Insiemi numerici:

$\mathbb{N}$ = Numeri naturali, cioè interi e non negativi

$\mathbb{Z}$ = Numeri interi relativi, ossia interi e negativi

$\mathbb{Q}$ = Numeri razionali, rappresentati da una frazione di due numeri interi "m" ed "n", come ad esempio "$\frac{m}{n}$".

$\mathbb{R}$ = Numeri reali, ossia razionali + irrazionali (quali "e", "π", "$\sqrt{2}$")

$\mathbb{C}$ = Numeri complessi, ossia reali + immaginari.

Alcune notazioni:

Con lettere come X, Y definiremo di solito degli insiemi, con x, y degli elementi.

"$\in$" = appartiene "$\notin$" = non appartiene

"$\subseteq$" = contenuto "$\nsubseteq$" = non contenuto

":" o "|" = tale per cui

Esempio:

"$A = \{x \in X \mid p(x)\}$" [Significa "A è il sottoinsieme degli elementi x di X tali che p(x) è verificato]

"$\cap$" = intersezione (prendere gli elementi comuni tra 2 insiemi)

"$\cup$" = unione (unire 2 insiemi)

"$\forall$" = per ogni (Es: $\forall x \in \mathbb{R}$, cioè per ogni elemento x appartenente ai numeri reali)

"$\exists$" esiste (sintassi come il $\forall$)

"$\nexists$" = non esiste

È possibile dimostrare che numeri appartenenti agli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ abbiano "la stessa cardinalità", ossia che sia possibile relazionare in modo biunivoco (1 a 1) ogni valore di uno di quegli insiemi con un altro di essi.

"$\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}$".

Tuttavia, si può dimostrare che $\mathbb{R}$ ha una diversa cardinalità rispetto ai 3 insiemi sopra citati.

Vogliamo ora dimostrare che il numero "$\sqrt{2}$" non appartiene a $\mathbb{Q}$, e che dunque non è razionale

$$\begin{cases} Hp: x^2 = 2 \quad ; \ m, n \text{ primi tra loro}; \ m, n \in \mathbb{Q} \\ Th: \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Supponiamo che $x = \frac{m}{n}$, ossia che esista un numero razionale x tale per cui $x^2 = 2$

"$x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$" ; dunque "$m^2 = 2n^2$", e dunque m è un numero pari.

Se m^2 è pari, dunque anche m è pari, e possiamo generalizzare la scrittura dicendo che

"$m = 2K$" K è un valore arbitrario, appartenente ai numeri $\mathbb{N}$.

Eleviamo al quadrato quest'espressione, trovando

"$m^2 = 4K^2$"

Ma "$m^2 = 2n^2$", dunque "$\cancel{2}n^2 = \overset{2}{\cancel{4}}K^2$", "$n^2 = 2K^2$", dunque n è pari

Sia m che n sono pari, e, dal momento che abbiamo ipotizzato che m e n fossero primi tra loro, abbiamo raggiunto un assurdo, e dunque non esiste numero razionale a cui corrisponda il valore $\sqrt{2}$

Maggioranti e minoranti, estremi superiori e inferiori.

Abbiamo un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, che potrebbe ad esempio essere un intervallo $[x_1; x_2]$

Per maggioranti di A si intende l'insieme degli elementi "x" più grandi o uguali di tutti gli elementi di A

Maggiorante: "$x \leq b$" $\forall x \in A$ (b è il maggiorante)

L'insieme dei maggioranti ha un minimo, che è l'estremo superiore di A (in questo esempio, x_2)

$\sup(A) \overset{def}{\equiv}$ minimo dei maggioranti

Per minoranti "a" di A si intende l'insieme degli elementi "x" più piccoli o uguali di tutti gli elementi di A

Minorante: "$x \geq a$" $\forall x \in A$ (a è il minorante)

Al contrario dell'insieme dei maggioranti, in quello dei minoranti ci interessiamo del "massimo dei minoranti", che coincide con l'estremo inferiore di A

$\inf(A) \overset{def}{\equiv}$ massimo dei minoranti

Prodotto cartesiano

Siano X e Y due insiemi non vuoti, $x \in X$ e $y \in Y$; viene definita "coppia ordinata": "$(x;y)$" (avente prima "x" e poi "y")

Definiamo il prodotto cartesiano $X \cdot Y$ l'insieme delle coppie ordinate al variare di x in X e di y in Y.

"$X \cdot Y = \{(x;y) \mid x \in X, y \in Y\}$"

Il concetto di funzione

Siano X e Y due insiemi. Una funzione definita in X a valori in Y è una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in X$ al più un elemento $y \in Y$.

L'insieme dei valori $x \in X$ a cui la funzione f associa un elemento di Y forma il "dominio di f". L'insieme dei valori $y \in Y$ associati ai valori $x \in \text{dom} f$ si dice "immagine di f".

La funzione è definita come:

$$f: \text{dom} f \subseteq X \to Y$$
$$x \rightsquigarrow f(x)$$

(ossia è: f tale per cui nel dominio di f i valori X si trasformano in valori di Y con la trasformazione $x \rightsquigarrow f(x)$)

Il grafico di f è il sottoinsieme $\Gamma(f)$ del prodotto cartesiano $X \cdot Y$ costituito dalle coppie ordinate $(x; f(x))$ al variare di x nel dominio di f. Matematizzando:

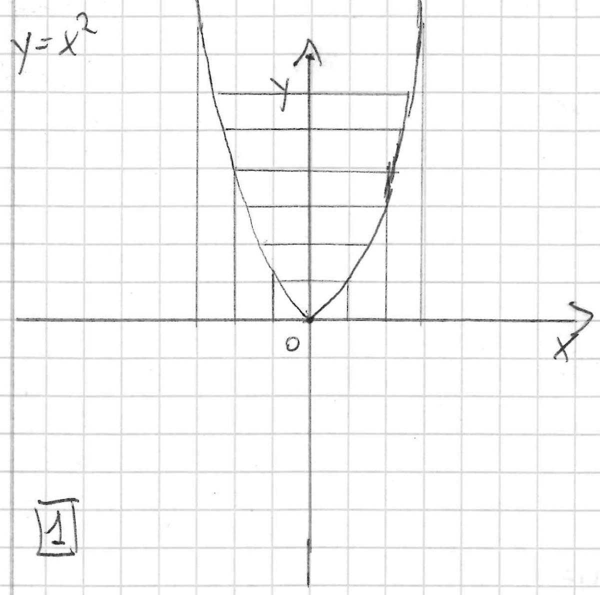
$$\Gamma(f) = \{(x; f(x)) \in X \cdot Y : x \in \text{dom} f\}$$

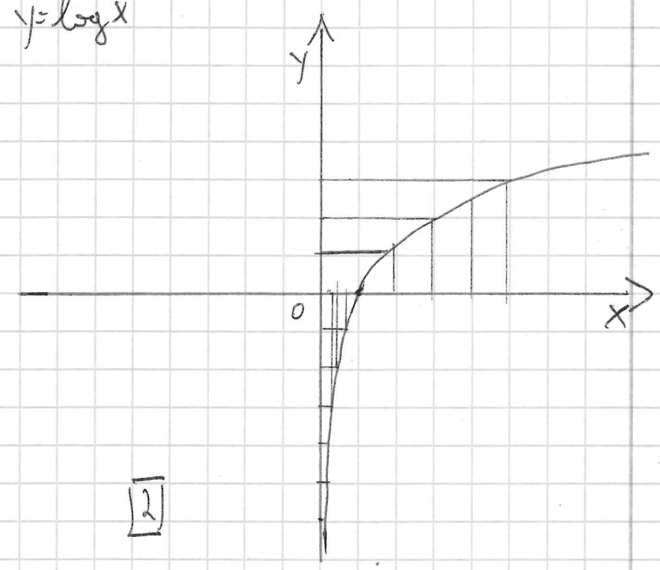
In analisi 1 tratteremo funzioni per lo più a 1 variabile che vanno da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Per fare alcuni esempi grafici, userò due fondamentali funzioni:

$y = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

$y = \log x \quad x \in \mathbb{R}$

Per meglio chiarificare i concetti di dominio e codominio di f, tracciamo un grafico approssimativo delle funzioni.





Definiamo ora, in seguito a un'osservazione grafica, il dominio della funzione come l'insieme delle proiezioni dei valori della funzione sull'asse delle x.

Definiamo immagine della funzione l'insieme delle proiezioni dei valori della funzione sull'asse delle y.

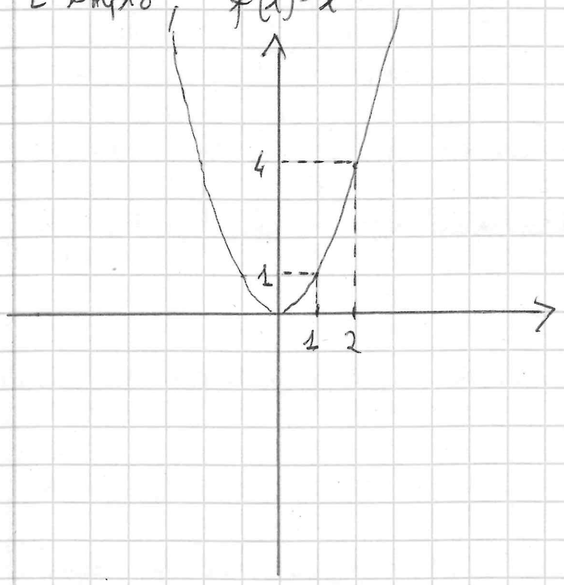
1) Come vediamo, la funzione $y = x^2$ può essere proiettata su ogni punto dell'asse X, per questo possiamo dire che $\text{dom} f = \mathbb{R}$.

Tuttavia, la funzione si trova solo nei primi 2 quadranti, dunque non ha ordinate negative. L'immagine di f è dunque "$y \geq 0$", o $[0;+\infty)$.

2) La funzione $y = \log x$ si comporta al contrario: essa esiste solo nel primo e nel quarto quadrante, dunque non ha ordinate limitate, in quanto le proiezioni sull'asse y sono sempre possibili, da $-\infty$ a $+\infty$, ma, sull'asse X, le proiezioni si estendono da 0 (non compreso) a $+\infty$.
Per questo, $\text{dom} f = (0;+\infty)$, ma $\text{imm} f = \mathbb{R}$

Immagine e controimmagine

Abbiamo una certa funzione, e vogliamo trovare l'immagine di un certo intervallo dell'asse X.
Essa sarà data dalla proiezione sull'asse y della funzione tra gli estremi dell'intervallo.
Esempio, $f(x)=x^2$



$f(x)=x^2$

$x=1$, $y=1$

$x=2$, $y=4$

$\text{im} f = [1;4]$

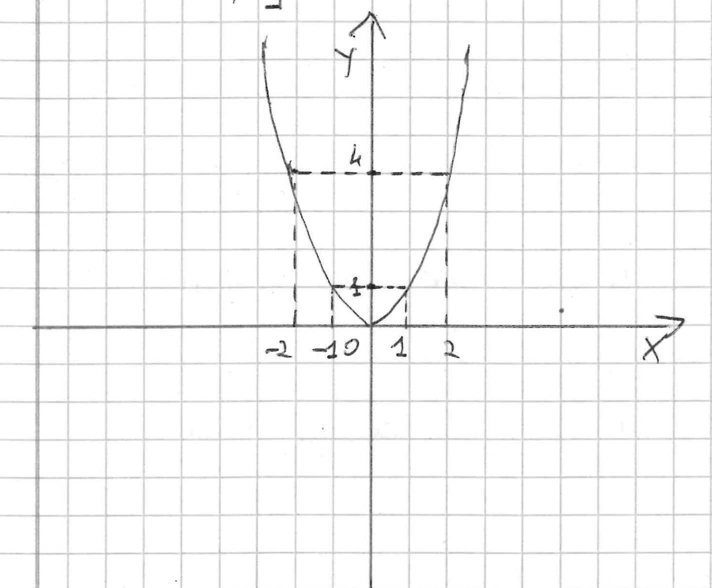
$I=[1;2]$

$\text{im} f$ tra $[1;2] = [1;4]$

Fingiamo ora di avere l'immagine di f da un certo punto a un altro. Per ricavare la controimmagine, ossia la proiezione della funzione compresa tra i due punti dell'intervallo, sull'asse X, è necessario trovare i valori di x in funzione di y, inserirli in questa "pseudofunzione", e ricavare così la controimmagine.

