Analisi Matematica 2

Calcolo differenziale a più variabili

In Analisi Matematica 1 abbiamo trattato funzioni simili:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

In questo corso, per prima cosa, generalizzeremo le nostre conoscenze sulle funzioni, facendo operazioni tra spazi vettoriali di diversa dimensione, ossia

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Generalmente, per simili studi, si inizia ad analizzare casi semplici, come "$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$", o "$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$", per poi generalizzare le nozioni

Concetto di curva

Il primo problema, che riscontriamo anche nella fisica, è il passaggio da scalare ($\mathbb{R}$) a vettore ($\mathbb{R}^n$).

Intuitivamente, possiamo capire che la curva è un vettore che si muove in funzione di una variabile "tempo" (visione fisica delle curve parametriche). La lettera "t", che in fisica indica effettivamente una variabile temporale, è il parametro al cui variare si muove un certo vettore.

Nel campo scalare ci basta 1 coordinata (infatti ci muoviamo su di una retta), in $\mathbb{R}^2$ due, in $\mathbb{R}^3$ 3, e così via. Ciò in fisica è detto "legge oraria".

Abbiamo, dunque, una variabile-parametro "t" scalare, ossia unidimensionale, ed un intervallo I di $\mathbb{R}$.

Il parametro t varia in I, e abbiamo, in corrispondenza, un vettore di n-ple, di n funzioni continue (poi specificheremo meglio) in I di t. Funzioni quindi con variabile indipendente t.
Potremmo indicare così:

$$t \to \gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\\ \cdots\\ \cdots\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}, \quad t \in I$$

Definizione: sia I un intervallo di $\mathbb{R}$; si dice "curva parametrica in $\mathbb{R}^n$" una n-pla (un vettore) del tipo $(\gamma_1(t); \gamma_2(t); \ldots; \gamma_n(t)) = \gamma(t)$, di funzioni continue in I.

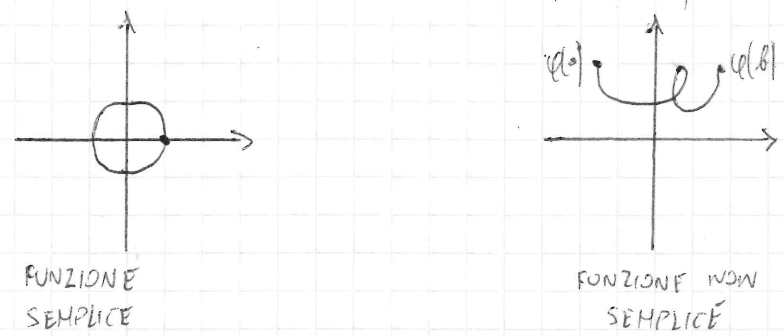
Consideriamo ora alcune definizioni e/o nomenclature:

- Se abbiamo un intervallo limitato e chiuso, del tipo $I=[a;b]$; in questo caso, la parte di curva in $[a;b]$ è detta "arco di curva"; $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ sono gli "estremi dell'arco"; infine, se $\gamma(a)=\gamma(b)$, l'arco è detto "arco chiuso"
- Vogliamo dare la definizione di "funzione semplice", ma prima introduciamo alcuni simboli/termini:

• $\mathring{I}$: intervallo I senza considerare gli estremi (Interno di I)
• $\forall t_1, t_2 \in \mathring{I},\ t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

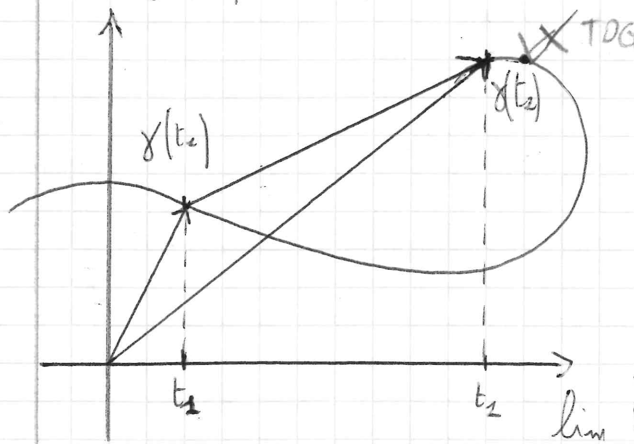
La seconda ricorda molto la definizione di iniettività.
Data la prima definizione, le funzioni che seguono il punto 2 vengono definite "funzioni semplici".

Abbozzando velocemente due funzioni:



- $\gamma(I)$ è detto "sostegno della curva": sarebbe la "traiettoria" del vettore, l'insieme dei punti, insomma tutto il percorso.

"Velocità", o "Vettore TANGENTE alla curva".
Consideriamo un'equazione di una curva (le equazioni, poiché parliamo di funzioni di più variabili), in forma parametrica, ossia in funzione del parametro "t".
Abbiamo confrontato "t" ad una variabile temporale. Possiamo, dunque, paragonare il vettore tangente alla curva in ogni suo punto come la "velocità" della curva: dato $I=[t_1; t_2]$ (non per forza chiuso), vogliamo vedere quanto "velocemente" percorriamo il tratto compreso tra $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$. Il "tempo" che ci impiegheremo sarà (t_2-t_1)



$\dfrac{\gamma(t_2)-\gamma(t_1)}{t_2-t_1}$ è il rapporto incrementale.

Se passiamo al limite per $t_2 \to t_1$,

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\gamma(t_2)-\gamma(t_1)}{t_2-t_1} = \gamma'(t_1)$$

Abbiamo così ottenuto una sorta di "velocità istantanea" della funzione γ: il suo vettore tangente.

Curve regolari

Finora l'unica condizione che abbiamo posto è la continuità.
Introduciamo ora il concetto di "curva regolare", che si basa su due sostanziali pilastri, più altre osservazioni sulle quali i matematici sono discordi:

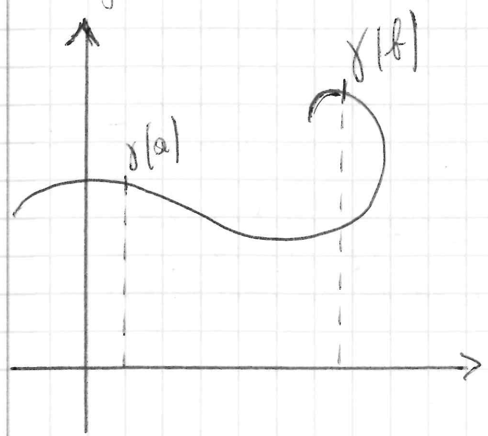
1) $\gamma(t) \in C^{(1)}(I)$ (la derivata è continua)
2) $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$ (la derivata non è mai nulla)

Osservazioni aggiuntive:

- $\exists\, \gamma'(a) = \lim_{t \to a^+} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a}$ (limite sinistro)
- $\exists\, \gamma'(b) = \lim_{t \to b^-} \dfrac{\gamma(b)-\gamma(t)}{b-t}$ (limite destro)

Nei punti di estremo, ci sono tre scuole di pensiero
- Può non esistere la derivata
- La derivata deve esistere e non essere nulla
- La derivata deve esistere e può essere nulla.

Lunghezza di un arco di curva



Per trovare la lunghezza dell'arco di una curva, non è possibile fare il calcolo "istantaneo", ma è invece possibile approssimarlo.

Una prima approssimazione è data dal modulo della distanza tra $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$,
$\|\gamma(b)-\gamma(a)\|$: un'approssimazione a dir poco pessima.

È possibile però spezzettare la curva in più intervallini, e sommare le lunghezze di arco dei vari sotto-archi.
Detto m il punto medio tra a e b,
$\|\gamma(m)-\gamma(a)\| + \|\gamma(b)-\gamma(m)\|$ è già un'approssimazione migliore.

Potremmo dire, in matematichese, che la lunghezza dell'arco di curva $\gamma(I)$, $l_{\gamma(I)}$, sia:

$$l_{\gamma(I)} = \lim_{n \to \infty} \sup \sum_{i=0}^{n} \|\gamma(m_{i+1})-\gamma(m_i)\|$$

Si dimostra che questo $l_{\gamma(I)}$ si può calcolare semplicemente con un integrale:

$$l_{\gamma(I)} = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

La lunghezza dell'arco compreso tra a e b è data dall'integrale del modulo di $\gamma'(t)$ rispetto alla variabile appunto t.

Esempio pratico: 1

1) Dato $\vec{v} = (1;2;1) \in \mathbb{R}^3$, e $(\lambda;2\lambda;\lambda) = \lambda(1;2;1)$, abbiamo lo spazio vettoriale di 1 dimensione parallelo a $\vec{v}$.
In $\mathbb{R}^3$ abbiamo, come possibilità, un punto, una retta, un piano per l'origine.
2) Definiamo una curva che a ogni t associa il vettore $t \cdot \vec{v}$:

$$t \longrightarrow t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot t \\ v_2 \cdot t \\ v_3 \cdot t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Questa rappresenta a tutti gli effetti l'equazione di una curva!

3) Osserviamo che il sostegno di questa curva è la retta passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$. Possiamo dunque interpretare meglio la funzione, derivandola:

$$t \xrightarrow{\gamma'} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Dunque, con basi di analisi, fisica, e geometria/algebra lineare, possiamo interpretare la curva rispettivamente come una retta in forma parametrica, un moto rettilineo uniforme, o uno spazio vettoriale generato da $\mathcal{L}\{\vec{v}\}$

Esempio pratico 2

Se devo triplicare la velocità, per l'algebra delle derivate (e per la loro linearità),

$$t \xrightarrow{\gamma} 3 \cdot t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3v_1 t \\ 3v_2 t \\ 3v_3 t \end{pmatrix}.$$ Il sostegno è lo stesso, la velocità triplica.

A questo punto, osserviamo che, una curva ha un solo sostegno, ma un sostegno è tale per infinite curve.

Esempio pratico 3

Data la solita

$$t \xrightarrow{\gamma} \vec{v} \cdot t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad t \in I = [0;1],$$

Il punto iniziale $\gamma(0)$ sarà $(0;0;0)$;

Il punto finale sarà $\gamma(1) = (v_1; v_2; v_3)$

Esempio pratico 4

Data una curva

$$t \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

Troviamo il sostegno, e se è regolare.

Procediamo vedendo che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Per trovare il sostegno della curva, è necessario eliminare il parametro t. Per far ciò è possibile trovare la f^{-1}, operazione che può risultare difficile, o applicare trucchi:

In questo caso, eleviamo il sistema al quadrato:

$$\begin{cases} x^2 = \cos^2 t \\ y^2 = \sin^2 t \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 1$$

Troviamo ora la regolarità (o meno) della curva

Deriviamo la funzione:

$$t \xrightarrow{\gamma'} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

1) $\gamma \in C^{(1)} \ \forall t \in I$? Sì, l'abbiamo derivata.

2) $\gamma' \neq 0 \ \forall t \in I$?

Potremmo risolvere il sistema $\begin{cases} -\sin t = 0 \\ \cos t = 0 \end{cases}$, e vedere che non ha soluzioni.

Soluzione più intelligente, è studiare il modulo di $\vec{v}$, $\|\vec{v}\|$, e verificare che esso sia diverso da 0.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1 \neq 0.$$

Vediamo inoltre che $x = -\sin t$ punta a SINISTRA $(x<0)$, $y = \cos t$ punta in ALTO $(y>0)$, quindi abbiamo determinato anche il verso della velocità.

Cambio della descrizione dei tempi

Abbiamo una curva del tipo

$$t \xrightarrow{\gamma} \gamma(t), \quad t \in I = [a; b]$$

È possibile rappresentare la stessa curva con un altro parametro, ossia "cambiare la variabile", ossia "cambiare la descrizione dei tempi".

Al posto di far variare t in $I_1 = [a; b]$, faremo variare τ in $I_2 = [\alpha; \beta]$.

Introduciamo così una legge che leghi t e z, $t = \alpha(z)$.

$$z \xrightarrow{\delta} \alpha(z) \xrightarrow{\gamma} \gamma[\alpha(z)] = \gamma(t) = \delta(z)$$

Le due funzioni sono la stessa, rappresentata con diversi parametri temporali.

Studiamone ora la derivata:

$\delta'(z) = \gamma'[\alpha(z)] \cdot \alpha'(z)$ [derivata della funzione composta]

$\gamma'[\alpha(z)] = \gamma'(t)$, ossia la velocità della curva;

$\alpha'(z)$ è uno scalare;

$\alpha'(z) \cdot \gamma'(t)$ ci dà una dilatazione, o compressione, o cambio di verso della velocità.

Questo ultimo caso non è valido: "percorrere la curva al contrario" non ha senso!

