre segno negativo davanti. Dobbiamo dunque distinguere due casistiche:

$$\begin{cases} k, & k > 0 \\ -k, & k < 0 \end{cases}$$

Ma questa definizione ricorda proprio la definizione di funzione modulo! Al posto di k , molto banalmente, useremo $|k|$, che sostituisce esattamente il comportamento che ricerchiamo:

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi\frac{\nu}{|k|}s} ds = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\nu}{|k|}\right)$$

B.4.6 Proprietà della Convoluzione

Prima di introdurre questa proprietà, riprendiamo la definizione di prodotto di convoluzione da Analisi Matematica II; dati due segnali, $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$y(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau)x_2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t - \tau)x_1(\tau)d\tau$$

Il prodotto di convoluzione è un operatore commutativo. In seguito, vedremo la sua utilità nell'analisi dei segnali. La cosa interessante di questa proprietà è che quest'operazione, così difficile da calcolare (nella maggior parte dei casi reali), nel dominio di Fourier diviene un semplice prodotto algebrico!

$$y(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) \longleftrightarrow X_1(\nu) \cdot X_2(\nu)$$

Dimostrazione

Dato $y(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$, si vede che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau)x_2(\tau)d\tau$$

La sua trasformata di Fourier, $Y(\nu)$, sarà:

$$Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau)x_2(\tau)e^{-j2\pi\nu t}dtd\tau$$

Utilizziamo un piccolo artificio algebrico: moltiplichiamo per l'esponenziale complesso con variabile temporale τ , ossia per $e^{j2\pi\nu\tau}$; otteniamo così:

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau)x_2(\tau)e^{-j2\pi\nu(t-\tau+\tau)}dtd\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau)e^{-j2\pi\nu(t-\tau)}x_2(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}dtd\tau \end{aligned}$$

Utilizziamo ora un cambio di variabili: $t - \tau = s$; da qua, $dt = ds$; otterremo in questo modo da un singolo integrale doppio due integrali semplici moltiplicati tra loro, dal momento che le funzioni di integrazione dipenderanno da variabili differenti, e potremo così dire che:

$$\implies \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(s)e^{-j2\pi\nu s}ds \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}d\tau \right) = X_1(\nu) \cdot X_2(\nu)$$

Si noti che, come formalizzeremo meglio dopo, vale anche la proprietà duale (come spesso per l'appunto capiterà, a causa di una proprietà ancora da definirsi, nelle trasformate di Fourier): una convoluzione in frequenza diviene un prodotto algebrico nel tempo; dato $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$,

$$Y(\nu) = X_1(\nu) \otimes X_2(\nu)$$

B.4.7 Proprietà di derivazione

Dato un segnale $y(t)$ definito come:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$$

La sua trasformata di Fourier, $Y(\nu)$, sarà:

$$Y(\nu) = j2\pi\nu X(\nu)$$

Questa proprietà è una delle più classicamente usate e importanti sotto il punto di vista della risoluzione di sistemi differenziali (anche se più spesso si fa uso, allo stesso fine, della trasformata di Laplace, che ora non trattiamo): l'operazione di derivazione nel dominio del tempo coincide, nel dominio della frequenza, con una moltiplicazione per la variabile indipendente ν . Ciò significa che mediante la trasformata di Fourier è possibile ricondurre un'equazione differenziale di ordine generico a un'equazione algebrica, e dunque molto più semplice da risolvere.

Dimostrazione

Dato $y(t) = x'(t)$, abbiamo che:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\implies x(t)e^{-j2\pi\nu t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-j2\pi\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Sappiamo che come al solito $x(t)$ è trasformabile, a energia finita, e dunque:

$$x(t) \in \mathcal{L}^2$$

Dove \mathcal{L}^2 è lo spazio di funzioni il cui modulo quadro è integrabile in senso di Lebesgue. Per essere integrabile in tal senso, deve essere a supporto compatto, o quantomeno infinitesima all'infinito (in realtà la definizione richiederebbe il fatto che l'insieme sia a misura nulla, cosa che comunque noi supponiamo vera; a parte funzioni particolari, possiamo immaginare che quest'ipotesi sia sempre verificabile); ciò che possiamo dunque dire è che:

$$x(+\infty) = x(-\infty) = 0$$

Il primo termine dunque sparisce; osservando il secondo termine, si potrà dire banalmente che:

$$Y(\nu) = j2\pi\nu X(\nu)$$

Una nota: applicando iterativamente questo ragionamento, questa dimostrazione, alle derivate n -esime, si può dimostrare che, dato $y(t)$ così definito:

$$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$$

Si ha:

$$Y(\nu) = (j2\pi\nu)^n X(\nu)$$

B.4.8 Principio di Indeterminazione della trasformata di Fourier

Prima di introdurre l'enunciato del principio di indeterminazione riguardante la trasformata di Fourier, definiamo due quantità fondamentali che ci serviranno:

- Estensione temporale del segnale (o durata) d :

$$d^2 \triangleq \frac{1}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt$$

- Estensione in frequenza o 'banda' D del segnale:

$$D^2 \triangleq \frac{4\pi^2}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |X(\nu)|^2 d\nu$$

Nota: abbiamo chiamato D la banda del segnale, ma si noti che questa non è l'unica definizione di banda esistente (si noti che il 4π deriva dall'introduzione di una costante di normalizzazione, ma non sarebbe necessario, anche se permette di presentare un risultato più elegante ma equivalente a quello che si otterrebbe senza); inoltre, le varie definizioni non sono tra di loro equivalenti.

Passiamo all'enunciato del teorema in questione: il principio di indeterminazione afferma che, in un qualsiasi segnale a energia finita:

$$d \cdot D \geq \frac{1}{2}$$

Dimostrazione

Riprendiamo un attimo la definizione di D^2 , e vediamo che possiamo usare un piccolo accorgimento: applicando l'appena enunciata proprietà della derivazione e il teorema di Parseval/Plancherel, possiamo moltiplicare e dividere per $j2\pi$ all'interno del modulo, e ottenere:

$$D^2 = \frac{4\pi^2}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |X(\nu)|^2 d\nu = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 \varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} |j2\pi\nu X(\nu)|^2 d\nu$$

Utilizzando ora Plancherel, possiamo dire che l'integrale in modulo quadro di $j2\pi\nu X(\nu)$ coincide con l'integrale in modulo quadro della derivata del segnale $x(t)$, nel dominio del tempo! Semplificando dunque i termini $4\pi^2$, otteniamo:

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt$$

Abbiamo ottenuto una forma un po' più maneggevole per quanto riguarda D^2 ; studiamo a questo punto il prodotto durata-banda, e vediamo cosa capita:

$$d^2 \cdot D^2 = \frac{1}{\varepsilon_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt$$

Proseguiamo considerando la disuguaglianza di Schwartz; essa ci permette infatti di dire che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| dt \geq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \right]^2$$

A questo punto, calcoliamo, mediante la tecnica di integrazione per parti, l'integrale minorante il prodotto di durata e banda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) dx(t) = t \frac{x^2(t)}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

Dal momento che supponiamo il segnale a energia finita, vale il discorso effettuato al momento della dimostrazione della proprietà di derivazione: possiamo supporre, all'infinito, il valore del segnale infinitesimo, ossia tendente a 0; per questo motivo, $x_2(t)$, a $\pm\infty$, varrà 0. Rimarrà dunque solo il secondo integrale:

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon_x$$

Il fattore ε_x si ottiene osservando che il secondo integrale è semplicemente l'energia del segnale $x(t)$. Inseriamo il risultato dunque nel contesto precedente, ottenendo:

$$d^2 \cdot D^2 \geq \frac{1}{\varepsilon_x^2} \cdot \left[-\frac{1}{2} \varepsilon_x \right]^2 = \frac{1}{4}$$

Calcolando la radice, otterremo banalmente:

$$d \cdot D \geq \frac{1}{2}$$

Abbiamo così dimostrato il principio di indeterminazione della trasformata di Fourier! Questa dimostrazione non è del tutto generale: il principio di indeterminazione è infatti più “famoso” in ambito fisico, nella fattispecie in ambito di meccanica quantistica, parlando del più celebre principio di indeterminazione di Heisenberg: le incertezze di una grandezza fisica e del suo impulso associato, non commutanti (ad esempio posizione e velocità), moltiplicate tra loro, sono almeno uguali alla metà della costante di Planck normalizzata per 2π (\hbar). Una dimostrazione più completa coinvolge l'algebra degli operatori non commutanti, e arriva a un risultato simile, per quanto riguarda la meccanica quantistica.