$y=x^2$

$\text{Im}\ I = [1;4]$



$y=x^2$, $x=\pm\sqrt{y}$

$y=1$, $x=\pm 1$

$y=4$, $x=\pm 2$

La controimmagine di $[1;4]$ è dunque $[-2;-1] \cup [1;2]$

Ho parlato di "pseudofunzione" e non di "funzione inversa" in quanto questa funzione, per $x \neq 0$, restituisce 2 valori per ogni valore dell'immagine inserito, andando dunque contro il concetto di funzione prima scritto.

Composta di due funzioni (o "funzione composta").

$g \circ f(x)$ ($f(x)$ composta g) $\quad$ f, g funzioni reali di variabile reale

$f \circ g(x)$ ($g(x)$ composta f)

Usando il libro "precorso di matematica" torna utile chiamare in modo più comodo alcuni elementi indispensabili per la composizione di due funzioni. Useremo $g \circ f(x)$ come caso, ossia f composto g.

Chiamiamo dunque:

A = dominio della f $\qquad$ B = immagine della f

C = dominio della g $\qquad$ D = immagine della g

La condizione necessaria e sufficiente affinché due funzioni siano componibili, è che l'insieme intersezione tra l'immagine dal la funzione di partenza e il dominio della seconda funzione sia non nullo.

Chiamiamo dunque S l'intersezione tra dom g e im f

$S = B \cap C$ (oppure $C \cap B$, non cambia nulla basta che si consideri come f la funzione di partenza, e g quella che si usa per comporre)

Trovato S, tramite due passaggi siamo in grado di trovare dominio e immagine di $g \circ f(x)$ senza effettivamente comporre la funzione:

1) Disegnati i grafici di $f(x)$ e $g(y)$, riportiamo S sull'asse y della funzione $f(x)$. La controimmagine di S sarà il dominio di $g \circ f(x)$

2) Riportiamo ora S sull'asse x della funzione $g(y)$. L'immagine di S sarà anche l'immagine di $g \circ f(x)$

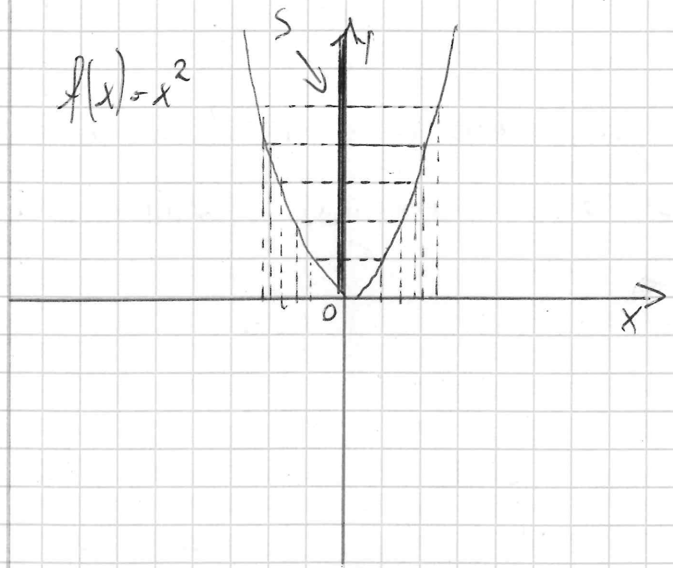
N.B.: S è un intervallo, può valere $\mathbb{R}$, può essere anche solo un punto.

Esempio:

$g \circ f(x) = ?$ $\qquad$ $f(x) = x^2$ $\quad$ $g(y) = y+1$

$A = \mathbb{R}$ $\quad$ $B = [0; +\infty)$ $\quad$ $C = \mathbb{R}$ $\quad$ $D = \mathbb{R}$ $\quad$ $S = B \cap C = [0; +\infty)$

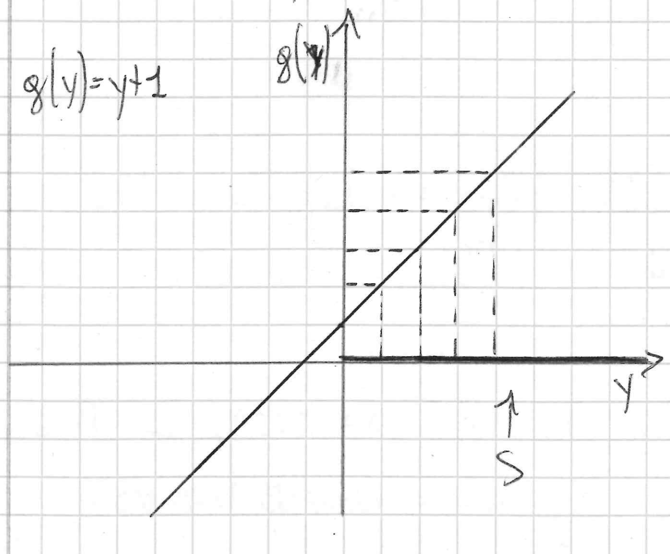
$f(x) = x^2$



La controimmagine di S su $f(x)$ è $\mathbb{R}$.

dom $g \circ f(x) = \mathbb{R}$

$g(y) = y+1$



L'immagine di S su $g(y)$ è $[1; +\infty)$

im $g \circ f(x) = [1; +\infty)$

Per poi comporre in effetti la funzione, è necessario, come già accennato, partire dalla funzione di partenza, e applicarne la composizione

Esempio:

$f(x) = x^2$

$g(y) = y+1$

$$g \circ f(x) = x \xrightarrow[\text{Applico } f(x)]{x^2} x^2 \xrightarrow[\text{Applico } g(y)]{y+1} \boxed{x^2+1}$$

Funzioni iniettive, suriettive, inverse di una funzione.

Definizioni:

Funzione iniettiva: è detta iniettiva una funzione nel suo dominio se, presi due elementi qualunque x_1 e x_2 con $x_1 \neq x_2$, $f(x_1)$ risulta diverso da $f(x_2)$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

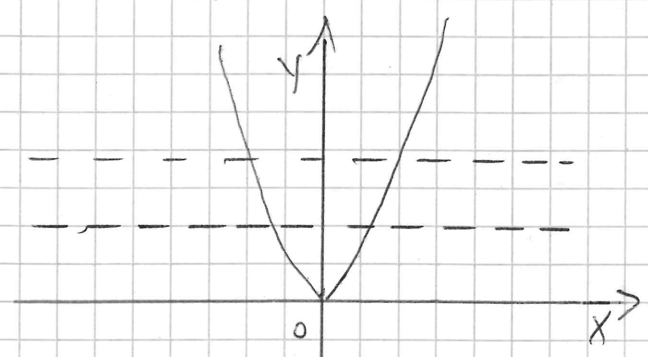
Funzione suriettiva: è detta suriettiva una funzione nella sua immagine se, per ogni valore di y, esiste almeno un $x \in \text{dom} f$ tale per cui $f(x) = y$

Interpretiamo geometricamente le due proposizioni appena dette: immaginiamo di avere una funzione $f(x)$, e una retta parallela all'asse delle X che la taglia in più punti.

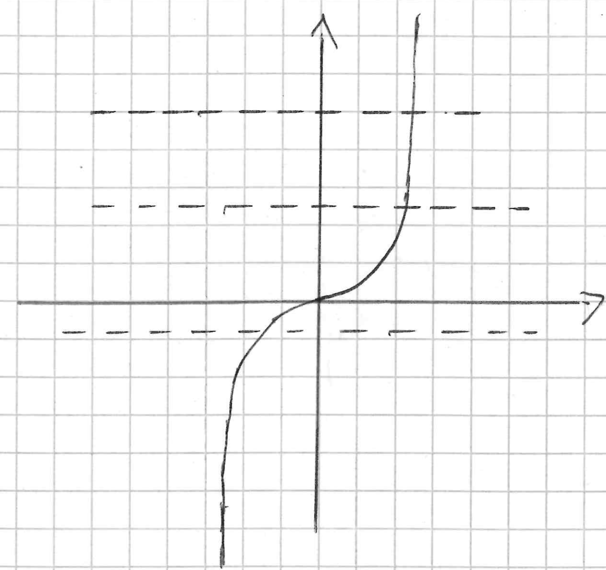
Se la retta incontra la funzione AL PIÙ UNA VOLTA, la funzione è iniettiva. Se la retta incontra la funzione ALMENO UNA VOLTA, la funzione è suriettiva.

Si dice inoltre, come già detto, iniettiva nel dominio, e suriettiva nell'immagine.

Una funzione può essere iniettiva e suriettiva contemporaneamente: la nostra retta parallela all'asse X taglierà una e una sola volta la funzione in ogni suo punto. Tali funzioni sono dette "biiettive" o "biunivoche".



$f(x)$ suriettiva in $\text{Im} f = [0, +\infty)$



$f(x)$ iniettiva in $\text{dom} f = \mathbb{R}$

Funzione crescente o decrescente:

viene detta crescente in un intervallo $[a;b]$ (o nel dominio) una funzione se:

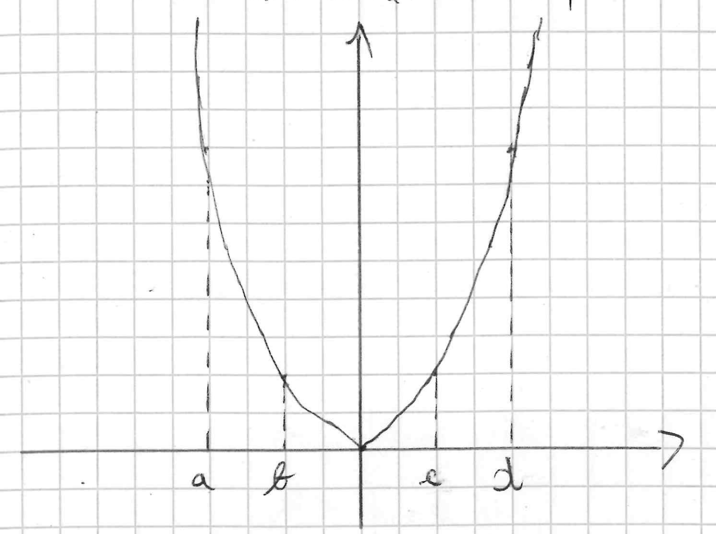
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

N.B.: strettamente crescente se è $<$ e non $\leq$.

viene detta decrescente in un intervallo una funzione se:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

N.B.: strettamente decrescente sempre con $>$ invece che $\geq$



$f(x)$ decrescente in $[a;b]$, crescente in $[c;d]$

In realtà l'intervallo è estensibile a $(-\infty;0]$ per la decrescenza, $[0;+\infty)$ per la crescenza.

Vengono dette "monotone" le funzioni o solo crescenti, o solo decrescenti, in un certo intervallo (o nel dominio anche)

Strettamente monotone, senza gli = nella disequazione.

Teorema: una funzione strettamente monotona è iniettiva

Dimostrazione:

Partiamo dalle definizioni di iniettività e crescenza:

iniettività: $\{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\}$

crescenza: $\{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\}$

Partiamo dall'iniettività: se $x_1 \neq x_2$, sarà $x_1 \lessgtr x_2$.

Consideriamo $x_1 < x_2$, per ipotesi implichiamo che $f(x_1) < f(x_2)$.