Lunghezza di un arco di curva, parte 2.

Abbiamo già visto che, con $I = [a;b]$,

$$l_{\gamma(I)} = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Studiamo ora una particolare famiglia di curve: data $f \in C^{(1)}\ \forall x \in I$, tale per cui

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

$$t \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad ; \quad t \xrightarrow{\gamma'} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

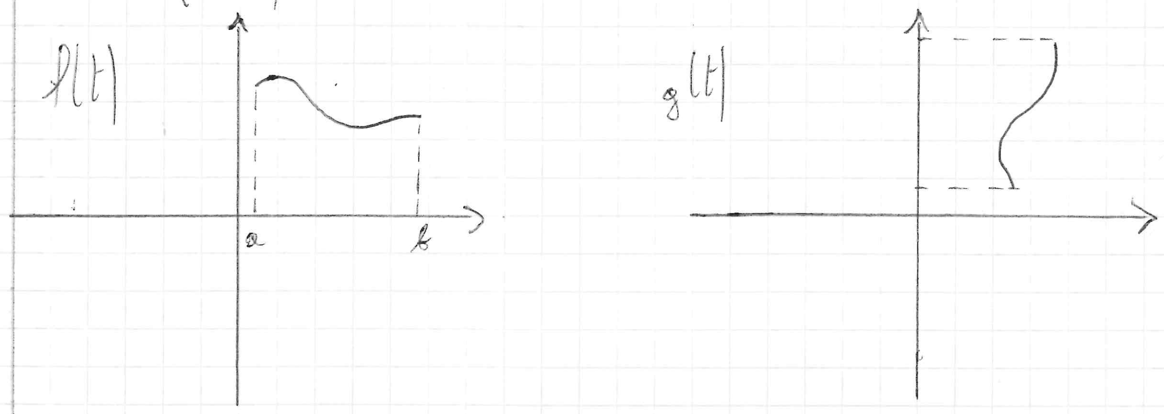
La lunghezza di questo arco di curva è

$$l_{\gamma(I)} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

Curve di questo tipo sono dette "curve grafico", perché rappresentano come ci si muove sul grafico di una funzione.

Vengono definite "curve grafico" pure le loro ruotate di 90°, ossia

$t \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}$;



Nota bene: funzioni apparentemente banali, da integrare sono molto difficili: facciamo un esempio.

$y = x^3$

$$t \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \qquad I = [0;1]$$

$$l_{\gamma(I)} = \int_0^1 \sqrt{1 + 9t^2}\, dt$$

Una funzione così banale, porta a un integrale alquanto difficile da calcolare in senso indefinito.

Funzioni scalari di variabile vettoriale

Abbiamo una funzione f tale che

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ La variabile indipendente sarà vettoriale, a differenza di come abbiamo sempre avuto.

Il problema sarà ora nel dominio, che sarà a n variabili. L'immagine sarà a 1 dimensione.

Studiamo, per capire meglio, il caso $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

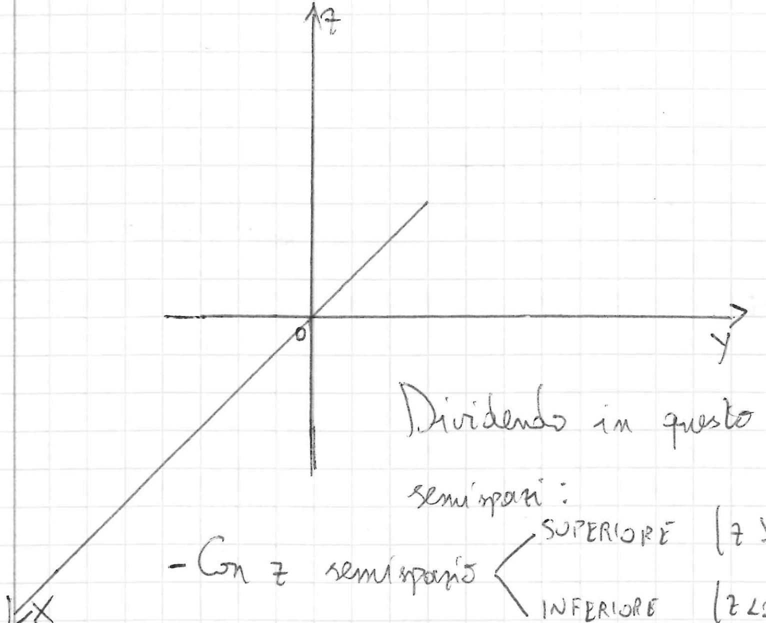
$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x;y) \qquad (z)$

Sul piano xy rappresentiamo un punto del dominio, su z la "quota".

$z = f(x;y)$

Le funzioni saranno rappresentabili in $\mathbb{R}^3$: studiamolo geometricamente.



Dividendo in questo modo lo spazio, abbiamo 6 semispazi:

- Con z semispazio: SUPERIORE $(z>0)$, INFERIORE $(z<0)$
- Con x semispazio: ANTERIORE $(x>0)$, POSTERIORE $(x<0)$
- Con y semispazio: DESTRO $(y>0)$, SINISTRO $(y<0)$

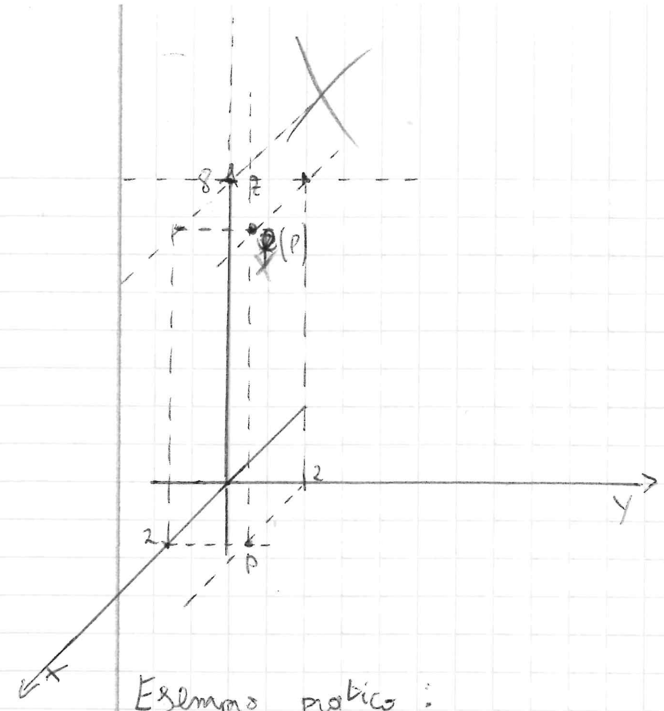
Intersecando i semispazi, otteniamo 8 zone dette "ottanti".

A ogni punto $P(x;y)$ corrisponde un valore a una data quota z.

Esempio:

$z = x^2+y^2 \qquad P(2;2), \quad z=4+4=8$

z è la quota di P.



Osserviamo che, al variare di P sul piano, avremo, nello spazio, una superficie.

Esempio pratico:

Se nello spazio prendo un vettore fisso $\vec{v}(a;b;c)$, qual è l'insieme dei vettori ortogonali $\vec{v_\perp}(x;y;z)$ a $\vec{v}$?

Ricordiamo che due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, ossia

$(x;y;z)\cdot(a;b;c)=0 \quad ; \quad ax+by+cz=0.$

Riprendiamo in $\mathbb{R}^2$, nel piano:

$(a;b)\cdot(x;y)=0; \quad ax+by=0.$ In $\mathbb{R}^2$ ciò rappresenta una retta, anzi, qualsiasi retta. Ma ciò è una curva: la funzione è "$y=mx$", che in effetti non rappresenta tutte le rette, in quanto l'asse y $(x=0)$ non è rappresentabile.

In $\mathbb{R}^3$, se abbiamo $c=0$, abbiamo un piano parallelo all'asse z, e non avremmo più una funzione. Si ha una funzione solo quando il piano è "storto": in caso contrario, il piano conterrebbe l'asse z, e non si potrebbe parlare di funzione.

Dunque, in $\mathbb{R}^3$, ragionando ovviamente sempre in termini di $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, abbiamo il grafico della funzione se e solo se $c\neq 0$.

Analizzeremo ora alcune particolari curve (in realtà, superfici, curve è sbagliato), molto "famose":

- $z = ax + by$: si tratta di un piano passante per l'origine
- $z = ax^2 + by^2$: si tratta di un paraboloide: se sezioniamo la superficie con piani paralleli a z, otteniamo, a seconda di "a" e "b", un'ellisse, un'iperbole o una circonferenza; con piani paralleli a y o x, delle parabole.
- $z^2 = ax^2 + by^2$: si tratta di un cono: esso è dato dalla rotazione di rette attorno un centro.

Da notare bene è ciò: le curve (superfici ....) nella forma
$f(x;y) = z = \varphi(x^2 + y^2)$;
sono dette "superfici di rotazione"; φ è detta "funzione radiale".

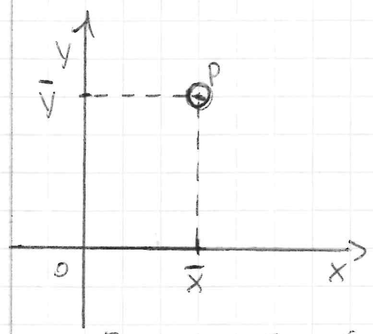
Nella parte pratica, saremo interessati a due sostanziali cose:
1) Dominio della funzione (come in Analisi I, ma con più variabili)
2) Insieme di livello: insieme degli $(x;y) \in f$ tali per cui $f(x;y)$ valga K.

Esempio pratico:
$\log(x+y) = K$
1) D: $x + y > 0$; $y > -x$ (dominio);
2) $x + y = e^K$; $y = e^K - x$. (insieme di livello, parametrico).

Topologia di $\mathbb{R}^n$

In Analisi I, quando studiavamo funzioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, partendo dal concetto di intorno, avevamo definito l'intervallo, usatissimo nelle ipotesi di molti problemi.
Ora, da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dobbiamo rivedere totalmente il concetto di intorno, estendendolo.

Iniziamo con $\mathbb{R}^2$, dopodiché verrà naturale continuare:



Abbiamo il punto $P(\bar{x};\bar{y})$. Fissato un d, la cosa più ovvia da fare è prendere un intorno circolare di raggio d.

$I_d[(\bar{x};\bar{y})] = \{(x;y) : (x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 < d^2\}$ Avendo un intorno aperto, abbiamo il minore stretto.

In $\mathbb{R}^n$, dato vettore $\vec{x}$ appartenente a $\mathbb{R}^n$,
$I_d(\vec{x}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| < d\}$

In $\mathbb{R}$ avremo un segmento, in $\mathbb{R}^2$ un cerchio, in $\mathbb{R}^3$ una sfera.

Introduciamo ora alcune definizioni: $A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

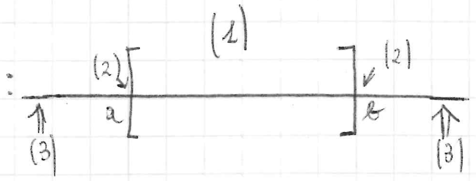
1) Dato $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice "interno" ad A se esiste un intorno di $\vec{x}$ tutto contenuto in A:
$\vec{x}$ int$(A) \Longrightarrow \exists\, I_d(\vec{x}) \subset A$

2) Dato $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice "esterno" ad A se è interno al complementare di A, se esiste un intorno cioè tale che $I_d(\vec{x}) \cap A = \emptyset$:
$\exists\, I_d(\vec{x}) : I_d(\vec{x}) \cap A = \emptyset$

3) Dato $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice "punto di frontiera" di A se ogni intorno di $\vec{x}$ ha intersezione non nulla sia con A che con il complementare di A.

Per comprendere meglio, passiamo ad alcuni esempi pratici:

1) $I=[a;b]$:



1) Punti interni
2) Punti di frontiera
3) Punti esterni.

2) $A=\{(x;y) : x^2+y^2 \le 1\}$

$Int(A)=\{(x;y) : x^2+y^2<1\}$

$Est(A)=\{(x;y) : x^2+y^2>1\}$

$Front(A)=\{(x;y) : x^2+y^2=1\}$

N.B.: $Int(A) \cup Est(A) \cup Front(A) = \mathbb{R}^n$.

3) $A=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1;\ z=0\}$

Ci troviamo in $\mathbb{R}^3$; abbiamo un cerchio e circonferenza. Dal momento che gli intorni che ora consideriamo sono sferici, non avremo punti interni di A. La circonferenza sarà l'insieme dei punti di frontiera. Il resto, punti esterni:

$Int(A)=\emptyset$

$Est(A)=\mathbb{R}^n - A$.