Tralasciamo la fisica e riprendiamo la Teoria dei Segnali; cosa significa tutto ciò che abbiamo detto finora? Beh, partiamo da d , ossia dalla durata nel dominio del tempo del segnale. Definiamo una funzione ausiliaria $g(t)$, tale per cui:

$$g(t) = \frac{|x(t)|^2}{\varepsilon_x}$$

Si può notare che $g(t)$ ha due proprietà:

- Il suo integrale sulla retta reale è pari a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_x} = 1$$

- La funzione è sempre positiva o uguale al più a 0:

$$g(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Cosa ci ricorda tutto ciò? $g(t)$ ha le stesse caratteristiche richieste da una funzione di densità! Notiamo dunque un'interpretazione molto interessante; riprendendo la definizione di d^2 :

$$d^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \sigma_{f(t)}^2$$

Si può interpretare d^2 come un momento secondo probabilistico, ossia come una varianza! Di fatto, quindi, d rappresenta la radice della varianza del modulo quadro del nostro segnale. Maggiore sarà questa quantità, maggiore sarà l'estensione temporale, la dispersione del segnale nel dominio del tempo. Possiamo interpretare ciò volendo anche in meccanica classica, senza andar a prendere concetti probabilistici: a tutti gli effetti, possiamo pensare a d come a un momento di inerzia del segnale, o meglio della funzione rappresentante la densità dell'oggetto fisico in questione: più d è grande, più "voluminoso" sarà l'oggetto, e maggiore il suo momento di inerzia.

Potremmo fare le medesime considerazioni per D e lo spettro del segnale in frequenza: maggiore è D , maggiore è la dispersione sulle varie frequenze del segnale, e quindi il supporto dello spettro in frequenza.

Cosa ci dice il principio di indeterminazione? Rivediamo l'enunciato:

$$d \cdot D \geq \frac{1}{2}$$

Non abbiamo la possibilità di rendere la durata del segnale e contemporaneamente la sua banda arbitrariamente piccole, poiché ridurre un elemento va a scapito del supporto dell'altro; si noti che non è vero il contrario, dal momento che è possibile avere segnali di durata temporale infinita e larghezza di banda infinita (quantomeno in Teoria dei Segnali).

Ultima osservazione: quando abbiamo l'indeterminazione minima? Ossia, quando si verifica la condizione limite, $d \cdot D = \frac{1}{2}$? La risposta è: si può dimostrare che nella gaussiana si abbia la maggior concentrazione tempo-frequenza, e quindi si può avere l'indeterminazione minima.

La funzione gaussiana è una funzione dalle proprietà molto interessanti: altra proprietà che si può dimostrare più o meno facilmente, è il fatto che la trasformata di Fourier di una gaussiana sia ancora una gaussiana; altra cosa interessante, è il fatto che sia un esempio banale di segnale a durata infinita sia nel dominio del tempo sia nel dominio delle frequenze. Si ricordino queste note riguardo a questo tipo di segnale, poiché esso è uno dei più importanti nelle applicazioni pratiche.

B.4.9 Proprietà del Supporto

Esistono due proprietà, tra di loro duali, riguardanti il supporto di un segnale nel dominio del tempo, e dello stesso segnale nel dominio della frequenza. Esse si pos-

sono intuire leggendo la teoria sul principio di indeterminazione, tuttavia è molto importante enunciarle e dimostrarle, al fine di averne una maggiore comprensione, e introdurre qualche informazione aggiuntiva.

1. Se un segnale $x(t)$ è a supporto compatto nel tempo, allora la sua trasformata di Fourier, $X(\nu)$, ha supporto illimitato nel dominio delle frequenze;
2. Se un segnale nel dominio delle frequenze, $X(\nu)$, ha supporto compatto (limitato), allora nel dominio del tempo avrà supporto illimitato.

Dimostrazione punto 1

Per definizione, sappiamo che la trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ vale:

$$X(\nu) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Dal momento che, per ipotesi, $x(t)$ è a supporto compatto, supponiamo che l'intervallo di integrazione, $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$, sia simmetrico; inoltre, sviluppiamo in serie di Taylor l'esponenziale complesso, ottenendo:

$$\implies \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-j2\pi\nu)^n}{n!} t^n dt$$

poiché la serie converge uniformemente, possiamo utilizzare i teoremi di passaggio al limite, e dire che:

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) t^n dt \right] \cdot \frac{(-j2\pi)^n}{n!} \nu^n$$

Sappiamo che, poiché è trasformabile, $x(t) \in \mathcal{L}^2$; per la disuguaglianza di Schwartz, l'integrale cresce come $\frac{T}{2}$, quindi $X(\nu)$ è una funzione analitica, e quindi olomorfa. Essa dunque soddisfa le ipotesi del teorema di Liouville, e quindi è a supporto illimitato, poiché non può annullarsi se non in un insieme al più numerabile (discreto) di punti, ma non in un intervallo (poiché esso avrebbe un'infinità più che numerabile di punti al suo interno).