Dunque, detto ciò, $f(x_1)$ DEVE essere diverso da $f(x_2)$, e il teorema è dimostrato.

Funzioni periodiche

Una funzione si dice periodica di periodo p se il dominio è un insieme invariante per traslazioni di $\pm p$ $(p > 0 \in \mathbb{R})$ e se $f(x+p) = f(x)\ \forall x \in \text{dom} f$

Funzioni pari e funzioni dispari

Data una funzione f il cui dominio è simmetrico rispetto all'origine, ossia:

"$x \in \text{dom} f$, $-x \in \text{dom} f$"

- viene detta pari se $f(-x) = f(x)$, ossia è simmetrica rispetto all'asse delle y
- viene detta dispari se $f(-x) = -f(x)$ ossia è simmetrica rispetto all'origine.

Concetto di Intorno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto dalla retta reale, ed $r > 0$ un numero reale.
Si definisce "intorno di x_0 di raggio r" l'intervallo aperto e limitato

$$I_r(x_0) = (x_0 - r ; x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

Viene definito "intorno di $+\infty$ di estremo inferiore a" l'intervallo

$$I_a(+\infty) = (a ; +\infty)$$

Viene definito "intorno di $-\infty$ di estremo superiore a" l'intervallo

$$I_a(-\infty) = (-\infty ; a)$$

Limiti per x tendente a ∞

Si dice che f tende al limite finito $l \in \mathbb{R}$ per x tendente a $+\infty$ se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero $B \geq 0$ tale per cui
"$|f(x) - l| < \varepsilon$".
Dunque, scrivendo in modo matematico,

"$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} > 0$, $\exists B \geq 0 : |f(x) - l| < \varepsilon$"

Si può anche dire, che per ogni intorno $I_\varepsilon(l)$ di l, esiste un intorno $I_B(+\infty)$ tale per cui $f(x) \in I_\varepsilon(l)$
"$\forall x \in \mathrm{dom} f$, $x \in I_B(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$".

Si dice che f tende a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$, se, per ogni numero reale $M > 0$, esiste un numero $B \geq 0$ tale per cui
"$f(x) > M$".

"$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists B \geq 0 : f(x) > M$".

Limiti per x tendente a valore finito e continuità

Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, non necessariamente in x_0. Si dice che
"$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$: $\forall x \in \mathrm{dom} f$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$"

Oppure
$\forall x \in \mathrm{dom} f$, $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

Viene invece detta continua in un punto x_0 del dominio se,
"$\forall x \in \mathrm{dom} f$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$"
Unendo le due definizioni, una funzione è detta continua se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Successioni

Se una funzione è definita al massimo su $\mathbb{N}$, essa è detta successione.

Partiamo dalla successione fondamentale, ossia l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots n\}$$

Da qui è possibile trovare diverse sottosuccessioni, ossia delle sorte di funzioni definite solo in una parte di $\mathbb{N}$.

In caso di successioni, è impossibile parlare di limiti che tendono a un valore, perché, in $\mathbb{N}$, non esiste più il concetto di "vicino".
L'unico limite che si calcola è con n che tende a $+\infty$.

Viene dunque definita "convergente a un limite" la successione il cui limite per $n \to +\infty$ dà come risultato un valore l; divergente, la successione che "diverge" all'infinito.

Algebra dei limiti

Teorema: supponiamo che, per x tendente a x_0, la funzione f ammetta limite l, la funzione g limite m, dunque

"$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = l \pm m$"

"$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$"

"$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m}$ $\left[\text{con } g(x) \neq 0 \text{ in } I(x) \setminus \{x_0\}\right]$"

Dimostrazione: "$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$, l, m FINITI"

Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo l'intorno di l di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$.
Per ipotesi, esiste un intorno $I'(x_0)$ tale per cui,
$\forall x \in \operatorname{dom} f$, $x \in I'(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

Stessa cosa per un intorno $I''(x_0)$ tale per cui,
$\forall x \in \operatorname{dom} g$, $x \in I''(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

Poniamo $I(x_0) = I'(x_0) \cap I''(x_0)$. $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, le due disuguaglianze precedenti saranno valide.
Possiamo dunque iniziare con l'ipotesi:
$|f(x) + g(x) - (l + m)|$

Ricordiamo ora la definizione di disuguaglianza triangolare, per la quale
$|x + y| \leq |x| + |y|$.
Svolgiamo i conti, e troviamo che
$|[f(x) - l] + [g(x) - m]| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$|f(x) - l| + |g(x) - m| < \varepsilon$.

Dunque, il teorema è dimostrato

Dimostrazione: "$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$ $[= l \cdot m$, con $l = +\infty$ e m finito$]$"

Fissiamo un numero reale $M > 0$, consideriamo un intorno di $+\infty$ di estremo inferiore $B = \frac{2M}{m}$ con $m > 0$ (limite di $g(x)$)

Esiste per ipotesi un intorno $I'(x_0)$ tale per cui
$\forall x \in dom f$, $x \in I'(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > B$
Consideriamo poi l'intorno di m di raggio $\frac{m}{2}$. Esiste un intorno $I''(x_0)$ tale per cui
$\forall x \in dom\, g$, $x \in I''(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{m}{2}$
$|g(x) - m| < \frac{m}{2}$ equivale a dire $\frac{m}{2} < g(x) < \frac{3m}{2}$

Poniamo $I(x_0) = I'(x_0) \cap I''(x_0)$
Dunque, se $x \in dom f \cap dom g$ e a sua volta dunque a $I(x_0) \setminus \{x_0\}$, entrambe le precedenti condizioni saran soddisfatte.
Dunque,
$f(x)\, g(x) > f(x) \frac{m}{2} > B \frac{m}{2} = M$
E la tesi è dimostrata

Teorema di unicità del limite
Supponendo che f ammetta un limite per x tendente a un valore x_0, allora essa non ammette altri limiti per lo stesso valore.
Dimostrazione: supponiamo per assurdo che la funzione f per $x \to x_0$ ammetta due limiti, l_1 e l_2, con $l_1 < l_2$.
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$
La loro distanza sarà dunque il modulo della differenza dei due: "$|l_1 - l_2|$".
Se poniamo $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$, e usiamo una parte della definizione di limite, vediamo che
$|f(x) - l_1| < \varepsilon$
$|f(x) - l_2| < \varepsilon$
MA CIÒ NON È POSSIBILE, PER IL VALORE DI ε CHE ABBIAMO ARBITRARIAMENTE SCELTO.

Teorema di permanenza del segno
Supponiamo che f ammetta, per x tendente a un x_0, un limite (finito o infinito), senza direttamente interessarci della presenza di un punto appartenente a f.
Se l è positivo (o tendente a $+\infty$), possiamo dire che esiste un intorno di x_0 (senza contare x_0 stesso che non ci riguarda) in cui la funzione è strettamente positiva. Il ragionamento vale anche per il segno negativo (il teorema).
Dimostrazione: supponiamo per assurdo la tesi "$f(x) \cdot l < 0$", con $f(x) > 0$, ed $l < 0$.
$\lim_{x \to x_0} = l \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \; (x \neq x_0)$
Dunque,
$|f(x) - l| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \; ; \; l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
Essendo ε arbitrario, ed l negativo, anche $f(x)$ dovrebbe esserlo, ma ciò va contro la tesi. Siamo dunque a un assurdo.

In questa dimostrazione abbiamo però non solo supposto l'esistenza del limite, ma anche quella della funzione.

Dimostrazione 2: supponiamo che l sia finito e positivo. Consideriamo un intorno di l di raggio ε. Poniamo $\varepsilon = \frac{l}{2}$.

Per la definizione di limite, esiste un intorno di x_0 tale per cui

$\forall x \in \operatorname{dom} f, \quad x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

Avendo detto che $l > 0$, $\quad I_\varepsilon(l) = \left(\frac{l}{2} ; \frac{3l}{2}\right)$, e così la funzione è sempre strettamente positiva.

Se $l = +\infty$, basta fissare un qualunque intorno $I_A(+\infty)$ e applicare la definizione di limite

"$\forall A \in \mathbb{R}$ con $A > 0 \quad \exists\ B > 0 : f(x) > A, \quad A < f(x) < +\infty$",

e quindi positiva.

Corollario 1: se f ammette limite l per $x \to x_0$, se esiste un intorno $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ in cui $f(x) \geq 0$, allora $l \geq 0$ o $l = +\infty$

Dimostrazione: se ciò non fosse vero, il teorema della permanenza del segno implicherebbe l'esistenza sia di un $I(x_0)$ con $f(x) > 0$, sia di un $I'(x_0)$ con $f(x) < 0$, il che è assurdo.

Corollario 2: se una funzione f tende a un limite l, la funzione g a un limite m, se esiste un intorno $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ (con entrambe le funzioni tendenti a x_0), tale per cui $f(x) \leq g(x)$, allora $l \leq m$. (Primo teorema del confronto)

Dimostrazione: introduciamo una funzione ausiliaria $h(x)$, facendola tendere a x_0, sapendo che $h(x) \geq 0$ in $I(x_0)$.

$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = m - l \geq 0.$

Secondo teorema del confronto (Teorema dei due carabinieri) - l finito

Abbiamo per ipotesi tre funzioni, f e h. Per $x \to x_0$, f e h tendono allo stesso limite l.

Se esiste un intorno $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ per cui $\quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,

e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$, dunque anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.

Dimostrazione: usiamo la definizione di limite per le due funzioni, f e h.

$\forall x \in \operatorname{dom} f, \quad x \in I'(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$

$\forall x \in \operatorname{dom} h, \quad x \in I''(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow h(x) \in I_\varepsilon(l)$

Quindi

$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$|h(x) - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < h(x) - l < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

Torniamo all'ipotesi: $\quad f(x) < g(x) < h(x)$

$l - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < l + \varepsilon \Rightarrow \quad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$

Corollario 1: sia f una funzione limitata in un $I(x_0)$.

Esiste una costante C tale per cui

$|f(x)| \leq C \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Sia g una funzione tale per cui

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

Dunque, $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

Dimostrazione: ricordiamo che $\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \iff \lim_{x\to x_0} |g(x)|=0$

Possiamo dire che

$0 \le |f(x)\cdot g(x)| \le C\cdot |g(x)| \quad \forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$

Dunque, $\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = 0$ per il teorema del confronto.