Definizione: un sottoinsieme $A\subset\mathbb{R}^n$ si dice aperto se $Int(A)=A$ (tutti i punti di A sono interni ad A).

Definizione: dato un insieme qualunque $A\subset\mathbb{R}^n$, si dice "chiusura di A" l'insieme stesso unito alla frontiera.

$\bar{A} = A \cup Front(A)$

In generale, ricordiamo che

$Int(A) \underset{(1)}{\subseteq} A \underset{(2)}{\subseteq} \bar{A}$

(1) Se è $\subseteq$ l'insieme è aperto, $\subset$ no.

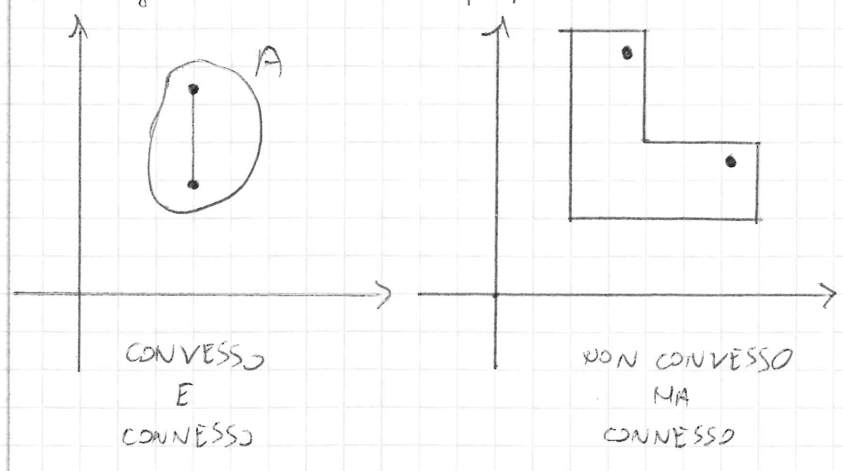
(2) Se è $\subseteq$ l'insieme è chiuso, $\subset$ no

L'insieme può essere al contempo chiuso e aperto. ($\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono esempi)

Definizione: dato $A\subset\mathbb{R}^n$, si dice limitato se esiste $I_d(0) : A\subset I_d(0)$

In parole povere, se l'insieme "ci sta dentro un cerchio", è limitato.

Dato insieme $A\subseteq\mathbb{R}^n$ si dice che è "convesso" se $\forall p_1, p_2 \in A$, il segmento di estremi $\overline{p_1p_2}$ è incluso in A.



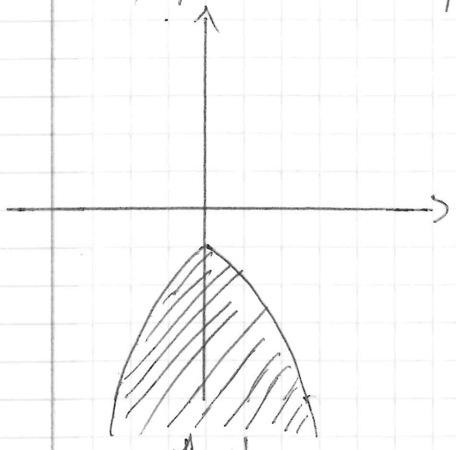
Si dice "connesso" (per archi) se per ogni $p_1, p_2 \in A$, esiste un arco di curva regolare (almeno a tratti) $[a;b]\xrightarrow{\gamma}A$ tale per cui $\gamma(a)=p_1$; $\gamma(b)=p_2$. Il sostegno è incluso in A.

Esempio pratico:

$f(x;y) = \ln(x^2+y+1)$ D: $y > -x^2-1$

L'insieme è:

- APERTO
- NON LIMITATO
- NON CONVESSO
- CONNESSO.



$\nexists$ NO!

Concetto di limite

Riprendiamo $f(x;y) = \ln(x^2+y+1)$. Avrà senso parlare nei punti del dominio, e su quelli della parabola.

$A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{x}$ è detto "punto di accumulazione per A" se $\forall I_\delta(\vec{x}) : I_\delta(x) \cap A \setminus \{\vec{x}\} \neq \emptyset$

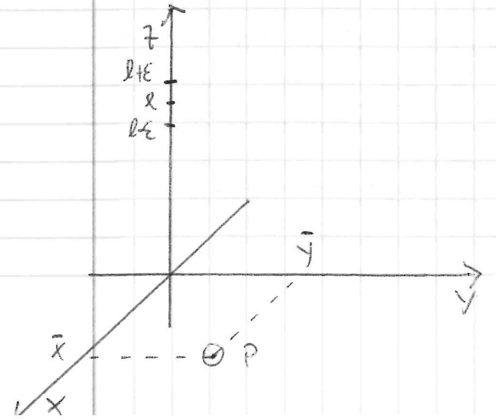
A parte il punto stesso, ogni intorno contiene dei punti di A.

Punto isolato è un punto non di accumulazione.

Passiamo al concetto di limite, che applicheremo sui punti di accumulazione per il dominio della funzione:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{(x;y)\to(\bar{x};\bar{y})} f(x;y) = l$$



P di accumulazione. Su z, avremo una superficie bucata in $P(\bar{x};\bar{y})$. Man mano che stringiamo l'intorno di P, ε si riduce.

Se
- $\lim_{(x;y)\to(\bar{x};\bar{y})} f(x;y) = l$ AVREMO UNA "CALOTTA"
- $\lim_{(x;y)\to(\bar{x};\bar{y})} f(x;y) = \infty$ AVREMO UNA FORMA A "BICCHIERE DI CHAMPAGNE".

Per fare il limite, dunque,

1) $f(x)$ deve essere definita in $I_\delta(\vec{x})$;
2) $\vec{x}$ deve essere punto di accumulazione per $Dom(f)$

Limiti all'infinito: $I(\infty)$

Nel piano consideriamo solo "∞": se voglio vedere il valore di un limite all'infinito, partendo dalla definizione di intorno, dovrò dire che il punto sta "al di là del cerchio".

$\infty : I_\delta(\infty) = \{(x;y) : x^2+y^2 > \delta\}$

In $\mathbb{R}^2$, ad esempio,

$\lim_{(x;y)\to\infty} f(x;y) = +\infty$ significa

$\forall M > 0 \ \exists I_\delta(\infty) : \forall (x;y) \in I_\delta(\infty), \Rightarrow f(x;y) > M$.

Parliamo ora di continuità: essa è legata al concetto di limite, ma le cose si complicherebbero molto, in casi normali.

Sappiamo che, data f definita in $\vec{x}_0$, e $\vec{x}_0$ punto di accumulazione, f si dice continua in $\vec{x}_0$ se $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

Usare questa definizione non è necessario: possiamo usare un teorema che ci garantisce, facendo molta meno fatica, la continuità

Teorema: sia $\varphi(x) : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, continua in I. Allora, la funzione $f(x;y) = \varphi(x) \ \forall x \in I\times\mathbb{R}$ è continua in $I \times \mathbb{R}$.

Osserviamo che così lavoriamo su funzioni a 1 variabile, o meglio, $\varphi(x)$ è a 1 variabile, $f(x;y)$ a 2, ma non abbiamo vincoli sulle y. In sostanza, avremo la funzione $z = f(x)$, "traslata" sull'asse delle y. Lo stesso arco, riportato, traslato in tutte y.

Secondo l'algebra lineare, potremmo anche dire che è lo spazio vettoriale generato dal vettore $(f(x); 1)$.

Prendiamo il solito esempio

$f(x; y) = \log(x^2 + y + 1)$

Dividendo in pezzetti, vediamo che

$x \xrightarrow{\varphi} x^2$ è continua

$y \xrightarrow{\varphi} y$ è continua

$(x; y) \xrightarrow{\varphi'} 1$ è continua

Somma, differenza e prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. Dunque, nel dominio, la funzione risulta essere continua.

Per lo studio a livello calcolativo di limiti, poiché risultano essere molto difficili, ci scarperemo di due cose:

- Convertire la funzione in coordinate polari, maggiorarla adeguatamente e ~~trovare~~ il limite con il teorema del doppio confronto
- Dimostrare che un limite non esiste, tagliando la curva con cose semplici, tipo $x=0$, $y=0$, $y=x$, e simili.

Esempio pratico

$$f(x; y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad D: \{(x; y) : x^2 + y^2 \neq 0\} \quad D: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$$

In D la funzione è continua. In $(0; 0)$, che è punto di accumulazione (in ogni suo intorno ci sono punti del dominio)

Calcoliamo il limite per $(0; 0)$: passiamo alle coordinate polari

$$\lim_{(x; y) \to (0; 0)} f(x; y) = \lim_{(x; y) \to (0; 0)} \frac{\rho^{\cancel{3}} \cos^2\theta \sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = \rho \cos^2\theta \sin\theta$$

$\cos^2\theta \sin\theta \leq 1$;

$0 \leq \rho\,|\cos^2\theta \sin\theta| \leq \rho$; per $(x; y) \Rightarrow (0; 0)$, $\rho \Rightarrow 0$. Per il teorema del confronto, allora, il limite converge a 0.

$\lim_{(x; y) \Rightarrow \infty} f(x; y)$: tagliando con alcune curve "importanti", sperando che diverga:

$y = 0 \quad \frac{0}{x^2} \neq 0 \qquad\qquad y = x \quad \frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{2} x = \infty$

$x = 0 \quad \frac{0}{y^2} = 0$

Diverge.

Nota bene: Peano scoprì che, non è assolutamente detto che, se le curve che proviamo per sezionare convergono allo stesso valore, allora anche il limite lo faccia. Possiamo studiare l'eventuale non-convergenza, ma non vedere con questo modo se un limite converga (all'infinito).

Terminiamo questa prima parte sulla continuità, parlando di due teoremi molto usati in Analisi I: il teorema di Weierstraß e il teorema di esistenza degli zeri.

1) Teorema di Weierstraß: una funzione continua in $I = [a; b]$ ammette massimo e minimo assoluti in I

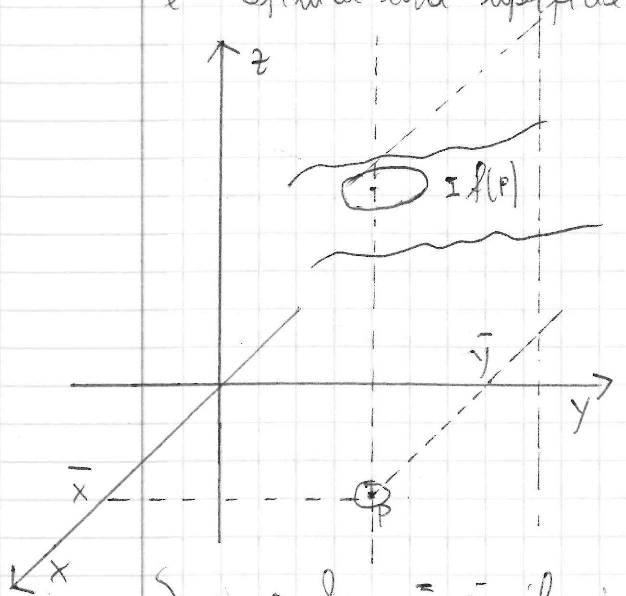
2) Teorema di esistenza degli zeri: data f continua in $I = [a; b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora vi è uno zero.

Quando ragioniamo con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i due teoremi, o, meglio, le loro ipotesi, cambiano radicalmente: in $\mathbb{R}$, le reali ipotesi dei teoremi sono praticamente uguali, ora vediamo le reali ipotesi:

- Teorema di Weierstraß: f deve essere continua in D, che deve essere un insieme compatto (chiuso e limitato). Allora f ammette in D massimo e minimo assoluti.
- Teorema di esistenza degli zeri: sia D un insieme connesso, ed f continua in D; $P_1, P_2 \in D$, $f(P_1) \cdot f(P_2) < 0$. Sia $\gamma(t)$ curva regolare a tratti tale che $[a;b] \to D$, $\gamma(a) = P_1$, $\gamma(b) = P_2$. Allora in D f ha uno zero, in P_1 un segno, in P_2 il segno opposto $\exists\, \bar{t} \in (a;b) : f[\gamma(t)] = 0$.

Derivazione di funzioni a più variabili.

Abbiamo un punto $P(\bar{x};\bar{y}) \in dom(f)$, ossia esiste un intorno in cui f è definita (punto non isolato). In un intorno di questo punto, è definita una superficie.



Abbiamo 2 variabili. Una cosa intelligente, potrebbe essere fissarne una, ossia lavorare con un piano $y = \bar{y}$.