Dimostrazione punto 2

Si dimostra in maniera del tutto analoga al punto 1, di conseguenza non vale la pena riscrivere le stesse frasi, considerando l'antitrasformata di Fourier anziché la trasformata.

B.4.10 Proprietà della variabilità nel tempo

Dato un segnale $x(t)$ a banda limitata B , allora:

$$\frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \leq 2\pi B \int_{-B}^B |X(\nu)| d\nu \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Piccola premessa: in questa proprietà, per banda B intendiamo il semi-intervallo contenente il supporto della trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, ossia $X(\nu)$ (detto anche “banda unilatera”); per ipotesi, dunque, potremo dire che $X(\nu)$ sia non nulla solo per $B < \nu < B$, in questa proprietà. Si noti che questa definizione di banda è ben diversa da quella utilizzata parlando di principio di indeterminazione.

Prima di passare a una dimostrazione formale, cerchiamo di chiarire il significato di questa proprietà: dato un segnale $x(t)$, sappiamo che:

$$\frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|} = \tan(\vartheta)$$

Ciò che possiamo dedurre da questa proprietà è il fatto che la quantità:

$$2\pi B \int_{-B}^B |X(\nu)| d\nu$$

Sia maggiore o uguale, per qualsiasi t_1 e t_2 , alla tangente appena introdotta. Ciò che capita dunque in soldoni è che più il segnale varia velocemente nel tempo, più la tangente di ϑ crescerà rapidamente, e più ripido sarà il segnale. Come abbiamo già accennato in precedenza, parlare di segnali ripidi significa parlare di segnali che hanno bisogno di sinusoidi molto “ripide” per presentarli, e dunque di alte frequenze. In questo modo, lo spettro sarà molto ampio. Ciò che capita è che dunque si può verificare la disuguaglianza appena incontrata, che ci permette di stabilire una maggiorazione sul numero di frequenze, e quindi sull’ampiezza della banda di un segnale.

Dimostrazione

Dati due punti arbitrari nel dominio del tempo, due istanti t_1 e t_2 , data $X(\nu)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$, possiamo dire che:

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \left| \int_{-B}^B X(\nu) (e^{j2\pi\nu t_2} - e^{j2\pi\nu t_1}) d\nu \right|$$

Utilizziamo l’estensione per quanto riguarda il calcolo integrale della disuguaglianza di Minkowski, ossia della disuguaglianza triangolare:

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq \int_{-B}^B |X(\nu)| \cdot |e^{j2\pi\nu t_2} - e^{j2\pi\nu t_1}| d\nu$$

Cerchiamo di lavorare sul modulo della differenza degli esponenziali complessi, e di estrapolarne una forma più utile ai fini della nostra dimostrazione:

$$|e^{j2\pi\nu t_2} - e^{j2\pi\nu t_1}| = |e^{j2\pi\nu t_1}| \cdot |e^{j2\pi\nu(t_2 - t_1)} - 1|$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri per $|e^{-j2\pi\nu(t_2 - t_1)}|$, e otteniamo così:

$$\implies |e^{-j2\pi\nu(t_2 - t_1)}| \cdot |e^{j2\pi\nu t_2} - e^{j2\pi\nu t_1}| = 2 |\sin [\pi\nu(t_2 - t_1)]|$$

Cosa intelligente che si può fare, è maggiorare il seno con il suo argomento, ottenendo:

$$2 |\sin [\pi\nu(t_2 - t_1)]| \leq 2\pi |\nu| \cdot |t_2 - t_1|$$

Abbiamo praticamente terminato: dividiamo per $|t_2 - t_1|$ l'espressione iniziale, e otteniamo:

$$\frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \leq 2\pi \int_{-B}^B |\nu| |X(\nu)| d\nu$$

Usiamo a questo punto la disuguaglianza di Schwartz: l'integrale del prodotto, si può pensare come il prodotto degli integrali, ma dunque:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-B}^B |\nu| |X(\nu)| d\nu &\leq \int_{-B}^B |\nu| d\nu \cdot \int_{-B}^B |X(\nu)| d\nu = \\ &= 2 \cdot \int_0^B \nu d\nu \cdot \int_{-B}^B |X(\nu)| d\nu = \\ &= 2\pi B \int_{-B}^B |X(\nu)| d\nu \end{aligned}$$

Abbiamo così, mediante quest'ultima maggiorazione, verificato l'enunciato del teorema.