Teorema di Sostituzione

Supponiamo che il limite di una funzione f tendente a x_0 esista. Sia g una funzione definita in un intorno di l $I(l)\setminus\{l\}$ tale per cui

1) Se $l \in \mathbb{R}$, g è continua in l
2) Se $l=+\infty$ oppure $l=-\infty$, esiste $\lim_{y\to l} g(y)$

Allora, esiste il limite per $x\to x_0$ della funzione $g\circ f(x)$ e si ha

$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y)$

Dimostrazione: poniamo $m = \lim_{y\to l} g(y)$ [$=$, nel caso 1, $m = g(l)$]

Fissato un intorno qualunque $I(m)$ di m, esisterà un $I(l)$ tale per cui

$\forall y \in \operatorname{dom} g \qquad y \in I(l) \Rightarrow g(y) \in I(m)$

Dopo ciò, torniamo alla f, e diciamo che

$\forall x \in \operatorname{dom} f \quad x \in I(x_0)\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$

Combiniamo le due cose, e otteniamo

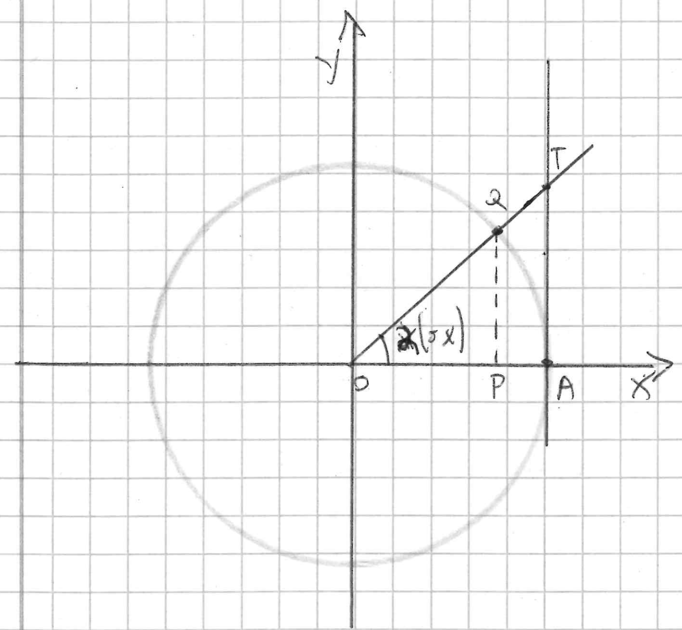
$\forall x \in \operatorname{dom} g\circ f, \ x \in I(x_0)\setminus\{x_0\} \Rightarrow g\circ f \in I(m)$

$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = m.$

Limiti notevoli

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Dimostrazione: disegniamo un grafico come quello sottostante:



$\overline{PQ} = \sin x$

$\widehat{AQ} = x$

$\overline{AT} = tg\, x$

$\sin x < x < tg\, x$

Osserviamo che

$\sin x < x < tg\, x$

Dividiamo per $\sin x$

$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{tg\, x}{\sin x}$

Invertiamo e semplifichiamo con la definizione $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > 1$

Facciamo tendere a 0 le tre funzioni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \geq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

Per il teorema del confronto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione: per l'algebra possiamo tranquillamente moltiplicare per "$\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$"

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+1} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \log_a(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{x\to 0} (1+x)$$

PASSAGGIO SUPERFLUO

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Effettuiamo uno scambio di variabili: $x = \frac{1}{t}$; $t = \frac{1}{x}$;
se prima $x \to 0$, ora $t \to \infty$. Scegliamo $t \to +\infty$

$$\lim_{t\to +\infty} \log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log_a e$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$$

Dimostrazione: poniamo $a^x - 1 = t$, e $x = \log_a(t+1) \Longrightarrow$
t tenderà sempre a 0

$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^K - 1}{x} = K$$

Dimostrazione: applichiamo al primo termine la funzione logaritmo e quella esponenziale, ottenendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{K\log(1+x)} - 1}{x}$$; moltiplichiamo ora per $\frac{K\log(1+x)}{K\log(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{K\log(1+x)} - 1}{x} \cdot \frac{K\log(1+x)}{K\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} K \cdot \frac{e^{K\log(1+x)} - 1}{K\log(1+x)} \cdot \frac{\log(1+x)}{x}$$

Il secondo è riconducibile a $\frac{\log_a(1+x)}{x}$, il primo ad $\frac{a^x - 1}{x}$, e le basi volgono entrambe "0", dunque il risultato sarà "$K \cdot 1 \cdot 1$".

Confronto locale di funzioni f e g in caso: " $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ "

Definizioni

- Si dice, con l finito, che f è "controllata" da g per $x \to x_0$

$f = O(g) \quad x \to x_0$

f è "o grande" di g per $x \to x_0$ (caso più generale, ora i sottocasi)

- Se l è finito e $\neq 0$, si dice che f è dello stesso ordine di grandezza ~~di g~~, o f è equigrande di g per $x \to x_0$

$f \asymp g \quad x \to x_0$

- Se l è uguale a 1, f è equivalente a g, e si usa

$f \sim g \quad x \to x_0$

- Se l è infine nullo, si dice che f è trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$

$f = o(g) \quad x \to x_0$

"f è o piccolo rispetto a g"

- Se l è infinito, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$

Questi simboli vengono detti "simboli di Landau".

Proprietà dei simboli di Landau

1) Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l g(x)} = 1$, $\quad f \sim lg$

2) $f \sim g \iff f = g + o(g)$

3) $o(Kf) = o(f) \quad$ e $\quad K o(f) = o(f) \quad$ con K = una costante

4) $f = o(1)$ equivale a dire che f tende a 0 per $x \to x_0$

5) $f(x) = f(x_0) + o(1)$, $\quad x \to x_0 \quad$ (definizione di continuità)

Discutiamo queste proprietà:

1) Prendiamo il caso di $f \asymp g$, ossia

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad ; \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l \cdot g(x)} \; ; \quad f(x) \sim l\, g(x)$

Con l'algebra possiamo riportarlo alla forma che ci permette di parlare di funzioni equivalenti.

2) Definiamo $h(x) = f(x) - g(x)$, $\quad f(x) = g(x) + h(x)$

Dire che $f \sim g$ equivale ~~a~~ dire:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right] = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right] = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0 \iff$$ E dunque, da ciò, $h = o(g)$.

3) $o(Kf) = o(f)$:

Diciamo che $g = o(Kf)$. È come dire

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{Kf(x)} = 0$$

4) Dire che $f = o(1)$ è come dire

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 .$$

f "è limitata nell'intorno di x_0".

5) Esprime la continuità perché, ricordando la definizione di continuità,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

"
$$f(x) - f(x_0) = o(1) , \quad x \to x_0 \text{"}.$$

Algebra degli "o"

1) $x^n = o(x^m) \quad x\to 0 \iff n > m$ (è trascurabile quella con esponente maggiore)

Infatti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} \quad \text{con } n-m > 0$$

2) $x^n = o(x^m) \quad x \to \pm\infty \quad n < m$ (è trascurabile quella con esponente minore)

a) $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$

b) $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)$ con $p = \min(n,m)$

c) $o(Kx^n) = o(x^n) \quad \forall K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

d) $\varphi(x)\, o(x^n) = o(x^n)$ con φ limitata in intorno di x_0

e) $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

f) $o(x^m)\, o(x^n) = o(x^{m+n})$

g) $[o(x^n)]^K = o(x^{nK})$

Limiti notevoli in notazione con simboli di Landau

- $\sin x \sim x \quad x\to 0$
- $1-\cos x \cancel{\sim} x^2 \quad x \to 0 \qquad \left(1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2\right)$
- $\log(1+x) \sim x \quad x\to 0$
- $e^x - 1 \sim x \quad x \to 0$
- $(1+x)^K - 1 \sim Kx \quad x\to 0$

Oppure: (N.B. Proprietà 2)

- $\sin x = x + o(x) \quad x\to 0$
- $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \to 0 \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x\to 0$
- $\log(1+x) = x + o(x) \quad x\to 0 \qquad \log x = x - 1 + o(x-1) \quad x \to 1$
- $e^x = 1 + x + o(x) \quad x\to 0$
- $(1+x)^K = 1 + Kx + o(x) \quad x \to 0$

Studio di limiti particolari:

- $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \bar{f}(x)\cdot\bar{g}(x)$

con $f \sim \bar{f}$, $g \sim \bar{g}$

- $\lim_{x\to x_0} [f(x) + f_1(x)][g(x) + g_1(x)]$ con $f_1 = o(f)$, $g_1 = o(g)$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)]$

Ordine e parte principale di una funzione;

Prima di poter parlare di ordine e parte principale, è necessario introdurre alcuni concetti chiave sui limiti, e alcune definizioni

Infinito: viene definita "infinito" o "funzione infinita in c" una funzione quando

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

Infinitesimo: viene definita "infinitesimo" o "funzione infinitesima in c" una funzione quando

$\lim_{x\to c} f(x) = 0$

Dati due infiniti f e g,

Se $f \asymp g$ per $x\to c$, f e g sono infiniti dello stesso ordine

Se $f = o(g)$ per $x\to c$, f è infinito di ordine inferiore rispetto a g

Se $g = o(f)$ per $x\to c$, f è infinito di ordine superiore rispetto a g

Dati due infinitesimi f e g,

Se $f \asymp g$ per $x\to c$, f e g sono infinitesimi dello stesso ordine

Se $f = o(g)$ per $x\to c$, f è infinitesimo di ordine superiore rispetto a g

Se $g = o(f)$ per $x\to c$, f è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g

Abbiamo ora una funzione f, infinita o infinitesima, se troviamo una funzione equivalente $\varphi(x)$ tale per cui

"$f(x) \sim l\,\varphi(x)^{\alpha}$" per $x\to c$ $\left(\text{da } \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l\right)$;

"$l\,\varphi(x)^{\alpha}$" è detta "parte principale", e α è "l'ordine di infinito o infinitesimo" (a seconda del caso).

Asintoti

Finora abbiamo parlato del concetto di equivalenza, ossia del poter trascurare un "errore" poco importante rispetto al resto della funzione.

Quando parliamo di comportamento asintotico di due grafici, parliamo di due grafici che tendono, per un intorno di ∞, ad avvicinarsi, in definizione

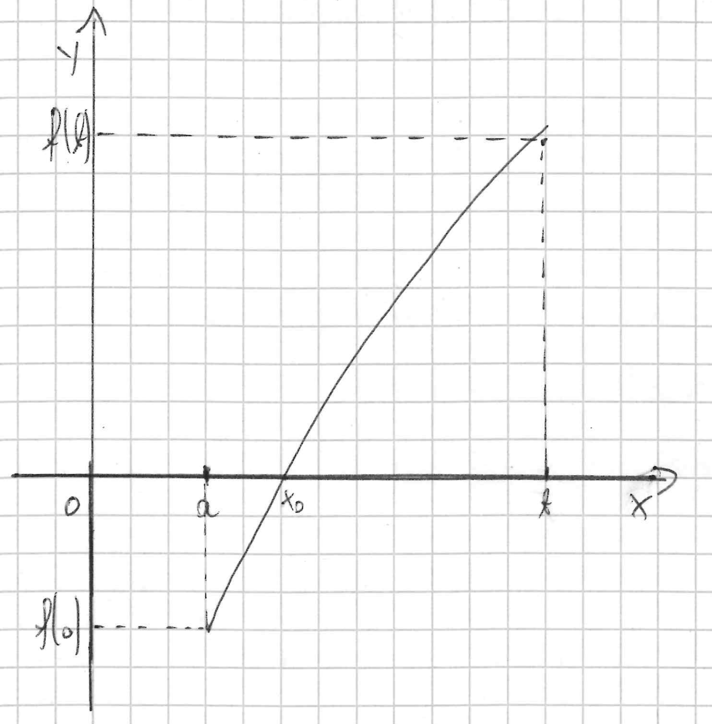
"$f(x) - g(x) = o(1)$"

"$g(x)$" è l'asintoto, ossia la funzione cui $f(x)$ tende ad avvicinarsi.

Comunemente, come asintoti usiamo delle rette, ma non è detto che sia l'unica possibilità: ogni funzione, dal logaritmo all'esponenziale, può essere un asintoto.

Teorema di esistenza degli zeri

Definito "zero" di una funzione il punto in cui essa si annulla, il teorema afferma che, in un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, esiste un punto x_0 in cui $f(x_0)=0$.
Se f è monotona, inoltre, lo zero è unico.



Teorema dei valori intermedi

Abbiamo una funzione f definita in un intervallo chiuso $[a;b]$.
La funzione assumerà almeno una volta tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$
Esso si può considerare come una conseguenza del teorema di esistenza degli zeri, anche se è più generale:
Se $f(a) = f(b)$, allora è ovvio il risultato: il punto sarà unico.
Se $f(a) \neq f(b)$, possiamo dire che esiste almeno un punto in cui l'immagine è λ, con λ compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.

Scrivendo il tutto in modo più rigoroso:
Ipotesi: $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a;b]$
$\exists\, x_0 \in [a;b] : f(x_0)=\lambda$, $f(a) < \lambda < f(b)$, $f(a) \neq f(b)$.