Sappiamo che $y = \bar{y}$ è il piano parallelo all'asse z; cerchiamo ora l'intersezione del piano con la superficie nello spazio. Otteniamo una curva, ossia una funzione a 1 variabile. Studiamo il limite del rapporto incrementale, con $y = \bar{y}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h;\bar{y}) - f(\bar{x};\bar{y})}{h} = l.$$

Se l esiste ed è finito, si chiama "derivata parziale di $f(x;y)$ in $(\bar{x};\bar{y})$ rispetto alla variabile x"

Nomenclatura: $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y})$.

Stesso ragionamento con piani $x = \bar{x}$, e otteniamo

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(\bar{x};\bar{y}+k) - f(\bar{x};\bar{y})}{k} = (\text{se esiste finito}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})$$

Calcoliamo ora il vettore che contiene queste due derivate parziali:

$\nabla f(\bar{x};\bar{y}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y}) \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})\right)$ è detto "gradiente", o, in fisica, "NABLA".

In realtà, per calcolare una derivata parziale, possiamo anche solo usare le regole di derivazione di Analisi I, mantenendo costante l'altra variabile, ossia, trattandola come una costante

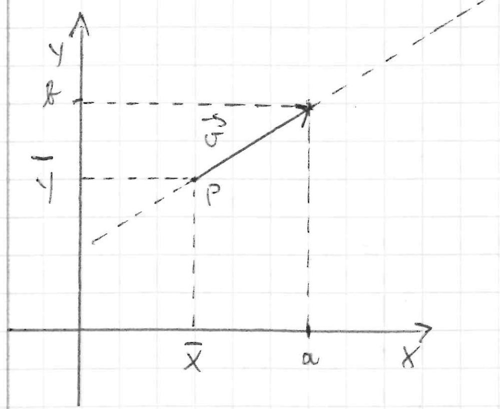
Esempio Pratico:

$f(x;y) = \ln(x^2+y+1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y+1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y+1}$

$\nabla f(x;y) = \left(\frac{2x}{x^2+y+1} \; ; \; \frac{1}{x^2+y+1}\right)$.

Sviluppiamo ulteriormente: finora, per fare le derivate parziali, abbiamo solo tagliato il piano (la superficie) con piani particolari. Ora, generalizziamo, vincolando il "piano di taglio" a una retta qualunque:



Dato un piano, dobbiamo trovare la retta per cui passa, in forma parametrica.

$\vec{v}=(a;b)$; $P(\bar{x};\bar{y})$

$$t \longrightarrow t\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar x\\ \bar y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at+\bar x\\ bt+\bar y\end{pmatrix}.$$

Se $t=0$, ci troviamo in P, e al variare di t sulla retta parallela a $\vec v$ e passante per P.

Facciamo il limite del rapporto incrementale, con incremento "t"

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar x+at;\bar y+bt)-f(\bar x;\bar y)}{t}$$

Se il limite esiste ed è finito, si chiama "derivata direzionale nella direzione del vettore $\vec v(a;b)$, o nel punto $P(\bar x;\bar y)$.

Le derivate parziali sono particolari derivate direzionali.
Esistono superfici le cui derivate direzionali in determinati punti non esistono, vedi il CONO: ESEMPIO

$f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$ in $P(0;0)$, $\vec v(a;b)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a^2t^2+b^2t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|\sqrt{a^2+b^2}}{t}=\nexists\ !!$$

Derivabilità e continuità

In Analisi I, nelle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, avevamo un teorema che, data la derivabilità, implicava la continuità.
In Analisi II, ora da $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, non esiste legame tra derivabilità e continuità: la prova sta nel teorema di Peano citato precedentemente: si può studiare la NON CONTINUITÀ, non la continuità.

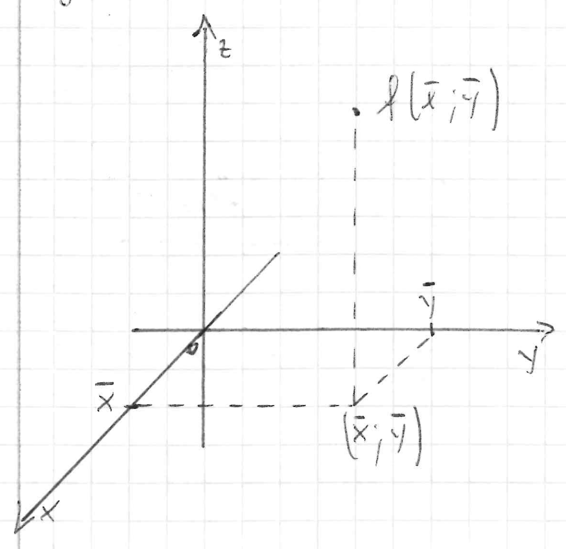
Il concetto di derivata direzionale è troppo debole per implicare continuità: in $\mathbb{R}^n$, si parlerà di differenziabilità come condizione sufficiente.

Differenziabilità

Sappiamo che in Analisi I, con funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, condizione sufficiente per la continuità è la derivabilità; quello che facevamo, era approssimare mediante Taylor una funzione a una retta, che risultava essere tangente al punto studiato. Riassumendo, a 1 variabile, si diceva che

"$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$".

In parole povere, una funzione sarebbe uguale alla funzione valutata in un certo punto, più una retta osculatrice di coefficiente angolare $f'(x_0)$, a meno di un certo resto "$o(x-x_0)$".
Cosa significa ciò: la funzione può essere approssimata dalla sua retta tangente con un errore di $o(x-x_0)$, ossia più che linearmente: se una funzione si avvicina a $f(x_0)$ più che linearmente, approssimiamo.
Generalizziamo il concetto di "derivabilità" in "differenziabilità":



Cerchiamo, a due variabili, sapendo che poi generalizzare è banale, l'equazione del generico piano che passa per il punto $f(\bar x;\bar y)$:

$$z=\lambda(x-\bar x)+\mu(y-\bar y)+f(\bar x;\bar y).$$

Diciamo che f è differenziabile in $(\bar{x};\bar{y})$ se:

$$f(x;y) = f(\bar{x};\bar{y}) + \lambda(x-\bar{x}) + \mu(y-\bar{y}) + o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\right)$$

In parole povere, se esiste un piano $z = \lambda(x-\bar{x}) + \mu(y-\bar{y}) + f(\bar{x};\bar{y})$ che approssimi la funzione a meno della distanza tra i due punti, calcolata mediante il teorema di Pitagora. L'errore in parole povere deve tendere a zero più velocemente della distanza tra i due punti.

Teorema: se f è differenziabile in $(\bar{x};\bar{y})$, allora è continua in $(\bar{x};\bar{y})$.

Dimostrazione: per ipotesi esiste il piano prima definito.

Dunque, $\lim_{(x;y)\to(\bar{x};\bar{y})} \left[\lambda(x-\bar{x}) + \mu(y-\bar{y}) + f(\bar{x};\bar{y}) + o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\right)\right] =$

$= f(\bar{x};\bar{y})$.

Ciò che non abbiamo ancora trovato, sono questi μ e λ per i quali il piano è tangente.

Supponiamo di spostarci lungo una retta determinata da un vettore $\vec{v}(a;b) \neq (0;0)$. In forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + at \\ y = \bar{y} + bt \end{cases}$$; Dunque,

$$f(\bar{x}+at;\bar{y}+bt) - f(\bar{x};\bar{y}) = \lambda at + \mu bt + o\left(\sqrt{a^2t^2+b^2t^2}\right) =$$

Passiamo al limite:

$$\lim_{t\to0} \frac{f(\bar{x}+at;\bar{y}+bt) - f(\bar{x};\bar{y})}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\lambda a\cancel{t} + \mu b\cancel{t} + o\left(t\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\cancel{t}}$$

La prima funzione è la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$, la seconda è uguale a "$\lambda a + \mu b$". Ciò si può intendere come prodotto scalare $(\lambda;\mu)\cdot(a;b)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x};\bar{y}) = (\lambda;\mu)\cdot(a;b)$$

$(a;b)$ è il vettore direzionale, $(\lambda;\mu)$ non si sa.

Se noi consideriamo $\vec{v} = (1;0)$ (vettore della base canonica),

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = (\lambda;\mu)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \lambda$$

La derivata parziale rispetto a x del vettore incognito è λ!

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = (\lambda;\mu)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mu$$

Stessa cosa per μ, derivata parziale rispetto a y!

Possiamo dunque dire che il piano tangente ha equazione

$$z = f(\bar{x};\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y})\cdot(x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})\cdot(y-\bar{y}).$$

Il vettore normale al piano è il vettore composto dal gradiente e da "-1":

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y})\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})\ ;\ -1\right)$$

Teorema fondamentale della differenziabilità: una funzione è differenziabile, se le derivate parziali esistono e sono continue.

Approfondiremo meglio ciò.

Esempio pratico 1

$f(x;y) = 1 - x^2 - y^2$ $\quad$ $P: (0;0)$.

$\nabla f(x;y) = (-2x;-2y)$; In 0, continue.

La funzione è differenziabile. Il piano tangente in $P(0;0)$ è:

$f(x;y) = f(0;0) + (-2\cdot0)(x-0) + (-2\cdot0)(x-0) = 1$

$z = 1$.

Esempio patico 2

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & x;y = (0;0) \end{cases}$$

La funzione è differenziabile?

Vediamo a occhio che le derivate parziali in 0 dovrebbero essere 0 e 0; $\nabla f(x;y) = (0;0)$.

Facciamo ora passare una retta tangente $y = mx$:

$$f(x; mx) = \frac{x^2 \cdot mx}{x^2 + x^2 m^2} = \frac{mx^3}{x^2(m^2+1)} = \frac{mx}{1+m^2}$$

Al variare di m, le soluzioni possono non stare sul piano previsto, $z=0$. La funzione non è differenziabile.

Siamo ora in grado di precisare il teorema della differenziabilità, dividendolo in tre "casi":

1) In tutte le direzioni devono esistere le derivate ~~direzionali~~ parziali
2) Le derivate direzionali devono tutte stare sullo stesso piano
3) Il piano deve approssimare la curva come $o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2}\right)$

Interpretazione geometrica di gradiente e precisazioni.

Avevamo ridefinito la derivata direzionale come

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x};\bar{y}) = \nabla f(\bar{x};\bar{y}) \cdot \vec{v}$$

Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ dipenderà da $\|\vec{v}\|$, usiamo dunque un versore.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x};\bar{y}) = \|\nabla f(\bar{x};\bar{y})\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

Per la definizione di prodotto scalare. Ma $\|\vec{v}\| = 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x};\bar{y}) = \|\nabla f(\bar{x};\bar{y})\| \cdot \cos\theta.$$

Sappiamo che $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Dunque, possiamo dire che

$$-\|\nabla f(\bar{x};\bar{y})\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x};\bar{y}) \leq \|\nabla f(\bar{x};\bar{y})\|.$$

Esaminiamo i vari casi:

1) Se $\theta = 0$, la derivata direzionale ha la direzione e il verso del gradiente: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x};\bar{y}) = \|\nabla f(\bar{x};\bar{y})\|$

2) Se $\theta = \pi$, la derivata direzionale ha la direzione ~~de~~ e il verso opposto al gradiente: $-\|\nabla f(\bar{x};\bar{y})\| = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x};\bar{y})$.

3) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\nabla f(\bar{x};\bar{y}) \perp \vec{v}$; $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x};\bar{y}) = (0;0)$

Il gradiente è un vettore che sta sul piano xy; a seconda della direzione del ~~vettore~~ rispetto al gradiente, la sua velocità calerà man mano che la ~~direzione~~ dalle due rette si avvicinerà a π (l'angolo formato tra le due direzioni), e aumenterà con il diminuire dell'angolo.

Il gradiente, dunque, rappresenta la direzione di massimo accrescimento.

Il vettore perpendicolare al gradiente rappresenterà una curva di livello, poiché siamo a crescita 0.

Nel verso del gradiente avremo accrescimento, nel verso opposto decremento.

Derivate totali

La derivata totale è una generalizzazione della derivata direzionale: se "scegliamo di muoverci su di una certa curva" invece che su di un'altra, possiamo farlo.

Se io mi sposto su una certa curva, sezionerò con questa la superficie; la "curva sezionatrice" sarà espressa in forma parametrica.