Esempio Pratico

Studiamo un esempio pratico che potrebbe tornarci utile in seguito; consideriamo dunque il segnale $x(t)$ così definito:

$$x(t) = \delta(t)$$

Se ne calcola la trasformata di Fourier:

$$X(\nu) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = 1$$

Cosa significa ciò? Lo spettro di una delta di Dirac è una funzione costante: ciò significa che, per produrre una δ avrò bisogno, nel dominio delle frequenze, di tutte le frequenze, in pari ampiezza, in pari quantità.

Nota: ogni qual volta vi sia una discontinuità di tipo salto, o un punto a tangente verticale, siamo sicuri che il segnale avrà banda B infinita!

B.4.11 Proprietà di Dualità

La proprietà di dualità è tra le più utili per quanto riguarda il calcolo di trasformate di Fourier: essa rappresenta la spiegazione e la formalizzazione di tutte le simmetrie tra le varie proprietà finora affrontate, ed è il principio in grado di motivare e studiare le dualità tra le varie trasformate.

Sappiamo che:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Proviamo a capire meglio tutto ciò: dato un segnale $x(t)$ nel dominio del tempo, applicando l'operatore \mathcal{F} si trova la trasformata di Fourier, $X(\nu)$:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = X(\nu)$$

Abbiamo trovato $X(\nu)$, ossia la trasformata di Fourier di $x(t)$. Facciamo una cosa un po' particolare: supponiamo a questo punto che X non sia funzione di ν , ma di t , ossia pensiamo di avere $X(t)$, sostituendo semplicemente la variabile "frequenza"

alla variabile “tempo”. Data $X(t)$, dunque, supponiamo di fare nuovamente la trasformata di Fourier; otterremo:

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = x(-\nu)$$

Ci è capitata una cosa molto particolare: ri-trasformando la funzione abbiamo ritrovato la funzione di partenza, con l'argomento di segno opposto. Abbiamo così trovato una proprietà incredibile della formula di inversione della trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\nu)\} = \mathcal{F}\{X(-\nu)\} \iff \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{x(-t)\}$$

Cosa ci suggerisce questo principio di dualità? Se noi abbiamo calcolato una funzione come trasformata di Fourier, ritrasformandola avremo la funzione di partenza! A cosa può servire una cosa del genere? Vediamolo in un esempio pratico:

Esempio pratico

Dato il segnale finestra rettangolare:

$$x(t) = p_T(t)$$

Come già detto, sappiamo che la sua trasformata di Fourier sarà un seno cardinale:

$$X(\nu) = \mathcal{F}\{p_T(t)\} = \frac{\sin(\pi\nu t)}{\pi\nu}$$

Abbiamo trovato il nostro solito seno cardinale. Cambiamo le carte in tavola: supponiamo di avere, ora:

$$x(t) = \text{sinc}(t)$$

Siamo abituati a studiare questo tipo di segnale solo come trasformata di Fourier, non come segnale nel dominio del tempo! Utilizzando tuttavia la proprietà di dualità, potremo dire semplicemente che:

$$X(\nu) = \mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = p_T(-t) = p_T(t)$$

Quest'ultimo passaggio è stato possibile poiché la porta è una funzione pari. Ciò che ci permette di fare questa proprietà della trasformata di Fourier è “riciclare” le

vecchie trasformata di Fourier, considerandole come segnali variabili nel tempo, e di ottenere i duali! Questo tipo di trucco permette ad esempio di calcolare molto facilmente la trasformata di una costante:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \iff \mathcal{F}\{1\} = \delta(-t) = \delta(t)$$

Appendice C

Modulazione di frequenza

Introduzione all'appendice

La seguente appendice viene introdotta nel testo per alcune motivazioni, di carattere in parte didattico e in parte prettamente dimostrativo:

- L'autore vuole almeno parzialmente colmare, con la presente, una personale (e globale) lacuna introdotta dalle modifiche dei corsi di studi, ossia lo studio della modulazione di frequenza (FM). Gli attuali corsi di studi triennali di telecomunicazioni sono infatti principalmente incentrati sullo studio delle modulazioni di segnali digitali, quindi impossibilitati ad introdurre questo tipo di strumento, storicamente molto importante (e anche attualmente in uso);
- L'autore desidera, in questa appendice, introdurre un metodo formale e funzionale per realizzare, in maniera abbastanza semplice, esempi di segnali a spettro variabile nel tempo; al fine di non appesantire la trattazione principale, infatti, sono state tralasciati molti passaggi che, tuttavia, possono essere molto utili per la comprensione delle nozioni introdotte. Si ritiene necessario dunque esplicitarli, quantomeno in forma di appendice, al fine di fornire motivazioni più solide delle affermazioni precedentemente introdotte.