Definiamo $g(x)$ come una funzione $f(x)$ (quella che studiamo), traslata di $-\lambda$.
$g(x) = f(x) - \lambda$.
f per ipotesi è continua in $[a;b]$, anche λ, anche g lo deve essere.
$f(a) < \lambda < f(b)$, dunque

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - \lambda \\ g(b) = f(b) - \lambda \end{cases}$$

Le ipotesi sono verificate, ed esisterà almeno uno zero di g, e questo coinciderà con l'ordinata $f(x)=\lambda$.

Corollario: se f è una funzione continua in un intervallo $[a;b]$, allora l'immagine $f([a;b])$ è ancora un intervallo di estremi $\inf_I(f)$ e $\sup_I(f)$
Dimostrazione: siano $y_1 \neq y_2$ due punti di $f(I)$ con I l'intervallo che studiamo, in cui f è continua. Esistono in I due punti x_1 e x_2 distinti, tali per cui $f(x_1)=y_1$ e $f(x_2)=y_2$. Applicando alla funzione f il teorema dei valori intermedi, con f ristretta nell'intervallo J, $[y_1;y_2] \subseteq f(J) \subseteq f(I)$.

Teorema di Weierstraß

Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$. Allora f è limitata su $[a;b]$ e assume all'interno dell'intervallo un valore minimo e un valore massimo.

Teoremi sull'immagine delle funzioni:

1) Sia f una funzione continua su un intervallo I. Allora f è iniettiva su I se e solo se f è strettamente monotona su I

2) Sia f una funzione continua e invertibile su un intervallo I. Allora l'inversa f^{-1} è continua sull'intervallo $J = f(I)$

Derivazione

Chiamiamo Δf l'incremento di una funzione, e Δx l'incremento di una sua ascissa (Δf sarebbe dell'ordinata), quindi

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$

$\Delta x = x - x_0$

Definiamo il rapporto incrementale di una funzione il rapporto tra ordinate e ascisse incrementate, o, meglio, come il rapporto degli incrementi $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dal punto di vista geometrico, questo è l'incremento delle ordinate di una ordinata dato un incremento dell'ascissa, rapportati, e, dunque, il valor medio. Quello che infatti facciamo è prendere due punti, uno iniziale e uno finale, estratti, e dividere per la differenza delle ascisse. Introducendo il limite, e unendolo alla definizione appena data, possiamo introdurre la definizione di derivata f' di una funzione f

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ora, la $f(x)$ e la $f(x_0)$ tenderanno a combaciare, dunque, quella che avremo, non sarà più una media, ma un valore istantaneo.

Non è sempre possibile derivare funzioni: condizione necessaria è la continuità, ma non sufficiente.

$\mathrm{dom}(f') = \{ x \in \mathrm{dom}(f) : f \text{ è derivabile in } x \}$

Se però una funzione è derivabile in un punto x_0, allora essa deve esistere in quel punto ed essere continua

Dimostrazione: Abbiamo, come definizione di continuità,

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

Se la funzione è derivabile, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Non tutte le funzioni continue sono però derivabili.

Algebra delle derivate:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$ [conseguenza del prodotto]

Derivata di una funzione composta

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$$

Derivata della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}$$

Punti di non derivabilitá

Sappiamo che la continuitá é condizione necessaria per la derivabilitá (dire che se una funzione é derivabile, allora é continua, é infatti corretto), ma non sufficiente: esistono infatti 3 tipi di casi in cui la funzione é continua, ossia il limite sinistro in ogni suo punto del dominio é uguale a quello destro, ma non derivabile.

Condizione necessaria e sufficiente per la derivabilitá é:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to c^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$; il limite deve esistere ed essere finito.

Ci sono, come giá accennato, 3 casi in cui non esiste la derivata in un punto:

1) $\exists$ due limiti esistono, sono finiti, ma diversi (punti angolosi)
2) $\exists$ due limiti esistono, tendono ad infiniti, di segno concorde (punti a tangente verticale)
3) $\exists$ due limiti esistono, tendono ad infiniti di segno opposto (punti di cuspide)

Per verificare la derivabilitá in un punto, il sistema consigliato é l'uso del rapporto incrementale.

Esiste tuttavia un teorema, detto "Teorema Zappalà", che afferma che, con f funzione continua in x_0 e derivabile in ogni punto tranne x_0, in un suo intorno, che

"$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$".

Questo teorema può tornare utile, ma non é preciso e sicuro come l'uso del rapporto incrementale, dunque va usato con cautela.

Punti di estremo e punti critici di una funzione

Diamo alcune definizioni che potremo poi tornare utili, tramite alcuni teoremi che studieremo:

- Viene definito x_0 "punto di massimo relativo" se esiste un intorno di x_0 tale per cui:

$$\forall x \in I_r(x_0) \cap \mathrm{dom}(f), \quad f(x) \leq f(x_0)$$

- Viene definito x_0 "punto di massimo assoluto" se:

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f), \quad f(x) \leq f(x_0)$$

- Le definizioni di minimo relativo e assoluto sono identiche, con però il "$\geq$" anziché il "$\leq$".
- Si parla di massimi o minimi stretti con solo "$<$" o "$>$".
- Si dice "punto critico" di una funzione un punto di una funzione f derivabile in cui la derivata si annulla.

$f'(x_0)=0$

Teorema di Fermat

Data f definita in un intervallo di x_0 $I(x_0)$, con f derivabile in x_0. Se x_0 è anche un punto di estremo, allora

$f'(x_0)=0$;

x_0 è dunque un punto critico per f

Dimostrazione: se abbiamo detto che è derivabile, dunque deve esistere il limite del rapporto incrementale (supponiamo di avere un max)

Prendiamo prima $x > x_0$, e quindi $\Delta x = x - x_0 > 0$.

Supponendo di avere un massimo, $f(x)-f(x_0)$ sarà ≤ 0

Dunque

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Prendiamo ora $x < x_0$, dunque $x - x_0 < 0$. $f(x)-f(x_0)$ sarà sempre ≤ 0, dunque

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Il limite (e quindi la derivata) devono essere contemporaneamente ≤ 0 e ≥ 0, dunque $=0$.

$f'(x_0)=0$.

Stesso ragionamento si fa con i minimi relativi.

Il teorema di Fermat afferma che i punti di massimo e minimo interni al dominio sono critici, ma il viceversa non è valido (vedi punti di flesso a tangente orizzontale).

Teorema di Rolle

Sia f funzione continua su $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$. Se $f(a)=f(b)$, allora esiste un punto x_0 appartenente ad $[a;b]$ tale per cui:

$f'(x_0)=0$

Dimostrazione: per il teorema di Weierstraß, l'immagine $f[a;b]$ è un intervallo chiuso e limitato $[m;M]$. Ora abbiamo due casi:

1) $m=M$; la funzione è costante
2) $m < f(a)=f(b) < M$.

Nel caso 2, il punto di massimo non può coincidere né con a né con b. $x_M \in (a;b)$. Per il teorema di Fermat, abbiamo ottenuto un punto di estremo in un intervallo, le ipotesi di Fermat sono confermate, ergo esiste un punto in cui la derivata prima si annulla.

Teorema di Lagrange (o del Valor Medio)

Sia f una funzione continua su un intervallo $[a;b]$, derivabile in $(a;b)$. Esiste allora un punto x_0 tale per cui

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

Ognuno di questi punti vien detto "punto di Lagrange".

Dimostrazione: consideriamo su $[a;b]$ la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Applichiamo il teorema di Rolle, dopo averne verificato le ipotesi. Continuità e derivabilità ci sono, verifichiamo $f(a)=f(b)$, o, meglio, visto che Rolle va applicato su $g(x)$, $g(a)=g(b)$

$$g(a) = f(a) - 0 = f(a)$$
$$g(b) = \cancel{f(b)} - \frac{\cancel{f(b)}-f(a)}{\cancel{b-a}}\cdot\cancel{(b-a)} = f(a)$$

Le ipotesi del Teorema di Rolle sono verificate. Dunque,

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \;;$$
$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

x_0 è detto valor medio della funzione.

Il teorema di Lagrange è una generalizzazione del teorema di Rolle, e lo implica, onde x, per dimostrarlo, siamo invece partiti da Rolle.

Formule dell'incremento finito

Esistono due formule che rappresentano l'incremento di una funzione tra due punti del suo dominio.

Supponiamo che la funzione f sia derivabile in un punto x_0.

Abbiamo per definizione

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \;;\; \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = 0 \;;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0),\; x\to x_0$$

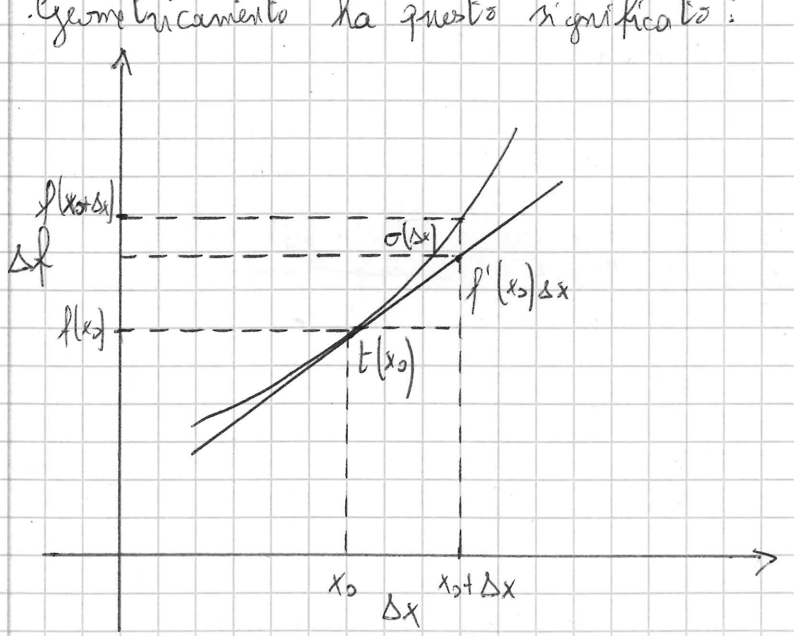
Da qui,

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \;,\; x\to x_0$$

Ponendo $x-x_0 = \Delta x$, e $\Delta f = f(x)-f(x_0)$,

$\Delta f = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$. (Prima formula dell'incremento finito)

Geometricamente ha questo significato:



Consideriamo ora invece una f continua in un intervallo chiuso $I \in \mathbb{R}$ e derivabile nei suoi punti interni. Fissiamo due punti $x_1 < x_2, \in I$, e f risulta continua in $[x_1; x_2]$ e derivabile in almeno $(x_1; x_2)$. Possiamo dunque applicare il teorema di Lagrange.

Dunque,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\bar{x})$$

ossia, $\exists \bar{x}: \quad f(x_2)-f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2-x_1)$;

$\Delta f = f'(\bar{x}) \cdot \Delta x$ (seconda formula dell'incremento finito)

In teoria, essa dipende dai punti x_1 e x_2, e però essa ci permette di avere informazioni precise sul comportamento della derivata in un intervallo.

Si può studiare la funzione in un intorno di un punto, in modo più preciso che con la prima formula.

Osservazione: una funzione definita e derivabile su un intervallo $I \in \mathbb{R}$ è costante su I se e solo se la sua derivata è nulla in ogni punto dell'intervallo

Dimostrazione: se f è costante, $\forall x \in I$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ con $x \neq x_0$ sarà sempre uguale a 0.

Viceversa, se $f'(x) \; \forall x \in I = 0$, possiamo dire che $f(x_1) = f(x_2) \; \forall x_1, x_2 \in I$, applichiamo dunque la seconda formula dell'incremento finito, e per un certo $\bar{x}$ compreso tra x_1 e x_2 abbiamo

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2-x_1) = 0$, ergo $f(x_1) = f(x_2)$.

Intervalli di monotonia

Sia I un intervallo appartenente a $\mathbb{R}$ ed f derivabile ~~su~~ I.