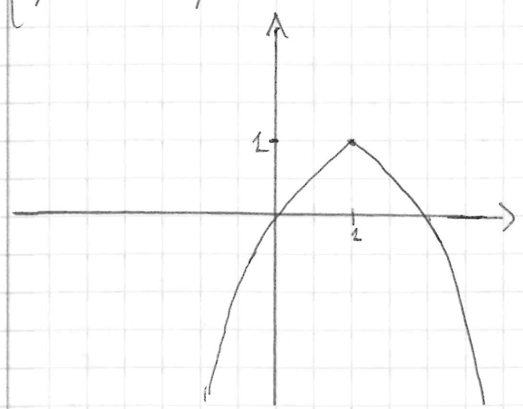
Avremo una cosa del tipo

$$t \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} \longrightarrow f[\gamma_1(t);\gamma_2(t)] \longrightarrow \frac{d}{dt}\left[f(\gamma_1(t);\gamma_2(t))\right], t \to 0.$$

Dato un certo $\bar{t}$, la curva sarà una cosa del tipo

$$\begin{cases}\bar{x} = \gamma_1(\bar{t})\\ \bar{y} = \gamma_2(\bar{t})\end{cases}$$

; La derivata totale sarà "$\nabla f(\bar{x};\bar{y}) \cdot \gamma'(\bar{t})$".



Esempio pratico: data la funzione $f(x;y) = x^2 + y^2$, vogliamo studiarne la derivata basandoci sulla curva qua tracciata.

Individuiamo e parametrizziamo tale curva. Essa è una parabola con vertice in $(1;1)$, rivolta verso il basso. Poiché abbiamo una traslazione verso l'alto di 1, e verso destra di 1, e che è verso il basso,

$y = 1 - (x-1)^2$; $y = -x^2 + 2x$.

Voglio far sì che in $t=0$, $\bar{x} = 1$; parametrizzo con "$t = x-1$".

A questo punto, sostituendo, $y = 1 - t^2$

$$\begin{cases}x = t+1\\ y = 1-t^2\end{cases}$$

Questa è l'equazione parametrica della parabola cercata.

Ora, usando la definizione prima vista, vediamo che

$$t \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix}t+1\\ 1-t^2\end{pmatrix} \xrightarrow{f} (t+1)^2 + (1-t^2)^2$$

Deriviamo ora ciò che abbiamo trovato rispetto al "t", ottenendo

$$\frac{d}{dt}\left((t+1)^2 + (1-t^2)^2\right) = 2(t+1) + 2(1-t^2)(-2t);$$ Facciamo tendere $t \to 0$, ottenendo così

$$\frac{d\, f[\gamma(t)]}{dt} = 2.$$

Ricominciamo da capo, usando la proprietà "$\nabla f(\bar{x};\bar{y}) \cdot \gamma'(t)$".

$$\nabla f(x;y) = \underbrace{(2x;2y)}_{=(2;2)} ; \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix}1\\ -2t\end{pmatrix} ; \quad \gamma'(0) = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\bar{x};\bar{y}) \cdot \gamma'(t) = (2;2) \cdot \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 2.$$

Derivate successive (particolare importanza alla derivata seconda).

Dato un intorno A, aperto, ed f differenziabile in A, abbiamo cioè $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y})$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})$, vogliamo derivare ulteriormente.

Abbiamo 4 possibilità:

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x};\bar{y})$
2. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x};\bar{y})$
3. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x};\bar{y})$
4. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x};\bar{y})$

1 e 4 sono dette "pure"; 2 e 3 sono dette "miste".

Dire che $f \in C^{(2)}(A)$ equivale a dire che $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dots$ esistono e sono continue in A.

N.B.: le derivate seconde miste, sono uguali tra loro.

Teorema di Schwartz: dato A intervallo aperto di $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x};\bar{y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x};\bar{y}).$$

Viene definita, per comodità e per ciò che useremo dopo, la Matrice Hessiana come

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

N.B.: Per il teorema di Schwartz, la matrice $H(f)$, $f \in C^{(2)}$, è simmetrica.

Massimi e minimi relativi

In Analisi I, abbiamo usato due metodi per determinare eventuali massimi e minimi di una funzione f: uno era studiare il segno di $f'(x)$, l'altro era considerare gli sviluppi di Taylor. Noi useremo una generalizzazione di quest'ultimo in $\mathbb{R}^n$.

Formula di Taylor

$$f(x;y) = f(\bar{x};\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x};\bar{y}) \cdot (x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x};\bar{y})(y-\bar{y}) + o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\right)$$

(al primo ordine).

$$f(x;y) = f(\bar{x};\bar{y}) + \nabla f(\bar{x};\bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix} + o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\right)$$

Al secondo ordine, avremo

$$f(x;y) = f(\bar{x};\bar{y}) + \nabla f(\bar{x};\bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-\bar{x}; y-\bar{y}) \cdot Hf(\bar{x};\bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix} + o\left((x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2\right)$$

ALLA FINE, FARÒ ESEMPIO PRATICO!!!

Da ciò siamo in grado di ricostruire alcune caratteristiche della funzione, come il valore in un punto, il gradiente, la Hessiana!

Classificazione dei punti stazionari

Abbiamo A insieme aperto, $P(\bar{x};\bar{y}) \in A$.

$P(\bar{x};\bar{y})$ è massimo relativo in A se:

$\exists I_d(\bar{x};\bar{y}) : f(x,y) \leq f(\bar{x};\bar{y}) \ \forall x,y \in I_d(\bar{x};\bar{y})$.

$P(\bar{x};\bar{y})$ è minimo relativo in A se:

$\exists I_d(\bar{x};\bar{y}) : f(x;y) \geq f(\bar{x};\bar{y}) \ \forall x,y \in I_d(\bar{x};\bar{y})$.

In Analisi I avevamo il teorema di Fermat che affermava che, se abbiamo $f \in C^{(1)}(A)$, e $P(\bar{x};\bar{y}) \in A$ è o massimo o minimo relativo, $f'(\bar{x};\bar{y}) = \nabla f(\bar{x};\bar{y}) = (0;0)$, ma in una variabile. Esso si adatta dunque perfettamente alla nostra situazione.

Se prima cercavamo i valori risolvendo un'equazione, ora risolviamo un sistema omogeneo.

Trovati i punti a gradiente nullo, studiamo la loro Hessiana (in quanto rappresentazione della derivata seconda).

In $f \in C^{(2)}$, la Hessiana avrà solo autovalori reali, in quanto simmetrica.

Troviamo gli autovalori della Matrice Hessiana, e studiamo i casi:

1) Se $\exists \lambda_i < 0, \lambda_j > 0$, la matrice non è definita, e il punto non è né massimo né minimo
2) Se sono tutti > 0, matrice definita positiva, ergo minimo relativo
3) Se sono tutti < 0, matrice definita negativa, ergo massimo
4) Se $\exists \lambda_i = 0$, e gli altri han lo stesso segno tra loro, non possiamo classificare con solo questa approssimazione.

Calcolo Integrale

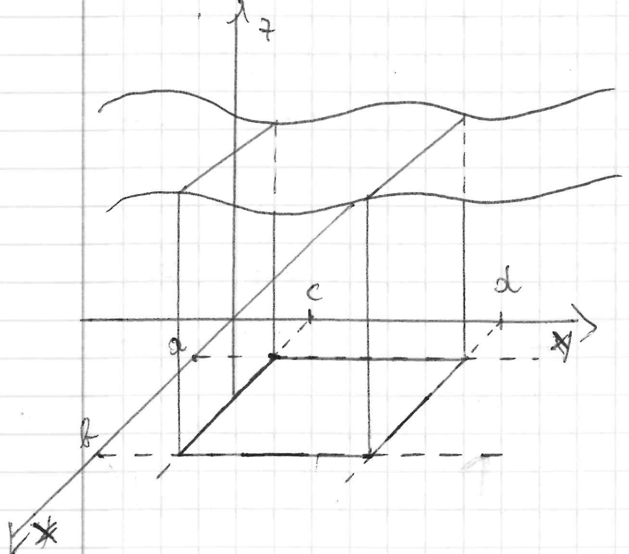
Introduciamo "l'integrale doppio": si dica "integrale doppio in dominio D della funzione $f(x;y)$":

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy$$

Una prima difficoltà nasce dal fatto che in Analisi I studiavamo integrali in un intervallo, cosa non più fattibile a tre variabili.
Per questo, consideremo il fatto che ci sono tre tipi di domini di integrazione:

1) D rettangolo
2) D verticalmente o orizzontalmente convesso
3) D misurabile

Studiamo il caso 1, ossia di una funzione definita su di un rettangolo, R, definito come $[a;b] \times [c;d]$

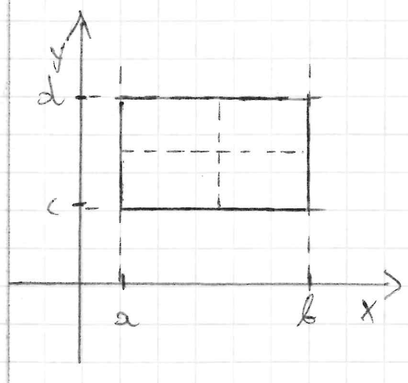


Il significato geometrico dell'integrale doppio sarà quello di un "volume con segno", ossia il volume compreso tra il dominio D (in questo caso, il rettangolo R), e la superficie.

Riprendiamo ed estendiamo dunque il concetto di integrale secondo Cauchy: dato dominio R compatto, per il teorema di Weierstraß una funzione su un insieme compatto ha massimo e minimo assoluti.
Possiamo dire che, detti minimo "m" e massimo "M", e volume di V "Vol(V)",

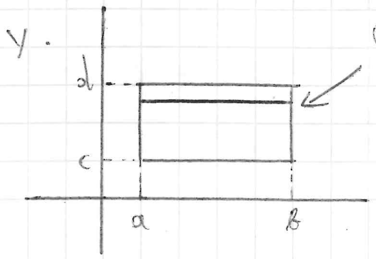
$$m(b-a)(d-c) \le Vol(V) \le M(b-a)(d-c)$$

Abbiamo un'approssimazione molto grossolana: cerchiamo di far di meglio;



Dividiamo il rettangolo in 4 rettangolini, dividendo per due i lati. Otteremo così una maggior precisione. Continuando così all'infinito, si finisce per ottenere l'integrale doppio, ossia il volume sotto la superficie!

N.B.: i bordi dei rettangoli, in quanto oggetti a 1 dimensione, non vanno a influire sul volume; è indifferente attribuirli a rettangolini diversi.
Questa strategia a livello calcolativo è intrattabile: studiare la successione della suddivisione, e calcolarne il limite all'infinito è una pazzia.
Cerchiamo dunque di ricondurci a un problema precedente: fissiamo un certo valore $\bar{x}$ (che sarà costante) su $[a;b]$, mentre lasciamo variare la y.



Questo segmento varierà di posizione, e quindi, di ordinata!

Consideriamo i valori della funzione corrispondenti in $f(x;y)$ ai punti. Sull'asse z avrò una curva da $f(\bar{x};c)$ a $f(\bar{x};d)$, con quindi $\bar{x} \in [a;b]$ e y variabile in $[c;d]$.

Possiamo integrare "parzialmente" la funzione in dy, da c a d

$$\int_c^d f(x;y)\,dy$$

(di fatto è una funzione a 1 variabile).

Ora, sposteremo la x, ragionando allo stesso modo, e l'integrale dipenderà solo da x!

Teorema: data $f(x;y)$ continua in R, anche $F(x)$ lo sarà.

Siamo arrivati a definire il cosiddetto "integrale iterato", ovvero

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x;y)\,dy \right) dx .$$

Questo è detto "integrale iterato per verticali": prima spostiamo le y, poi le x.

Si può fare la stessa cosa "per orizzontali": prima facciamo variare le x, poi le y, ottenendo

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x;y)\,dx \right) dy$$

"Integrale iterato per orizzontali".

Si dimostra che l'integrale doppio, in dominio rettangolare, è equivalentemente uguale all'integrale iterato calcolato per orizzontali o per verticali ("formula di riduzione per un integrale doppio su di un rettangolo").

Esempio pratico particolare:

Sia R un dominio rettangolare definito $[a;b]\times[c;d]$, e $f(x;y)$ funzione scomponibile per prodotto di $g(x)$ e $h(y)$.

Risolviamo integrando (ad esempio) per verticali:

$$\iint_R f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\cdot h(y)\,dy \right) dx$$

$g(x)$ è costante rispetto a dy, dunque posso portar fuori:

$$\int_a^b g(x)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy \right) dx =$$

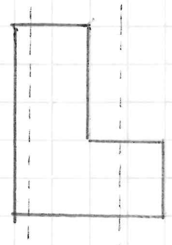
Una volta valutato, il secondo integrale è costante rispetto al primo, ergo, possiamo dire che

$$\iint_R f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy .$$

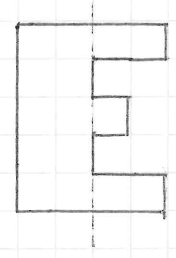
Estendiamo ora parlando di insiemi verticalmente o orizzontalmente convessi.