Modulazione di frequenza

Il concetto di modulazione nasce in ambito di telecomunicazioni, al fine di trasmettere segnali elettromagnetici contenenti informazioni di vario tipo; la modulazione

è un insieme di metodi atti a trasmettere nella fattispecie un segnale $m(t)$ detto “modulante” mediante l’uso di segnali supplementari detti “portanti”.

Modulare è fondamentale, in un sistema di trasmissione: un sistema è sostanzialmente costituito da tre blocchi:

- Trasmettitore: blocco che adatta il segnale al canale di trasmissione;
- Canale di trasmissione: blocco che “trasporta” il segnale precedentemente elaborato dal trasmettitore, verso il ricevitore;
- Ricevitore: blocco che demodula e utilizza il segnale trasportato.

perché serve così tanto la modulazione? Vediamone brevemente alcune motivazioni:

- Un canale di trasmissione può non essere utilizzato da un solo trasmettitore: l’etere ad esempio è uno dei canali più utilizzati per la trasmissione di informazione; se tutte le trasmissioni fossero sulla stessa frequenza, non sarebbe possibile decifrarle, poiché si sovrapporrebbero tra loro, rendendosi incomprensibili a vicenda;
- Un canale si può comportare come un filtro: può essere in grado di far passare solo un certo range di frequenze; se le frequenze del segnale che si intende trasmettere non fossero compatibili con quelle del canale di trasmissione, sarebbe necessario “traslare” lo spettro del segnale, in modo da renderlo trasmissibile sul canale.

Come funziona una modulazione? Come già detto, si parte da un segnale, detto “modulante” (nei casi interessati, analogico), $m(t)$: esso dovrà in qualche modo agire sul segnale precedentemente denominato “modulato”, in modo da attribuirgli un significato, un’informazione. Variazioni del comportamento nel tempo di $m(t)$ dovranno fornire particolari variazioni del comportamento di $s(t)$, in modo che il sistema di demodulazione sia in grado di interpretare correttamente le informazioni in esso contenute.

Esistono fondamentalmente tre tipi di modulazioni analogiche:

- Modulazione di ampiezza (AM)
- Modulazione di frequenza (FM)

- Modulazione di fase (PM)

Nel primo tipo di modulazione $m(t)$ viene utilizzato per “modulare” l’ampiezza del segnale: un segnale sinusoidale (portante) viene moltiplicato per un certo coefficiente, a sua volta moltiplicato per $m(t)$, in modo che le variazioni di $m(t)$ portino a variazioni dell’ampiezza della sinusoide.

La seconda e la terza modulazione vengono anche dette “modulazioni di angolo”, dal momento che $m(t)$ agisce rispettivamente sulla velocità di variazione dell’angolo del segnale (ossia sulla frequenza della portante) e sulla sua fase. Ciò equivale a dire che l’informazione utile viene trasferita attraverso l’angolo del segnale portante, $\alpha(t)$, indifferentemente scelto in fase o in quadratura. Trattandosi di modulazioni di angolo, si fa in modo che la portante abbia un’ampiezza A rigorosamente costante, e che dunque si possa esprimere il segnale modulato (ossia già trattato, mediante sistemi elettronici, in modo da poter essere trasmesso) $s(t)$ come:

$$s(t) = A \cos(\alpha(t)) = A \cos(2\pi\nu_p t + \varphi_0 + \varphi(t))$$

Dove ν_p è la frequenza della portante, φ_0 la sua fase iniziale.

Nelle modulazioni d’angolo, o la fase o la frequenza sono funzioni lineari del segnale modulante $m(t)$; nel caso della modulazione di frequenza, nella fattispecie, la frequenza varia linearmente con $m(t)$; si ottiene dunque una funzione della frequenza istantanea del segnale $\nu_i(t)$ esprimibile come:

$$\nu_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\alpha(t)}{dt} = \nu_p + 0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Si possono distinguere due termini: uno è la frequenza della portante ν_p , termine rigorosamente costante al variare del tempo e un secondo termine, ossia quello che provoca la variazione spettrale: la “deviazione di frequenza” $\Delta\nu(t)$ definita come:

$$\Delta\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Si consideri un altro fatto: si può stabilire un massimo intervallo di variazione della frequenza rispetto a quella di portante, al momento della decisione dei parametri di modulazione; si stabilisce quindi un parametro $\Delta\nu_{max}$, definibile come:

$$\Delta\nu_{max} = \max \{ \Delta\nu(t) \}$$

Dal momento che la modulazione che si intende effettuare è in frequenza, questo parametro appena introdotto andrà moltiplicato per il segnale modulante, ossia

il segnale $m(t)$, contenente le informazioni da trasmettere mediante il sistema di trasmissione; in questo modo, $m(t)$ modificherà la frequenza del segnale in un intorno di quella di portante, aggiungendo un termine $\Delta\nu(t)$ la cui massima variazione è pari a $\Delta\nu_{max}$, considerando $m(t)$ normalizzato a 1:

$$\Delta\nu(t) = m(t) \cdot \Delta\nu_{max} = m(t) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Si possono a questo punto unire le due definizioni raggiunte di $\Delta\nu(t)$, e quindi esprimere l'angolo della portante in forma integrale:

$$\varphi(t) = 2\pi\Delta\nu_{max} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

Il segnale modulato in frequenza avrà dunque un'espressione del tipo:

$$s(t) = A \cos \left[2\pi\nu_p t + \varphi_0 + 2\pi\Delta\nu_{max} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right]$$

Dopo questi calcoli apparentemente scorrelati dalla trattazione, si può comprendere il motivo per cui si è scelto di parlare di modulazione di frequenza: osservando l'espressione analitica del segnale modulato risultante, e la dimostrazione utilizzata per raggiungere la suddetta espressione, si può notare che i termini di frequenza sono due: la frequenza di portante ν_p e la deviazione di frequenza, il cui andamento dipende dal tempo; si tratta di un classico esempio di segnale frequenza dipendente dal tempo, dunque non stazionario.

Esempi di calcolo di spettri di segnali modulati in frequenza

Si introducono a questo punto i calcoli formali che portano ai risultati precedentemente presentati nella trattazione, ossia le costruzioni degli esempi di segnali non-stazionari. Come già detto, il segnale modulato si può scrivere nella forma:

$$s(t) = A \cos (2\pi\nu_p t + \varphi_0 + \varphi(t))$$

Al fine di ottenere un'espressione più "maneggevole", si sceglie di riscrivere il segnale mediante esponenziali complessi:

$$s(t) = \frac{A}{2} [e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j(2\pi\nu_p t + \varphi_0)} + e^{-j\varphi(t)} \cdot e^{-j(2\pi\nu_p t + \varphi_0)}]$$

A partire dall'espressione appena ricavata è possibile costruire in maniera più semplice gli esempi precedentemente proposti: gli esponenziali complessi sono espressioni relativamente semplici da trattare, di conseguenza è possibile, a partire da qua e dall'espressione integrale di $\varphi(t)$, scegliere un generico segnale modulante (deterministico) e ricavare il relativo segnale modulato in frequenza, completando la costruzione dell'esempio.

Chirp lineare

A partire dall'espressione operativa per il calcolo del segnale modulato in frequenza $s(t)$, è ora possibile calcolare diversi esempi di segnali non stazionari; il primo esempio, già riportato nella trattazione principale e che ora verrà completato sotto un punto di vista formale, è il chirp lineare; come già detto, un chirp lineare è un segnale in cui le frequenze variano linearmente col tempo; quando si parla di variazioni lineari, si può considerare una variazione su di una retta generica del tipo:

$$m(t) = A \cdot t + \omega_0$$

Dove A è la pendenza della retta, ω_0 l'“intercetta”, ossia il punto di incontro con l'asse delle ordinate.

Si completa il discorso dei chirp lineari introducendo i passaggi formali che potrebbero portare ad un segnale di questo tipo; si considera l'espressione integrale di $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 2\pi\Delta\nu_{max} \int [A \cdot \tau + \omega_0] d\tau \Big|_t = 2\pi\Delta\nu_{max} \left[\frac{t^2}{2} + \omega_0 t \right] = \beta \left[\frac{t^2}{2} + \omega_0 t \right]$$

Dove:

$$\beta = 2\pi\Delta\nu_{max}$$

A partire da ciò si può ottenere il segnale modulato in frequenza, $s(t)$, come:

$$s(t) = e^{j\varphi(t)} = e^{j\beta \left[\frac{t^2}{2} + \omega_0 t \right]}$$

Questa espressione è analoga a quella introdotta (senza dimostrazioni) nella trattazione; mediante questi semplici passaggi, quindi, è stato possibile dimostrare come ottenere un chirp di tipo lineare, a partire dalla modulazione di una rampa, ossia di una variazione lineare di ampiezza del segnale nel tempo, proprio come è stato qualitativamente spiegato, precedentemente, nella trattazione.