Dunque,

a - Se f è crescente su I, allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

b_1 - Se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$, allora f è crescente su I

b_2 - Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$, allora f è strettamente crescente su I

Vale anche il viceversa, considerando $<$, $\leq$ e decrescenza.

Dimostrazione:

a) f è crescente su I. Consideriamo $x_0 \in I$.

$f(x) - f(x_0) \leq 0$ e $x - x_0 < 0 \quad \forall x \in I, \; x < x_0$.

Dunque, se sia la differenza delle funzioni che quella delle ascisse è negativa, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

Applicando il teorema della permanenza del segno, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$, $f'(x) \geq 0$. Ovviamente, vale anche per $x > x_0$, $f(x) - f(x_0) \geq 0$.

b) Sia $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$. Fissiamo due punti x_1, x_2: $x_1 < x_2$

Applichiamo la seconda formula dell'incremento finito,

$$\Delta f = f'(\bar{x}) \cdot \Delta x \implies \underbrace{f(x_2)-f(x_1)}_{\geq 0} = \underbrace{f'(\bar{x})}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{\geq 0};$$

b_2 richiede la stessa dimostrazione, implicando che $f'(\bar{x}) > 0$ e non ≥ 0.

Dunque,

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ è crescente su I

Invece, se $f'(x) > 0, \; \forall x \in I \implies f$ è strettamente crescente su I

Corollario: sia f derivabile su un intervallo I. Sia x_0 un punto critico di f interno a I. Se $f'(x) \geq 0$ a sinistra e ≤ 0 a destra allora è un punto di massimo (x_0), viceversa, punto di minimo.

Sviluppi di Taylor

Gli sviluppi di Taylor sono la rappresentazione di una funzione come somma di un polinomio e di un infinitesimo di ordine superiore al grado del polinomio.

In un intorno di x_0, dunque, approssimiamo la funzione ad un polinomio.

Se vogliamo rappresentare la funzione costante, ossia di grado 0, diremo

$$Tf_{0,x_0}(x) = f(x_0) \quad ;$$

$$f(x) = Tf_{0,x_0}(x) + o(1) \quad , x \to x_0$$

Ossia, la funzione f è approssimabile in un intorno di x_0, mediante un polinomio di grado 0, in modo che il resto sia infinitesimo in x_0.

Prendiamo la prima formula dell'incremento finito.

$$Tf_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad ;$$

$$f(x) = Tf_{1,x_0}(x) + o(x-x_0) \quad , x \to x_0 \, .$$

La prima formula dell'incremento finito corrisponde a un'approssimazione al grado 1.

Tentiamo ora ad approssimare al grado 2. Fare una cosa simile implica che esiste un numero $a \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0$$

Applichiamo Hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - a \right] =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x) - a = 0$$

$$a = \frac{1}{2} f''(x)$$

$$f(x) = T_{2,x_0}(x) + o\left[(x-x_0)^2\right] \quad , x \to x_0$$

Generalizziamo ora la Formula di Taylor: con $f \in C^{(n)}$, $n \geq 0$,

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o\left[(x-x_0)^n\right] \quad , x \to x_0$$

In cui

$$Tf_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Il termine $Tf_{n,x_0}(x)$ è detto Polinomio di Taylor di f in x_0 di grado o ordine n, mentre $o\left[(x-x_0)^n\right]$ è detto resto di ordine n in forma di Peano.

Esiste un'altra interpretazione di questa formula, aggiungendo alcune ipotesi:

Sia $f \in C^n$, $n \geq 0$, ed $f^{(n)}(x)$ continua. Aggiungiamo che essa sia derivabile n+1 volte in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$. Vale la formula di Taylor

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{n+1}.$$

Ora il resto è nella cosiddetta "forma di Lagrange".

Altro dettaglio interessante è che il polinomio di Taylor, in $x_0 = 0$, viene detto "polinomio di Maclaurin", e vale la seguente proprietà: il polinomio di Maclaurin di una funzione pari contiene solo potenze pari, e dispari potenze dispari, della variabile indipendente.

Dimostrazione: sappiamo che se f è pari, f' è dispari, e così via. In ~~genere~~ partendo da una funzione pari, le derivate di ordine pari $f^{(2k)}$ sono pari, quelle di ordine dispari $f^{(2k+1)}$ sono dispari. Dato che $x=0$, se f è definita nell'origine, vi si annullerà per forza la derivata dispari.

Sviluppi di Taylor notevoli

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ [Peano]

$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1}$ $\quad 0 < \bar{x} < x$ [Resto forma Lagrange]

($f'(x) = f(x)$, in $y = e^x$)

- $f(x) = \log x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot x$

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} + o((x-1)^n)$$

Poniamo $x-1 \longrightarrow x$

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \cdot (-1)^{n-1} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \cdot (-1)^{k-1} + o(x^n)$$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2}) =$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+2})$$

$f(x) = (1+x)^\alpha$ $\quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ $\quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

Può risultare utile scomporre una funzione formata da più funzioni assieme e applicarvi Taylor.

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in (a;b)$. Se esiste un polinomio P_n di grado $\leq n$ tale che $f(x) = P_n(x) + o[(x-x_0)^n]$ per $x \to x_0$, P_n coincide con il polinomio di Taylor $T_n = Tf_{n,x_0}(x)$ di ordine n generato da f in x_0

$$f(x) \pm g(x) = p_n(x) + q_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) \cdot g(x) = p_n(x) q_n(x) + o(x_n)$$

Data inoltre $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \cdot h(x) = f(x)$, $r_n(x) q_n(x) + o(x^n) = p_n(x) + o(x^n)$

È anche possibile sviluppare con la formula di Taylor funzioni composte: si sviluppa prima la più "esterna", poi quelle interne verranno dunque trattate come normalmente trattiamo la variabile.

A questo punto, svilupperemo la funzione più interna, e ricaveremo così il polinomio.

Questi conti possono risultare complessi: una verifica può essere data dal fare la derivata della funzione studiata nel punto x_0 dello sviluppo, per verificare l'esattezza dei coefficienti delle variabili.

Ricordiamo che non sempre arrivare all'n-esimo ordine richiesto significa derivare e procedere n volte: anzi, spesso NON È COSÌ.

Se infatti il polinomio deve partire da una $f(x) = x^m \varphi(x)$, si parte già da un ordine m-esimo!

Taylor infine risulta molto utile per parti di studi di funzione: trattandosi di un'approssimazione, a forza di approssimare, si riesce a trovare parte principale e ordine di infinitesimo di una funzione.

È inoltre possibile studiare il comportamento della funzione in base a eventuali punti critici: se "manca" il termine pari, e quello successivo c'è, vi sarà un punto a tangente orizzontale.

Se il successivo sarà > 0, minimo, altrimenti massimo.

Se "manca" un termine dispari, il punto sarà a tg orizzontale, discendente se il successivo è < 0 e ascendente se > 0.

Ultima precisazione sarà un'introduzione veloce sul resto in forma di Lagrange; la forma $\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ è raramente usata in Analisi I, ma ha un significato molto interessante: la forma del resto di Peano analiticamente è più utile in quanto ci permette di ricondurre l'approssimazione da ordine n in ~~su~~ a un limite, ma non ci dà indicazioni su un preciso intervallo. Sostituendo a $\bar{x}$ nel resto in forma di Lagrange un certo intervallo, riusciamo a ottenere numericamente il significato dell'approssimazione.

Numeri Complessi

Nel nostro percorso abbiamo parlato di $\mathbb{N}=\{1,2,3,4\}$ come l'unico insieme non propriamente definibile.

Da $\mathbb{Z}$ si parte a definire il resto. Ogni "campo" (anche se $\mathbb{R}$ è l'unico campo numerico) ha necessitato di un'espansione, a causa di problemi: non è possibile effettuare in $\mathbb{Z}$ determinate operazioni, in $\mathbb{Q}$ altre, e anche in $\mathbb{R}$

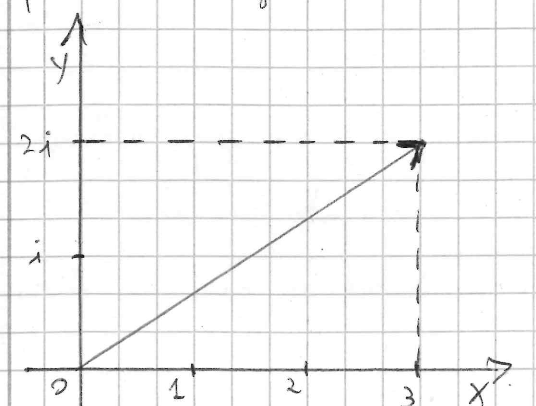
Per poter introdurre la possibilità di calcolare radici con indice pari e radicando negativo, l'insieme $\mathbb{R}$ è stato ampliato in $\mathbb{C}$, ossia reali + immaginari, = complessi.

Viene introdotto un numero "i", tale che $i^2=-1$.

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ viene rappresentato con coppie di numeri $(a;b)$. La rappresentazione algebrica è:

$C=a+ib$

I numeri complessi sono un'invenzione poco recente; recente è stata l'interpretazione geometrica, che ne ha favorito lo studio: possiamo raffigurare un numero complesso in forma vettoriale, con il segmento che congiunge O (0,0) con il punto di incontro tra (a;b), $a \in \mathbb{R}$ e $b \in$ immaginari. Quindi, alle ascisse la parte reale, alle ordinate quella immaginaria.



Consideriamo

$C = 3 + 2i$

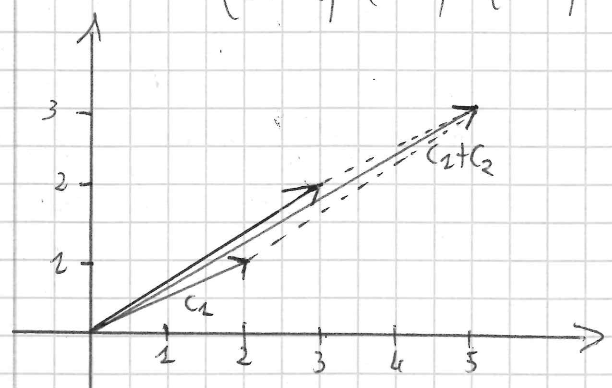
Questa notazione "vettoriale" ci permette di rappresentare la somma con la regola del parallelogramma:

Somma: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+i(b+d)$

$C_1 = 2+i$

$C_2 = 3+2i$

$C_1+C_2 = 5+3i$



Il prodotto, si può considerare uguale al prodotto di due binomi:

$(a+bi)+(c+di) = a\cdot c + a\cdot d\cdot i + b\cdot c\cdot i + b\cdot d\cdot i^2 = (ac-bd)+i(ad+bc)$

Rappresentazione con coordinate polari

Oltre alla comune rappresentazione, ne esiste una con "coordinate polari": chiamando $\rho=(a^2+b^2)$ la distanza tra il punto e O, e con α l'angolo formato dal vettore, un numero complesso $a+b\cdot i$ si può rappresentare:

$a+b\cdot i = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\quad \rho = (a^2+b^2)$, $\alpha = \operatorname{Arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

Altra definizione che può tornare utile, è quella di rappresentazione esponenziale:

$z \overset{def}{=} e^{a+i\cdot b} \underset{(*)}{=} e^{a}\cdot e^{ib} = \rho\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$

(*) Questo (=) non è banale: forza il fatto che l'esponenziale complesso si comporta come quello reale!

$e^{a} \cdot e^{i \cdot b} = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$

ergo: $\begin{cases} \rho = e^{a} \\ e^{i \cdot b} = \cos\alpha + i \sin\alpha \end{cases}$

Dunque, convenientemente, il numero complesso in forma esponenziale si rappresenta così:

$z = \rho \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Facciamo ora un'osservazione interessante: dati due numeri $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$z_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1}$

$z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}$ $\qquad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot e^{i\alpha_1 + i\alpha_2}$

Gli angoli vengono SOMMATI, le distanze MOLTIPLICATE!