Dato $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato, si dice "verticalmente convesso" se l'intersezione di A con una generica retta verticale è o nulla o un segmento, eventualmente ridotto ad un punto (unico).

Esempi visivi:



Insieme verticalmente convesso, orizzontalmente convesso

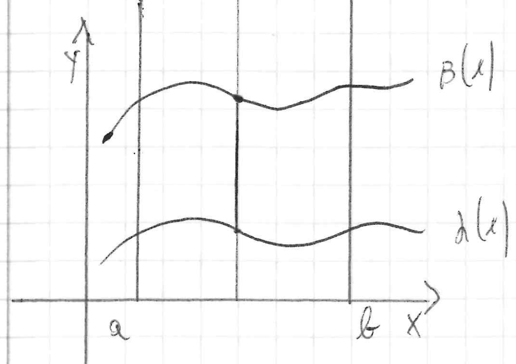


Insieme verticalmente non convesso, orizzontalmente convesso.

Dato $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato, si dice "orizzontalmente convesso" se l'intersezione di A con una generica retta orizzontale è o nulla o un segmento, eventualmente ridotto a punto.

Se prima eravamo limitati da segmenti, ora, il nostro dominio sarà limitato da curve. Analizziamo meglio:

Date $\alpha(x), \beta(x) \in C^{(0)}$ $\forall x \in [a;b]$, $\alpha(x) \leq \beta(x)$ $\forall x \in [a;b]$, vediamo che:

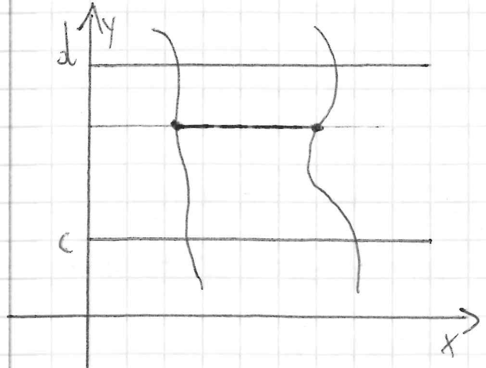


$\alpha(x)$ è un "estremo inferiore", $\beta(x)$ un "estremo superiore".
Consideriamo ora $f(x;y)$: al variare di x, studieremo $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x;y)\,dy$.

Si dimostra che, se α e β sono continue come da ipotesi, $F(x)$ sarà ancora continua; detto C il nostro insieme, si dimostra che

$$\iint_C f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x;y)\,dy\,dx$$ (Regola di riduzione per verticali).

Studiamo ora la stessa cosa, ma con funzioni di x in y, che chiameremo $\gamma(y)$ e $\delta(y)$, tali che $\gamma(y), \delta(y) \in C^{(0)}$ $\forall y \in [c;d]$, $\gamma(y) \leq \delta(y)$ $\forall y \in [c;d]$.



Vale la stessa cosa della prima, ma "ruotato di $\frac{\pi}{2}$": vediamo (si dimostra) che, detto C il nostro insieme,

$$\iint_C f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^c \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x;y)\,dx\,dy$$ (regola di riduzione per orizzontali)

Studiamo ora alcune applicazioni fisiche legate a ciò che abbiamo appena studiato; ci riferiamo a lamine piane:

- Massa totale di un oggetto: definita la densità come $\frac{m}{V}$, ora $\frac{m(x)}{\pi r^2}$, possiamo calcolare la massa totale di un oggetto mediante la formula

$$M = \iint_C M(x;y)\,dx\,dy \qquad M(x;y) = \text{densità dell'oggetto.}$$

- Centro di massa CM (baricentro) di un oggetto: data una lamina piana, le coordinate del baricentro di un oggetto si determinano mediante le relazioni

$$x_G = \frac{\iint x \cdot M(x;y)\,dx\,dy}{\iint M(x;y)\,dx\,dy} \qquad y_G = \frac{\iint_C y \cdot M(x;y)\,dx\,dy}{\iint_C M(x;y)\,dx\,dy}$$

- Momento di inerzia:

$$I_z = \iint r^2(x;y) \cdot M(x;y)\,dx\,dy$$, con $r(x;y)$ funzione del raggio del generico $x;y$ rispetto all'asse di rotazione.

Cambio di Variabili

Molto spesso, nell'integrazione a più variabili, più che l'integrale di per sé, può risultare difficile studiare il dominio di integrazione.
Lavorare in coordinate cartesiane può essere una cosa scomoda dunque. Pensando ad esempio a coordinate polari, un dominio circolare diviene quadrato, e molto più facile da studiare.

La trasformazione che vedremo sarà una cosa del tipo:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \end{cases}$$

Proprietà di queste trasformazioni:

1) La trasformazione del piano cartesiano in polari è racchiusa interamente dalla retta con $\vartheta = 0$, e a quota 2π. Non è possibile convertire tutto il piano polare in cartesiano, perché dovremmo "rappresentarlo infinite volte".

2) Data l'origine, $\rho = 0$, ma ϑ è sconosciuto. Non è possibile dare una rappresentazione univoca di $P(x, y) = O(0;0)$.

Osserviamo che, conosciamo bene gli effetti di un dx e di un dy.

Invece,
- Un $d\rho$ porta a un incremento del segmento ρ senza variare la pendenza
- Un $d\vartheta$ porta a una variazione dell'angolo.

dx implica dy, $d\rho$ NON IMPLICA $d\vartheta$.

Cambiamenti di variabili in integrali doppi

Partiamo da un sistema di coordinate (x, y), e vogliamo arrivare a generiche nuove coordinate (u, v), mediante un cambio di variabili.

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$ Ho x e y funzioni di u e di v.

Introduciamo una matrice, detta Jacobiana, sulle cui righe metteremo i gradienti delle trasformazioni:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Inoltre, definiamo "Jacobiano della trasformazione $|J|$" il $|\det(J)|$.

La trasformazione sarà del tipo

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f\left[x(u,v);\, y(u,v)\right] \cdot |J|\,du\,dv$$

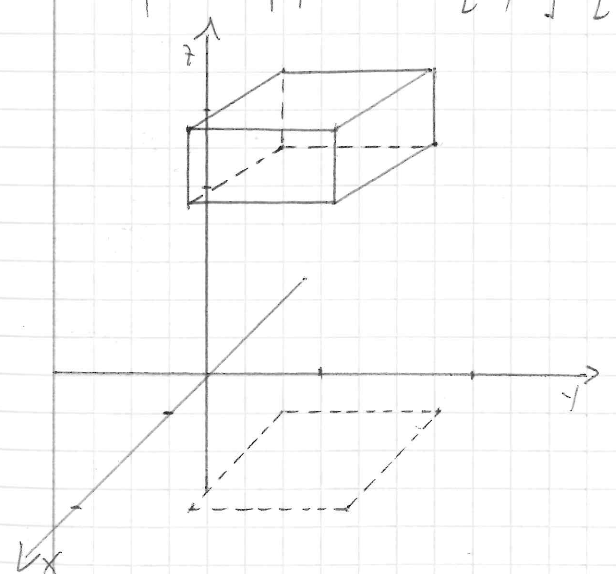
Per esempio, in coordinate polari, $|J| = \rho$.

Integrali tripli

$$\iiint_D f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$$

Cerchiamo come sempre, per risolvere un problema di questo tipo, di ricondurci a un problema già risolto.

Iniziamo con l'estendere a 3 variabili l'integrazione mediante domini a parallelepipedo: $[a;b] \times [c;d] \times [l;m]$



Definiamo l'integrale triplo come l'iterazione di un integrale doppio e uno semplice.

Per questo caso potremo semplicemente iterare un integrale triplo, visto che abbiamo gli spigoli limitati.

Per i casi più generali, esistono due sostanziali scuole di pensiero: integrazione "per fili" e integrazione "per strati".

- Integrazione per fili: immaginiamo di avere un volume, e di poterlo attraversare con "fili" paralleli all'asse z. In un primo tempo, integreremo in "dz", ossia faremo solo variare la quota. In un secondo momento, integreremo la superficie in "xy", facendo, in poche parole, prima in dz e poi in "dx dy"

$$\iint_D \left(\int_l^m f(x;y;z)\,dz\right) dx\,dy$$

- Integrazione per strati: abbiamo il nostro volume, e iniziamo col "tagliarlo con piani paralleli a xy" (perpendicolari all'asse z). In un primo tempo, integreremo la sezione S_z dai "dx dy", e poi in "dz", che varierà da una z_{MIN} a una z_{MAX}.

A seconda del dominio di integrazione, ci converrà usare l'una o l'altra tecnica.
Notiamo che vale il teorema di scomposizione di integrali di funzioni del tipo $f(x;y;z) = g(x) \cdot h(y) \cdot i(z)$, come negli integrali doppi.

Simmetrie nel piano, simmetrie nello spazio

Può risultare molto utile ricercare, nel piano o nello spazio di integrazione, delle simmetrie che ci permettano, con la linearità dell'integrale, di semplificare dei calcoli.
Diamo ora per $\mathbb{R}^2$ alcune definizioni importanti, che poi estenderemo:

- $S_x : (x;y) \to (x;-y)$: Simmetria rispetto asse x
- $S_y : (x;y) \to (-x;y)$: Simmetria rispetto asse y
- $S_0 : (x;y) \to (-x;-y)$: Simmetria rispetto origine
- $S_{b_1} : (x;y) \to (y;x)$: Simmetria rispetto $y=x$
- $S_{b_2} : (x;y) \to (-y;-x)$: Simmetria rispetto $y=-x$

- Un insieme D si dice "invariante" rispetto a una simmetria S se per ogni punto $(x;y) \in D$, $S(x;y) \in D$.

- Una funzione $f(x;y)$ definita in D si dice pari rispetto a S se $f[S(x;y)] = f(x;y)$; si dice dispari rispetto a S se $f[S(x;y)] = -f(x;y)$

Corollari:

1) Se D è invariante, ed f dispari, rispetto a simmetria S, abbiamo che $\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = 0$

2) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, f pari rispetto a simmetria S, e D_1, D_2 sottoinsiemi del piano senza punti interni in comune, tali che:
$D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = S(D_1)$, allora

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy$$

Estendendo a $\mathbb{R}^3$, abbiamo come simmetrie

- $S_{x,y} : (x;y;z) \to (x;y;-z)$: Simmetria rispetto piano xy
- $S_{y,z} : (x;y;z) \to (-x;y;z)$: Simmetria rispetto piano yz
- $S_{z,x} : (x;y;z) \to (x;-y;z)$: Simmetria rispetto piano xz
- $S_0 : (x;y;z) \to (-x;-y;-z)$: Simmetria rispetto origine

Valgono i corollari illustrati per $\mathbb{R}^2$.

Cambiamenti di sistemi di riferimento in $\mathbb{R}^3$

Coordinate cilindriche

Sono la naturale estensione delle coordinate polari: avremo una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La quota rimane sempre definita come tale.

Calcolando la matrice Jacobiana,

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad |J| = \rho .$$

In parole povere, passiamo in polari solo la base, facilitando molto i conti, per esempio in solidi di rotazione, ottenuti dalla rotazione di una superficie attorno a un asse, spesso z.

Le coordinate cilindriche sono $(\rho; \theta; z)$. Facciamone variare 2 per volta e manteniamone una costante:

- ρ costante, z e θ variabili: avremo un cilindro: cella che cresce di quota e pendenza, quindi piani paralleli a xy.
- z costante, ρ e θ variabili: piano parallelo a xy di quota z.
- θ costante, z e ρ variabili, semipiano passante per l'asse z, o meglio, incernierato ad esso.

Abbiamo così introdotto le coordinate cilindriche per lo studio di solidi di rotazione;

Coordinate cilindriche - Teorema di Guldino

Nel 1500 circa, un matematico olandese, Guldino, mediante osservazioni formulò tale teorema: dimostriamo prima in modo analitico.

Vogliamo calcolare l'integrale del solido di rotazione V, triplo.

$$\iiint_V dx\,dy\,dz \quad ; \text{ passo in polari, quindi } \iiint_{V'} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz ;$$

Faccio tale integrale per strati, facendo però variare prima ρ e z, solo in seguito θ.

$$\int_0^{2\pi} \left(\iint_{S_\theta} \rho\, d\rho\, dz \right) d\theta ;$$

S_θ è la sezione del nostro solido con angolazione θ.

Dal momento che il solido è di rotazione, indipendentemente da θ, le sezioni saranno sempre uguali. Rendiamo la sezione del piano cartesiano yz.