Chirp esponenziale

A partire da un altro tipo di segnale $m(t)$ si può osservare come si possano avere altri tipi di variazioni della frequenza al variare del tempo. Si supponga di avere il seguente segnale modulante:

$$m(t) = A^t$$

Dove A è una generica costante reale; ricordando la definizione integrale di $\varphi(t)$, si può ottenere:

$$\varphi(t) = \int A^\tau d\tau = \frac{A^t}{\ln(t)}$$

Si può a questo punto esprimere il chirp esponenziale (detto anche chirp geometrico) in termini di segnale modulato in frequenza esponenzialmente, ricavando l'espressione operativa di $s(t)$ come precedentemente fatto:

$$s(t) = e^{j\varphi(t)} = e^{\frac{A^t}{\ln(t)}}$$

Concettualmente, non si hanno molte differenze rispetto a prima: se dapprima infatti si variava in modo lineare la frequenza, ora essa si fa variare in modo esponenziale, a partire da una generica base A .

Segnale modulante sinusoidale

Un esempio “classico” di segnale non stazionario è il segnale modulato corrispondente ad un segnale modulante sinusoidale. Si ricava dunque formalmente, a partire dal seguente $m(t)$:

$$m(t) = A \cos(2\pi\nu_m t)$$

Il segnale modulato $s(t)$.

$$\varphi(t) = 2\pi\Delta\nu_{max} \int A \cos(2\pi\nu_m \tau) d\tau = A \frac{\Delta\nu_{max}}{\nu_m} \sin(2\pi\nu_m t) = \beta \sin(2\pi\nu_m t)$$

Dove:

$$\beta \triangleq A \frac{\Delta\nu_{max}}{\nu_m}$$

Ottenuta l'espressione operativa di $\varphi(t)$, è possibile sostituirla in quella precedentemente ricavata di $s(t)$, ottenendo:

$$e^{j\varphi(t)} = e^{j\beta \sin(2\pi\nu_m t)}$$

Questa funzione risulta essere periodica di periodo $T = \frac{1}{\nu_m}$; per questo motivo, è possibile calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier, come:

$$e^{j\beta \sin(2\pi\nu_m t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k\nu_m t}$$

Dove i coefficienti c_k si calcolano mediante l'integrale di proiezione (prodotto scalare su spazi di Hilbert) definito come:

$$\langle x(t)|y(t) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt$$

Proiettando dunque su di una base di armoniche, dove ciascuna armonica è definita come:

$$a(t) = e^{j2\pi\nu t}$$

Si ottiene:

$$\langle m(t)|e^{j2\pi k\nu_m t} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) \cdot e^{-j2\pi k\nu_m t} dt \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

Questo, limitando il dominio di ciascuna armonica ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine degli assi, di ampiezza temporale T ; integrando e normalizzando, si possono ottenere i coefficienti scalari rappresentanti il valore delle funzioni proiettate sulla base di Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{j\beta \sin(2\pi\nu_m t)} \cdot e^{-j2\pi k\nu_m t} dt$$

Unendo gli argomenti ed effettuando il raggruppamento $\vartheta = 2\pi\nu_m t$, si può riscrivere l'espressione; si calcola il differenziale:

$$dt = \frac{1}{2\pi\nu_m} d\vartheta$$

Inoltre, per $t = \frac{T}{2}$:

$$2\pi\nu_m \frac{T}{2} = \pi \frac{\nu_m}{\nu_m} = \pi$$

Da qui, sostituendo¹:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j[\beta \sin(\vartheta) - k\vartheta]} d\vartheta = J_k(\beta)$$

Dove $J_k(x)$, per una generica variabile x , è la funzione di Bessel di prima specie di ordine k .

¹Si possono trovare, in questo risultato, eventuali differenze rispetto all'espressione precedentemente presentata; si tratta di differenti sostituzioni utilizzate; si sappia che i risultati sono assolutamente analoghi

Bibliografia

- [1] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [2] M-G. Di Benedetto, *Comunicazioni Elettriche*, Prentice-Hall, San Bonico (PC), 2007.
- [3] B. P. Rynne, M.A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Springer, London, 2008.
- [4] M. Luise, G. M. Vitetta, A.A. D'Amico, *Teoria dei segnali analogici*, McGraw-Hill, Zibido San Giacomo (MI), 2005.
- [5] L. Lo Presti, F. Neri, *L'Analisi dei Segnali (Seconda Edizione)*, C.L.U.T., Torino (TO), 1992.