Calcolo delle primitive di una funzione

Sia f una funzione definita su di un intervallo I: ogni funzione F derivabile su I tale per cui $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, è detta primitiva di f su I.

Studieremo solo le funzioni continue su un intervallo reale, di tutte le funzioni integrabili che esistono, e dunque solo una piccola parte.

Proposizione: se F e G sono due primitive di f sull'intervallo I, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ (in quello che noi studiamo) tale che

$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I$

Dimostrazione: definita la funzione ausiliaria $H(x) = G(x) - F(x)$,

$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x)$ (per l'algebra delle derivate), $= 0$.

In parole povere, tutte le primitive di una funzione sono uguali a meno di una costante.

Dato tale teorema, diamo una definizione importante:

L'insieme di tutte le primitive di f in un intervallo reale viene indicato con la seguente notazione:

$\int f(x)\,dx$ (Integrale indefinito di $f(x)\,dx$);

$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c \ : c \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow F(x) + c$

Con un po' di intuito, è possibile ricavare una tavola di integrali "immediati", ossia verso i quali si cerca di ricondursi, per risolvere problemi.

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad , \alpha \neq 1 \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c \quad , |x| \geq 0 \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

L'integrale indefinito è lineare: dati $f(x)$, $g(x)$ integrabili su intervallo I, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha che $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile su I, e dunque

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Dimostrazione: sia F una primitiva di f, G primitiva di g, data la proprietà di linearità della derivata,

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Integrazione per parti

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in un intervallo I; se $f'(x) g(x)$ è integrabile, lo è anche $f(x) g'(x)$, dunque possiamo usare la regola

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$$

Dimostrazione: definita $H(x)$ come una primitiva di $f'(x) g(x)$ in I, abbiamo che

$$[f(x) g(x) - H(x)]' = \cancel{f'(x) g(x)} + f(x) g'(x) - \cancel{f'(x) g(x)}.$$

Integrazione per sostituzione

Sia $f(y)$ una funzione integrabile su un intervallo J, e sia $F(y)$ una sua primitiva. Sia $\varphi(x)$ una funzione derivabile, su I, a valori nell'intervallo J. Allora, la funzione $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ è integrabile nell'intervallo I, e si ha che

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + c \, ;$$

Questo risultato si può anche intendere più o meno così:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy.$$

Dimostrazione: ricordando la derivazione di una funzione composta,

$$\frac{d F(\varphi(x))}{dx} = \frac{d F(\varphi(x))}{dx} \cdot \frac{d \varphi(x)}{dx} = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Integrazione indefinita di funzioni razionali

Bisogna studiare un certo numero di casi, per poter avere una certa idea di come comportarsi:

- Se il grado del denominatore è maggiore di 1 rispetto a quello del numeratore, si tende a cercar di raggiungere una forma del tipo "$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$".

- Se il grado del numeratore è maggiore di 2 o più, le possibilità sono diverse: o si tende a raggiungere una forma del tipo "$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctan f(x)$", o $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^{\alpha}} dx = \frac{[f(x)]^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $\alpha \neq 1$."

Quelle appena trattate sono le casistiche con grado num < grado den.
Quando il grado num è ≥ del grado den, prima di tutto ci si riconduce ai casi precedenti, mediante divisione di polinomi o trucchi algebrici. Poi, si usano i trucchi precedenti.
Ultima casistica interessante è quella dei polinomi di grado 0 o 1, al num, e al den un polinomio di grado 2/3/1 scomponibile. Si usa un sistema simile:

1) Si scompone il polinomio al den, fattorizzandolo
2) Dato polinomio di n radici, si scrive in questa forma:
$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(x-\alpha_i)}$, con A_i parametro
3) Si confrontano i coefficienti della x, $x^1 \dots x^n$ con quelli del num, risolvendo un sistema, e trovando $A_1 \dots A_n$.
4) Si risolvono gli n integralini trovati, spesso logaritmi o x^1.

VARIANTI:

- $$\frac{p(x)}{(x-\alpha)^n} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}.$$

- Dato al den un polinomio di II° grado NON SCOMPONIBILE IN $\mathbb{R}$,
$$\frac{p(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}.$$

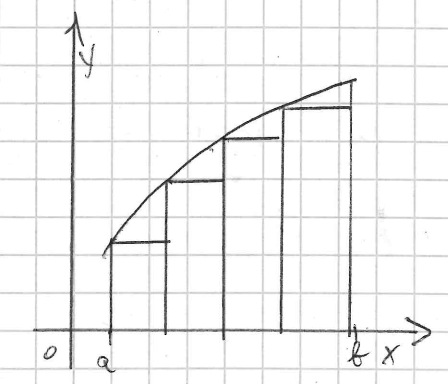
Così si concludono i metodi di integrazione indefinita, ossia il calcolo delle primitive di una funzione su di un dato intervallo.

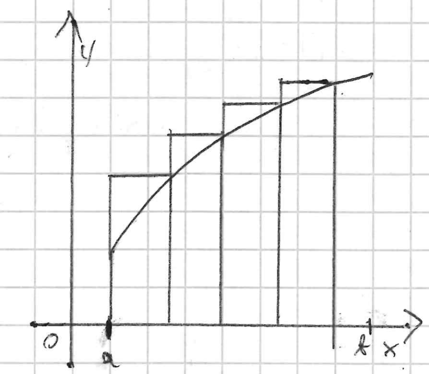
Integrali definiti

Prima di tutto, diamo alcune definizioni importanti:
1) Definiamo il trapezoide di f sull'intervallo $[a;b]$ come la regione piana delimitata da $[a;b]$ e dal grafico di f
2) Definiamo "continua a tratti" una funzione continua in un intervallo $[a;b]$ meno che in un numero finito di punti, in cui vi è una discontinuità eliminabile o un salto.

Integrale secondo Cauchy

Data f continua in $[a;b]$, la suddividiamo in tale intervallo in tanti intervallini, di ampiezza Δx. Generalizziamo, dicendo che abbiamo n intervallini di ampiezza Δx.





Nella prima figura, abbiamo costruito i rettangoli di base Δx e altezza m_K, con m_K funzione minima di f in Δx.
Nella seconda figura, abbiamo costruito i rettangoli di base Δx e altezza M_K, con M_K ordinata massima di f in Δx
Definiamo ora

$s_n = \sum_{K=1}^{n} m_K \cdot \Delta x$ (SOMMA INFERIORE)

$S_n = \sum_{K=1}^{n} M_K \cdot \Delta x$ (SOMMA SUPERIORE)

È stato dimostrato che le due successioni s_n e S_n convergono, e allo stesso limite, che è stato chiamato "integrale definito di f su $[a;b]$":

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integrale secondo Riemann

Sia f una funzione limitata su $I=[a;b]$, costante a tratti (per ora, almeno).

Iniziamo lavorando sulle funzioni a scala, ossia funzioni tali per cui

$f:[a;b]\to\mathbb{R}$, se $f(x)=c_k$, $\forall x\in(x_{k-1};x_k)$ con $k=1;2;\dots;n$.

Indichiamo con $S([a;b])$ l'insieme delle funzioni a scala.

Sia $f\in S([a;b])$, e siano $\{x_0;x_1;\dots;x_n\}$ punti di suddivisione ad essa adattata (punti in cui vi è il salto).

Viene definito "integrale definito di f su $I=[a;b]$" il numero

$$\int_I f = \sum_{k=1}^{n} c_k\,(x_k-x_{k-1})$$

Proprietà: siano $g, h\in S([a;b])$, : $g(x)\le h(x)\ \forall x\in I=[a;b]$.

Dunque,

$$\int_I g \le \int_I h$$

Introduciamo ora due insiemi: le funzioni a scala che maggiorano f e quelle che minorano f. Definiamo dunque

$$S_f^+ = \{h\in S([a;b]) : f(x)\le h(x)\ \forall x\in[a;b]\}$$

$$S_f^- = \{h\in S([a;b]) : f(x)\ge h(x)\ \forall x\in[a;b]\}$$

Essi sono due insiemi, dunque hanno un estremo inferiore e uno superiore. Dunque, definiamo

- Integrale superiore di f su $I=[a;b]$ il numero:

$$\overline{\int_I} f = \inf\left\{\int_I h : h\in S_f^+\right\}$$

- Integrale inferiore di f su $I=[a;b]$ il numero:

$$\underline{\int_I} f = \sup\left\{\int_I h : h\in S_f^-\right\}$$

Dal momento che i due insiemi S_f^+ e S_f^- non sono vuoti,

$\overline{\int_I} f < +\infty$, e $\underline{\int_I} f > -\infty$. Inoltre,

$$\overline{\int_I} f \ge \underline{\int_I} f .$$

Definizione: una funzione f limitata su $I=[a;b]$ è integrabile (secondo Riemann) su I se

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$$

Teorema: sono integrabili sull'intervallo $I = [a;b]$

a) Le funzioni continue su I

b) Le funzioni continue a tratti su I

c) Le funzioni continue su $(a;b)$ e limitate su I

d) Le funzioni monotone su I

Proposizione: sia f una funzione integrabile su $[a;b]$. Dunque

- f è integrabile su ogni intervallo $[c;d] \subseteq [a;b]$
- $|f|$ è integrabile su $[a;b]$

Proprietà degli integrali definiti:

0) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (o a dom f)

2) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall a,b \in I$

3) $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \quad \forall a,b \in I, \ a < b, \ f \geq 0$ in I

4) $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad \forall a,b \in I, \ a < b, \ f \leq g$ in I

5) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Commenti:

1) Definito intervallo $I = [a;b]$, e $c \notin I$, IL TEOREMA È COMUNQUE VALIDO.

5) Il teorema di maggiorazione dell'integrale può tornare molto utile negli integrali impropri: quando dobbiamo maggiorare una funzione, per stimarne un ordine e poterci lavorare, è fondamentale.

Teorema della media integrale

Si definisce media integrale (o valor medio) di f su $[a;b]$ il numero

$$m(f;a;b) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$m(f;a;b)$ è il punto dell'intervallo $I = [a;b]$ in cui il valore dell'area di base $[a;b]$ e altezza $m(f;a;b)$ è uguale all'area del trapezoide.

Dimostrazione: chiamiamo $i_f = \inf_{x \in [a;b]} f(x)$, e $s_f = \sup_{x \in [a;b]} f(x)$; per ogni $x \in [a;b]$ si ha che $i_f \leq f(x) \leq s_f$

Possiamo dire che

$$(b-a)\, i_f = \int_a^b i_f\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b s_f\,dx = (b-a)\, s_f$$

Dividendo tutto per $(b-a)$, otteniamo che

$i_f \leq m(f,a,b) \leq s_f$.

Esiste dunque il punto tale per cui esiste la "media integrale"

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione definita su $I \in \mathbb{R}$, non necessariamente limitata.

Sia f integrabile su I. Chiamiamo funzione integrale di f su I ogni funzione del tipo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$; $a \in \mathbb{R}$, o a I più precisamente, x è variabile.

Sia f continua su $I \subseteq \mathbb{R}$; dato $a \in I$, e definita la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$, allora F è derivabile su I, e si ha che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Dimostrazione: consideriamo $x \in I$, $x+\Delta x \in I$, e il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{\Delta x}\left(\cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = m(f, x, x+\Delta x)$$

Abbiamo che

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = m(f, x, x+\Delta x)$$

Per il teorema della media integrale, $\exists\, z : m(f; x; x+\Delta x) = f(z(\Delta x))$.

Passiamo al limite uguale a 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \left[x \le z(\Delta x) \le x+\Delta x\right]$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) \quad = \quad f(x)$$

Corollario: data f continua su $I = [a;b]$, e F primitiva di f su I, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

Lemma: data φ continua in $I(0)$, $\varphi(x) = o(x^\alpha)$ per $x \to 0$, $\alpha \ge 0$.