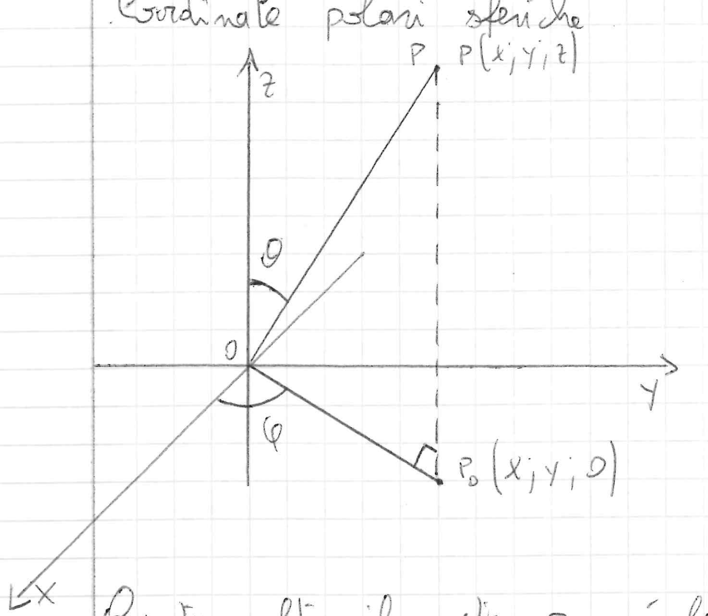
$$\cancel{\int_0^{2\pi} \left(\iint \rho\, d\rho\, dz \right) d\theta} = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S \rho\, d\rho\, dz = 2\pi \cdot \iint y\, dy\, dz .$$

Moltiplichiamo per $\dfrac{\iint_S dy\, dz}{\iint_S dy\, dz}$:

$$2\pi \cdot \underbrace{\frac{\iint_S y\, dy\, dz}{\iint_S dy\, dz}}_{y_G \text{ (BARICENTRO)}} \cdot \underbrace{\iint dy\, dz}_{\text{Area di } S}$$

$$Vol(V) = 2\pi\, y_G \cdot Area(S)$$

Coordinate polari sferiche



Consideriamo nello spazio il punto $P(x;y;z)$, e la sua proiezione nel piano xy $P_0(x;y;0)$

Questa volta il nostro ρ sarà la distanza di P dall'origine, ma, usiamo 2 coordinate angolari: φ è l'angolo che il segmento $\overline{OP_0}$ forma con l'asse delle x; ϑ è l'angolo che il segmento $\overline{OP}$ forma con l'asse z.

$$\begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi & 0 < \rho < +\infty \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = \rho \cos\vartheta & 0 \le \vartheta \le \pi \end{cases}$$

- Con ρ costante abbiamo una sfera
- Con φ costante abbiamo un semipiano
- Con ϑ costante un cono con vertice in O.

$|J| = \rho^2 \sin\vartheta$

$$\iiint_V f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(\rho\sin\vartheta\cos\varphi;\ \rho\sin\vartheta\sin\varphi;\ \rho\cos\vartheta)\cdot\rho^2\sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi$$

Vediamo ora, con questi mezzi matematici, qualche applicazione nuova.

Integrali curvilinei - estensione

Abbiamo f definita in un insieme, e, dentro di esso, il sostegno di una curva.

S'intendiamo fare l'integrale curvilineo della curva sul dominio che studiamo, per studiarne alcune caratteristiche. Tale integrale si indica con le seguenti nomenclature:

$$\int_\gamma f(x;y;z) \quad , \text{oppure} \quad \int_\gamma f(x;y;z)\,ds$$

Innanzitutto, si parametrizza la curva, in tal modo:

$$f \longrightarrow \gamma(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = (x;y;z)$$

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f[\gamma(t)]\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt \quad , \|\gamma'(t)\| =$$ Modulo della velocità della curva, modulo ovvia norma euclidea.

Proprietà:

1) Cambiando la parametrizzazione con una equivalente, si dimostra che l'integrale non cambia

2) Cambiando il verso di percorrenza della curva, l'integrale non cambia

Lo scopo fondamentale di questi integrali è trovare la "misura di un insieme".

Un caso particolare interessante è $f(x;y;z) = 1$. In tal caso,

$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = l_\gamma$ (lunghezza della curva)

Campi vettoriali

Un campo vettoriale è definito come una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, in cui il numero di variabili è uguale al numero di componenti.
Ad esempio vettoriale è il campo elettrico, il campo magnetico, il campo di velocità di un fluido.

$$\vec{F} = [f_1(x;y;z);\ f_2(x;y;z);\ f_3(x;y;z)]$$

Il gradiente è un esempio di campo vettoriale: ha n variabili e n componenti.
Sui campi vettoriali abbiamo due fondamentali operatori differenziali:

1) Divergenza: sommatoria delle derivate parziali delle i-esime componenti nelle i-esime variabili.

Data $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \cdot (f_1; f_2; f_3)$$

(È un prodotto scalare tra due componenti: il primo è l'"operatore nabla", il secondo il vettore componenti)

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot F$$

2) Rotore: il rotore si definisce come prodotto vettoriale dell'operatore nabla e delle componenti:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{x_1} & \frac{\partial}{x_2} & \frac{\partial}{x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \nabla \times F$$

Facciamo alcune osservazioni:

- Partendo da uno scalare facendone il gradiente ottengo un vettore
- Da campo $\vec{F}$ posso ottenere uno scalare mediante la divergenza
- Da un vettore ne posso "ottenere un altro" mediante il rotore

Vediamo ora le operazioni "miste" posso fare:

	∇f	$\nabla \cdot F$	$\nabla \times F$
GRADIENTE		$\nabla(\nabla \cdot F)$	
DIVERGENZA	$\nabla \cdot (\nabla f)$		$\nabla \cdot (\nabla \times F)$
ROTORE	$\nabla \times (\nabla f)$		$\nabla \times (\nabla \times F)$

Tra le operazioni "sensate" c'è la "divergenza del gradiente":

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \mathrm{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Ossia la somma delle derivate parziali seconde pure, detto anche "Laplaciano di f" (Δf)
Le "funzioni armoniche" sono quelle il cui laplaciano è nullo.

Altra funzione interessante è il rotore del gradiente: se la funzione è sufficientemente regolare, $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(F)) = 0$. Se $f \in C^{(2)}$ avremo avere tale operatore nullo.

Diamo un'interpretazione della divergenza: dato un campo $\vec{v}$, $\mathrm{div}(\vec{v})$ è lo studio dello squilibrio tra "materia in ingresso" e "materia in uscita" in un certo istante t (interpretazione fisica)
Intuitivamente, si studia in un certo t se lì stia "nascendo" del campo o se "se ne stia perdendo".

Il rotore intuitivamente ci indica se, in un campo, si formano dei "vortici", delle "rotazioni".

Se $\mathrm{div}(\vec{F}) = 0$, il campo si dice "solenoidale"

Se $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, il campo si dice "irrotazionale"

N.B.: $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ sempre; si dice che "il gradiente è un campo sempre irrotazionale".

Serie numeriche

I prerequisiti per lo studio delle serie numeriche sono sostanzialmente gli integrali impropri, e i confronti tra funzioni.

In effetti, le serie numeriche rappresentano "sul discreto" ciò che gli integrali impropri rappresentano "sul continuo": il nostro problema da risolvere sarà, dunque, sommare infiniti termini.

Il problema venne intuito da Archimede, nel 250 a.C. Con il calcolo differenziale abbiamo avuto grandi progressi in questo campo.

Come "campo", o meglio "insieme di numeri", useremo i naturali $\mathbb{N}$ (che non sono un campo in effetti).

Sappiamo dall'Analisi I che una "collezione di infiniti numeri" si chiama "successione".

$n \longrightarrow a_n$ [si dicono "termini della serie"]

Ciò che intendiamo fare, dunque, è dare un significato all'espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\infty$$

La "serie" è la somma che aumenta in continuazione il numero di addendi. Ciò che conta non sono i singoli addendi, ma le somme "fino a un certo addendo".

$s_0 = a_0$; $s_1 = a_0 + a_1$; $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$; "$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n$".

$s_0, s_1, s_2 \dots s_n$ si definiscono "successione delle somme parziali" o "successione delle ridotte".

Partendo dalla successione a_n, abbiamo creato questa s_n, ossia, come già scritto, "il limite delle somme parziali all'infinito": ciò è la serie.

s_n (inteso come "serie"); $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Come possiamo intuire, è necessario "andare per gradi": gli addendi vanno sommati seguendo l'ordine.

Diamo ora una definizione formale di serie: data la successione dei termini a_n, definiamo la successione delle somme parziali s_n, e calcoliamo il limite di tale successione, che può avere tre tipi di comportamento:

$\lim_{n\to\infty} s_n$:
- $s \in \mathbb{R}$ (esiste e finito); $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$: SERIE CONVERGENTE: la somma della serie è "s".
- $\pm\infty$ (esiste, infinito); $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$: SERIE DIVERGENTE
- $\nexists$ "$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$": "SERIE OSCILLANTE" o "SERIE INDETERMINATA".

Esempi pratici

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (Serie di Mengoli)

Il matematico la propose proprio mentre si cercava di dare un senso al concetto di serie. Cerchiamo di studiarne il comportamento, e costruiamo le somme parziali:

$a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$; $a_2 = \frac{1}{2\cdot 3}$; $a_3 = \frac{1}{3\cdot 4}$ ....; $s_1 = \frac{1}{2}$; $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ ...

Notiamo però che, $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

e così via.

Possiamo dunque sviluppare così le somme parziali:

$s_1 = 1 - \frac{1}{2}$; $s_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$; $s_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$;

Il primo termine avrà sempre un termine positivo dopo, che lo eliderà. Possiamo riscrivere la serie di Mengoli come

$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; $\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$;

La serie di Mengoli converge, a $s = 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

Costruiamo le somme parziali, in modo più rapido, dopo aver fatto un piccolo accorgimento: $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$s_n = \log(2) + \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \dots$

$s_1 = \log(2)$; $s_2 = \log(2) + \log\left(\frac{3}{2}\right) = \cancel{\log(2)} + \log(3) - \cancel{\log(2)}$

$s_2 = \log(3) + \log\left(\frac{4}{3}\right) = \cancel{\log(3)} + \log(4) - \cancel{\log(3)}$

$s_n = \log(n+1)$; $\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty$; la serie è divergente.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \dots$

$s_0 = 1$; $s_1 = 1 - 1 = 0$; $s_2 = 0 + 1 = 1$; .... $s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

La serie è oscillante.

Dopo aver studiato questi esempi, facciamo una breve introduzione su una successione molto usata, per poi studiare, come questo esempio, la serie ad essa legata: si parla della successione geometrica.

Fissato un valore $a \in \mathbb{R}$, la successione sarà identificata da $n \to a^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Questa successione ha una proprietà importante: dato un certo x_n,

$x_n = a^n$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$. [I termini che si susseguono han rapporto costante]

Volendo darne una definizione ricorsiva,

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_{n-1} \cdot a \end{cases}$$

Ora studiamo, al variare di a, il limite della successione geometrica.

$$\lim_{n \to \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & |a| < 1 \end{cases}$$

[N.B: dato $a \leq -1$, il limite non esiste]

Studiamo dunque ora la serie geometrica

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$; [a è detta "ragione della serie"]

Vediamo che: $\begin{cases} s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n \\ a\, s_n = a + a^2 + \dots + a^{n+1} \end{cases}$

Posso dunque sottrarre:

$(1-a)\, s_n = 1 - a^{n+1}$, $a \neq 1$

$$s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} ; \quad \lim_{n \to \infty} s_n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ \nexists & a = 1 \\ \frac{1}{1-a} & -1 < a < 1 \end{cases}$$

Se $a \leq -1$, la serie geometrica oscilla.

Partendo dalla serie geometrica, andando per confronti con altre serie, ne potremo stabilire, di queste ultime, la convergenza (o meno).

La serie geometrica converge se e solo se $-1 < a < 1$.