Dunque, $\int_0^x o(s^\alpha)\,ds = o(x^{\alpha+1})$ per $x \to 0$.

Regole di integrazione definita: note

- Per parti, la formula diventa:

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = \Big[f(x) g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$$

- Per sostituzione, la formula diventa:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy.$$

Integrali Impropri

Introduciamo innanzitutto una notazione spesso usata:

$f \in R_{Loc}([a;b])$

Significa: funzione f definita come integrabile (secondo Riemann) localmente nell'intervallo $[a;b]$.

Considereremo prima integrali impropri in intervalli illimitati, soprattutto $f \in R_{Loc}([a;+\infty))$

Definizione: data $f \in R_{Loc}([a;+\infty))$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

Il simbolo a primo membro è detto "integrale improprio":

- Se il limite esiste ed è finito, l'integrale è detto convergente
- Se il limite esiste ma è infinito, l'integrale è detto divergente

- Se il limite non esiste, l'integrale è oscillante.

Criteri di convergenza

Data una funzione $f \in R_{Loc}([a;+\infty))$, non è detto che la sua primitiva sia rappresentabile, o comunque semplice da calcolare. Se però quello che vogliamo studiare è solo la sua eventuale convergenza, e non il limite al quale converge, possiamo usare dei criteri di tipo approssimativo.

Criterio del confronto: data $f, g \in R_{Loc}([a;+\infty))$, tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a;+\infty)$,

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

- Se f diverge, allora anche g (gli integrali impropri)
- Se g converge, allora anche f (sempre gli integrali impropri).

Criterio di convergenza assoluta

Data $f \in R_{Loc}([a;+\infty))$ una funzione tale che $|f| \in R([a;+\infty))$, allora $f \in R([a;+\infty))$ e

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Criterio del confronto asintotico

Sia $f \in R_{Loc}([a;+\infty))$, f ha ordine di infinitesimo α per $x \to +\infty$, rispetto al campione $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

- Se $\alpha > 1$, $f \in R([a;+\infty))$
- Se $\alpha \leq 1$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è divergente.

N.B.: utilizzando assieme questi 3 criteri, è semplice maggiorare una funzione, utilizzando le proprietà dei simboli di Landau e gli sviluppi di Taylor. Inoltre, grazie a questi ultimi, è facile trovare la convergenza di un integrale improprio.

Esempio: data $f(x) \sim x^4$, $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{\tan^3 x} dx$ converge?

La risposta è NO! $f(x) \sim x^4$, $\tan^3 x \sim x^3$, $\int_a^{+\infty} x\, dx = x^2$, e quindi diverge!

Usando questi trucchi questi esercizi sono semplici. Si noti che l'unico caso veramente complesso e quasi sempre irrisolvibile è quello degli integrali impropri oscillanti.

Esiste un altro fondamentale tipo di integrale improprio: con le funzioni non limitate.

Sia $f \in R_{Loc}([a;b))$. Poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b+\varepsilon} f(x)dx$$

Come prima, se

- Il limite esiste ed è finito, l'integrale converge
- Se il limite è infinito, l'integrale diverge
- Se il limite non esiste, l'integrale è oscillante.

I criteri di convergenza precedenti si possono facilmente adottare, ricordando che però il campione ora è $\varphi(x) = \frac{1}{b-x}$. $\alpha < 1$ converge, $\alpha \geq 1$ diverge.

Equazioni differenziali

Finora abbiamo sostanzialmente studiato due tipi di equazioni: equazioni algebriche, ed equazioni funzionali.

In un'equazione algebrica, a 1 variabile, abbiamo 1 numero che rende vera l'equazione:

$2x+1=x-2$; $x=-3$; -3 rende vera l'uguaglianza.

Un'equazione funzionale è ad esempio

$f(x)= -2x-1$

Essa è valida per ogni x appartenente al dominio della funzione.

Vogliamo fare un ulteriore passo avanti:

$f(x)+2x+1=\frac{f'(x)}{2}$

L'algebra non è sufficiente per risolvere questo tipo di equazione: vi è un legame tra $f(x)$ e $f'(x)$, ma l'algebra non ci permette di risolvere ciò: questo è un'equazione differenziale, ossia un'equazione funzionale con una derivata.

La più semplice soluzione di un'equazione differenziale, nonché il caso a cui ci riporteremo di più, è il calcolo delle primitive.

Studiamo un esempio di equazione differenziale:

$f'(x)=f(x)$

Le soluzioni possono essere $a\cdot e^x$, $b\cdot e^{+x}$...; le soluzioni di questa equazione differenziale è data dalla combinazione lineare di tutte queste due soluzioni:

$Sol\left(f'(x)=f(x)\right) = \mathcal{L}\left\{e^x\right\}$.

Soluzioni di un'equazione differenziale; notazione

Le soluzioni di un'equazione differenziale, sono date da una coppia: $\left(\varphi(x)\ ;\ I\right)$; $\varphi(x)$ è una funzione, I un intervallo.

L'intervallo è fondamentale: al di fuori di esso, la soluzione non sarà valida, dunque è sempre da indicare.

Vi son diverse notazioni per rappresentare un'equazione differenziale: vediamo le principali, con $f(x)=f''(x)$:

$y''(x)=y(x)$

$x''(t)=x(t)$ [NOTAZIONE USATA DAI FISICI]

$y''=y$

$x''=x$ [NOI USEREMO SPESSO QUESTA]

Una forma del tipo

$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)=0$ è un'equazione differenziale di ordine n, nella variabile x.

Quello che si tenta a fare, è raggiungere una forma del tipo $y^{(n)}=F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, ossia ottenere l'equazione in funzione della derivata di ordine più alto.

Come già detto, il modo "più semplice" di risolvere equazioni differenziali è usare il calcolo delle primitive. Quando si vuole trovare un particolare integrale di una funzione, si risolve uno dei cosiddetti "Problemi di Cauchy". Ad esempio,

$\begin{cases} y'=f(x,y) & \text{in } I \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ È un problema di Cauchy.

Equazioni a variabili separabili

Abbiamo un'equazione del tipo

$y' = g(x) \cdot h(y)$

g è funzione di x, h di y, entrambe continue in I.

$y' = f(x,y) \iff y' = g(x) \cdot h(y)$

$y' = \frac{dy}{dx}$;

$\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$; $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$;

$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx$;

Dunque, possiamo dire che

$H(y(x)) = G(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

$y(x) = H^{-1}(G(x) + C)$

Equazioni lineari

Sono equazioni del tipo

$y' + a(x)y = b(x)$

a e b continue su I.

$f(x; y) = -a(x)y + b(x)$, polinomio di I grado in y, con coefficienti in x.

Se $b(x) = 0$, l'equazione è omogenea, non omogenea se $b(x) \neq 0$

Equazioni omogenee:

$y' = -a(x)y$; $\frac{dy}{dx} = -a(x)y$; $\frac{1}{y}dy = -a(x)\,dx$;

$\int \frac{1}{y}dy = -\int a(x)\,dx$;

$\int a(x)\,dx = A(x) + C$; $\int \frac{1}{y}dy = \ln|y|$

$\ln|y| = -A(x) - C$

$|y(x)| = e^{-C} e^{-A(x)}$

$y(x) = \pm K e^{-A(x)}$. $(e^{-C} = K)$, $K \in \mathbb{R}$

Equazioni non omogenee: cerchiamo la soluzione nella forma

$y(x) = K(x) e^{-A(x)}$

$K(x)$ è una funzione di x, da trovare. $e^{-A(x)} > 0$.

Se sostituiamo questa forma in $y' + a(x)y = b(x)$, otteniamo

$K'(x) e^{-A(x)} + K(x) e^{-A(x)} \cdot (-a(x)) + a(x) K(x) e^{-A(x)} = b(x)$

Ossia

$K'(x) = e^{A(x)} b(x)$

Detta $B(x)$ una primitiva di $e^{A(x)} b(x)$,

$\int e^{A(x)} b(x)\,dx = B(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

$K(x) = B(x) + C$

$y(x) = e^{-A(x)} (B(x) + C)$

$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x)\,dx$

Quando abbiamo trovato la soluzione delle equazioni differenziali lineari omogenee, $y(x) = C \cdot e^{-A(x)}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e l'abbiamo sostituita nelle lineari non omogenee, con $y(x) = K(x) e^{-A(x)}$, abbiamo usato il "metodo di variazione delle costanti": si tratta di un'estensione di un caso a uno più generale, che non sempre funziona, ma in questo caso risulta utile.

Equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti

Se abbiamo una forma del tipo:

$y'' + ay' + by = g(x)$ (in cui il coefficiente di y'' deve essere 1)

abbiamo una forma completa di equazione differenziale a coefficienti costanti.

La forma omogenea è quella in cui $g(x) = 0$.

$y'' + ay' + by = 0$

Si dimostra che un'equazione differenziale si può rappresentare come sistema lineare, e che le "radici" siano le effettive radici del polinomio caratteristico (ossia gli autovalori) di

$x^2 + ax + b = 0$; $x_1 = \lambda_1$; $x_2 = \lambda_2$;

Le soluzioni dell'eq. omogenea sono:

$e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$.

In realtà, distinguiamo 3 casi:

1) determinante del p.c. > 0 : 2 soluzioni reali distinte ; abbiamo uno spazio a 2 dimensioni generato da $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$.

2) $\det(p.c) = 0$; 2 soluzioni reali coincidenti : consideriamo le soluzioni $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$: essi sono due spazi affini, ma comunque, essendo i generatori indipendenti, di dimensione 2

3) $\det(p.c.) < 0$: non esistono soluzioni reali. Potremmo dire che, dunque, $\lambda = \alpha \pm i \cdot \beta$. Poiché imponiamo che l'esponenziale reale si comporti come quello complesso, possiamo rappresentare i generatori in questo modo:

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$; $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Completiamo le nostre conoscenze generalizzando un po';

Equazioni differenziali a coefficienti costanti

Data una forma del tipo

$y'' + ay' + by = g(x)$

Con $g(x)$ con una forma del tipo

$g(x) = p(x)_n \cdot x^m \cdot e^{\mu x} \cdot \cos(\alpha x)$ oppure $g(x) = p(x)_n \cdot x^m \cdot e^{\mu x} \cdot \sin(\alpha x)$

Siamo in grado di trovare le soluzioni dell'equazione differenziale a coefficienti costanti.

Innanzitutto, seguiamo un metodo meccanico:

1) Troviamo le soluzioni dell'equazione omogenea, $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Troviamo n (grado del polinomio), m (molteplicità della soluzione), μ e α, e sostituiamo nell'equazione in forma completa il tipo di soluzione che abbiamo trovato

Es: se $m = 1$, il polinomio è di grado 1, $\mu = 2$, $\alpha = 0$, la nostra soluzione sarà del tipo "$(ax+b)\, x\, e^{2x}$". Sostituiamo nell'equazione e troviamo i valori di a e b

Es. banale: se $g(x) = K$, $\bar{y}(x) = \frac{K}{b}$

N.B.: se una delle soluzioni è in forma con "$\cos(\alpha x)$" o "$\sin(\alpha x)$", allora ci sarà anche la soluzione con l'altra funzione (rispettivamente, "$\sin(\alpha x)$" o "$\cos(\alpha x)$"), in quanto coniugate.

N.B.: data forma del tipo:

$y'' - 3y' + 2y = x + e^x$ (esempio),

Scomponiamo in 2 equazioni, $y'' - 3y' + 2y = x$, e $y'' - 3y' + 2y = e^x$, le risolviamo separatamente, E UNIAMO LE SOLUZIONI.

I possibili errori sono 2:

1) Non riconoscere bene la funzione: $\frac{1}{x}$, o $\log(x)$, non sono nella forma risolubile

2) $y'' - 3y + xy = 1$ non è risolubile con questo metodo, in quanto a coefficiente variabile (continuo).