Vediamo una cosa:

INTEGRALI IMPROPRI	SERIE NUMERICHE
$\int_a^m f(x)\,dx$ $\boxed{1}$	$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $\boxed{1}$
$m \to \infty$ $\boxed{2}$	$n \to \infty$ $\boxed{2}$
$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $\boxed{3}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\boxed{3}$

Il passaggio che rende difficile lo studio di una serie numerica è il $\boxed{1}$: trovare una forma esplicita delle somme parziali è un problema enorme. Per questo è nata la necessità di introdurre nuovi matematici, e strumenti teorici che ci semplifichino i conti. Abbiamo in qualche modo "sistemato" la serie geometrica, ora possiamo a introdurre dei nuovi strumenti.
La serie è una sommatoria. Se all'infinito i termini tendono "violentemente" a 0, allora la serie convergerà. Per essere più formali: se sommo infinite costanti il limite della somma divergerà.
Introduciamo da qui il nostro primo strumento.
Condizione necessaria di convergenza:
Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, s finito, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. [N.B: Il viceversa non è assolutamente valido!]
Dimostrazione: consideriamo la somma parziale n-esima di una certa serie:
$s_n = s_{n-1} + a_n$; allora, $a_n = s_n - s_{n-1}$.
Per ipotesi del teorema, la somma parziale converge.
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$
Definizione: si dice resto n-esimo r_n di una serie la quantità
$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ [la "serie dopo essere arrivati ad a_n"]

$$\underbrace{a_0+a_1+a_2+\dots+a_n}+\underbrace{a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\dots+a_\infty}$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Dimostrazione: $s = s_n + r_n$; $r_n = s - s_n$. Per ipotesi, s_n converge per $n\to\infty$.
$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = s - s = 0.$

Osservazioni:
1) Di per sé la condizione di convergenza non è molto interessante; il suo controinominale lo è molto di più: se è valido un teorema, lo è anche il controinominale, dunque,
Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie di sicuro NON CONVERGE.

2) Come già detto, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, non è detto che la serie associata converga.
Studieremo ora un altro esempio "classico": la serie armonica.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; vogliamo dimostrare che questa serie diverge.
Come possiamo dimostrarlo: possiamo dire che, se le somme parziali sono maggiori di un numero grande a piacere, allora la serie diverge. Studiamo le somme parziali della serie:
$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
Vogliamo "raggiungere" 1: vediamo che a s_2 lo abbiamo già superato.
Vogliamo raggiungere 2. A s_2 aggiungiamo $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, e siamo a più di 2.
Per qualunque N che noi prenderemo, riusciremo sempre a maggiorare di, per esempio, $\frac{1}{2}$. Prendiamo le somme parziali n-esime, con $n = 2^m$, $m \geq 1$. Le somme parziali saranno sempre maggiori di un certo numero.
$s_0 = 1$; $s_1 = 1 + \frac{1}{2}$; $s_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ (>2); $s_4 > 3$; $s_n \to +\infty$.
Possiamo dire che
$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$: la serie armonica è divergente.

Abbiamo così studiato una nuova serie, alla quale potremo ricondurci mediante confronti.

Operazioni algebriche tra serie.

L'insieme delle serie convergenti è uno spazio vettoriale. Valgono dunque le proprietà di linearità:

1) Data serie $s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

2) Date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, la prima uguale a s, la seconda a t, vale la proprietà: $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \cdot s + \mu \cdot t$

La serie è interpretabile come un limite. Valgono i teoremi sull'algebra dei limiti; dati s e t finiti, associati rispettivamente a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$	$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)$
s	t	$s+t$
s	$+\infty$	$+\infty$
s	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	t	$+\infty$
$-\infty$	t	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FORMA INDETERMINATA
$-\infty$	$+\infty$	FORMA INDETERMINATA

Esempio pratico:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-2)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n$$ [Abbiamo la somma di due somme in serie geometriche]

Se volessimo calcolare il valore della serie: $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} + \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} =$ [VALORE DELLA SERIE COME SOMMA DI DUE GEOMETRICHE]

In quanto a mezzi su cui fondare la base delle serie, la tavola della linearità tra serie, ci danno, insieme alla condizione necessaria, quasi tutto.

Aggiungiamo ancora alcune osservazioni: se togliamo, da una serie, finiti termini, (ossia n termini con n rigorosamente finito), la convergenza della serie non cambia. Ovviamente il valore finale della serie cambierà, ma lo stato di convergenza/divergenza no.

Iniziamo ora a studiare, più nei dettagli, alcuni particolari tipi di serie.

Serie a termini di segno costante

Per iniziare a studiarle, partiremo dalle serie a termini positivi, o al più uguali a 0.

Teorema: dati $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, la successione delle ridotte, s_n, è monotona crescente. Essa potrà andare all'infinito, o convergere a un valore costante, ma comunque, finito o infinito, il limite esisterà.

Di conseguenza, una serie a termini positivi può essere solo convergente o divergente. Possiamo, per queste serie, introdurre dei fondamentali criteri di convergenza.

Criterio del confronto: date due serie a termini positivi, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $a_n, b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tali per cui $a_n \leq b_n \ \forall n \geq 0$, allora

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

In parole povere, data una serie, possiamo verificarne la convergenza, maggiorandola o minorandola adeguatamente con una serie che già conosciamo, come la geometrica o l'armonica, o Mengoli

Esempio pratico, che ci tornerà utile: serie armonica generalizzata.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad , \alpha \geq 0.$$

Sappiamo che con $\alpha = 1$, la serie è divergente. Inoltre, se provassimo a maggiorare la serie con $\alpha = 2$, con Mengoli, vedremmo che convergerebbe, in quanto $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Ma tra $1 < \alpha < 2$?

Consideriamo $\alpha = \frac{3}{2}$; avremmo un confronto del tipo $n \leq \sqrt{n^3} \leq n^2$; il criterio del confronto non ha le ipotesi verificate. Dobbiamo estendere il nostro criterio:

Criterio del confronto asintotico: calcoliamo un limite: date come ipotesi due serie legate alle successioni a_n, b_n, a termini positivi, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$; $a_n, b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$; se esiste $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, dove λ può essere 0, K, o $+\infty$, allora abbiamo che:

1) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, e b_n converge, allora anche a_n converge. [LE RELATIVE SERIE]

2) Se $\lambda > 0$, o $\lambda \to +\infty$, quindi è non nullo, e b_n diverge, allora anche a_n diverge [SEMPRE, LE RELATIVE SERIE]

Dunque, se $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\lambda > 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

Questo criterio è utile perché spesso calcolare un limite risulta più facile di risolvere una disequazione.

Esempio pratico: supponiamo che $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$, ciò significa che $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0, \quad 2 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 4.$

Moltiplichiamo tutto per b_n: $\quad 2b_n \leq a_n \leq 4b_n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} 2b_n$ lo farà, e dunque anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Se invece la serie di a_n diverge, lo farà anche b_n, ragionando con $\sum_{n=0}^{\infty} 4b_n$.

Se mi procuro una serie tale per cui il limite del rapporto venga non nullo, allora potrò usare il criterio del confronto asintotico.

La serie armonica, per il confronto asintotico, è la cosa che va più usata. Tuttavia, abbiamo ancora una limitazione su di essa: tra $1 < \alpha < 2$, non sappiamo come si comporti. Introduciamo un nuovo criterio, che ad esempio potrà facilmente risolverci questo problema.

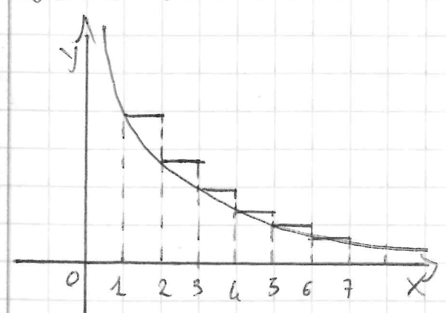
Criterio dell'integrale (o di Maclaurin)

Abbiamo una funzione f definita da 1 a $+\infty$, positiva, decrescente, continua, tale per cui $f(n) \equiv a_n$.

La cosa molto interessante è che, date queste ipotesi,

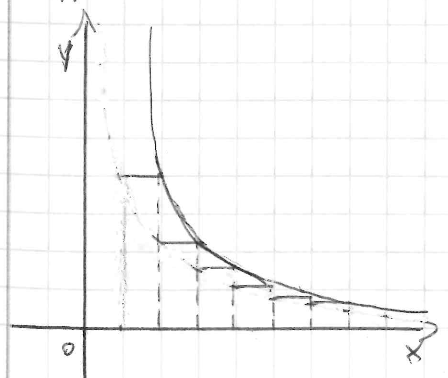
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{hanno lo stesso comportamento.}$$

Consideriamo dunque per ora l'intervallo da 1 in poi. Calcoliamo f nei valori interi (in quanto $n \in \mathbb{N}$), e facciamo la serie dei valori ottenuti.



Nell'intervallo $[1;2]$ avremo $f(1)$; in $[2;3]$ avremo $f(2)$, e così via. La funzione a scala starà dunque sempre sopra f.

Il campionamento di un segnale si basa proprio su ciò: discretizzare un segnale, o la sua funzione "continua". L'area dei rettangoli, e dunque la rappresentazione della serie, è data da $1 \cdot f(n)$.



Consideriamo lo stesso grafico, ma con la "scala" partente da 2, verso sinistra. Avremo solo gradini sotto la curva.

Facciamo alcune osservazioni.

L'area del primo disegno sarebbe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; quella del secondo, sarebbe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Abbiamo già visto qualcosa di simile parlando dell'integrale secondo Cauchy. Possiamo studiare le due serie in base ad alcune osservazioni: l'area sottesa alla curva sarà maggiore della seconda serie, ma minore della prima.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

In base ad osservazioni precedenti, se togliamo un numero finito di termini, la convergenza non cambia. Dunque, se l'integrale indefinito associato alla "funzione del termine generale" converge, convergerà pure la serie a sinistra, ma quindi pure quella a destra.

Con ciò possiamo dire che, se $1 < \alpha < 2$, nella serie armonica generalizzata, allora essa convergerà.

Estenderemo ulteriormente il discorso in seguito.

Finora abbiamo parlato solo di un'ipotetica convergenza o meno di una serie; non parleremo mai di calcolare il suo valore, in quanto esso è un lavoro da fare in linea di massima in modo numerico. Vogliamo però, numericamente, avere una stima dell'errore che commettiamo calcolando la serie. Per far ciò, riprendiamo la già vista definizione di resto. Stimando il resto, stimiamo l'errore nel calcolare la serie.

$r_n \le \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$. [Avremo AL PIÙ tale errore].

Esempio pratico: prendiamo una serie armonica con $\alpha = 5$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$; essa è convergente. Voglio stimare l'errore, dopo la somma centesima.

$$r_n \le \int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^5}\,dx = \left[-\frac{1}{4x^4}\right]_{100}^{+\infty} = \frac{1}{4}\cdot 10^{-8} = 2,5 \cdot 10^{-9} \quad \left(\text{massimo errore di calcolo}\right)$$

Facciamo alcune precisazioni sul confronto asintotico: esso si basa sul calcolo di un limite:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$. a_n è il termine noto della nostra serie data, mentre b_n dobbiamo sceglierla noi, come già detto di solito armonica. La difficoltà sta nel cercare un b_n adeguato. Per verificare se la serie di a_n è convergente, scegliamo una serie convergente associata a "b_n"; se λ è 0 o positivo, a_n sarà $o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ o $\asymp\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$; altrimenti non abbiamo informazioni utili.

Volessimo verificare la divergenza di una serie, scegliamo una serie di confronto "appoggiata su un certo b_n", e facciamo il limite, che dovrà venire o positivo o $+\infty$. Esistono tuttavia casi in cui questo criterio non vale.

Esempio pratico:

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$; $\log(n) = o(n)$; $\log(n) \le n^{\delta}$, $\delta > 0$.

$n \le n\log(n) \le n^{1+\delta}$; $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{n\log(n)} \ge \frac{1}{n^{1+\delta}}$.

Vediamo che la serie è minore di una divergente ma maggiore di una convergente. Ciò non ha senso, almeno per il confronto asintotico. Per risolvere tale quesito dobbiamo usare il criterio dell'integrale, ossia

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\,dx = \Big[\log(\log(x))\Big]_3^{+\infty} = \text{DIVERGE}.$$

Il confronto asintotico raramente non funziona, se non in casi limite come questo. Notiamo che comunque, studiando il termine generale della serie, a_n, riusciamo a ottenere molte informazioni: mediante Taylor, cambi di variabili e simili, possiamo studiare serie equivalenti!

Introduciamo ora due nuovi criteri, dopo aver fatto alcune osservazioni.
Prendiamo una serie geometrica di ragione a. Dunque,
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots$
Prendendo il termine generale a_n, possiamo dire che
$\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Altra osservazione, se prendo il termine n-esimo e ne ricavo la radice n-esima, avrò sempre a. Abbiamo poi verificato che, se $a \geq 1$, la serie diverge, mentre se $a < 1$, la serie converge.
Torniamo all'osservazione principale: $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pensiamo ora a una serie il cui rapporto non sia sempre a, ma invece tenda ad a. Preannunciamo che il problema sorge perché, con tale osservazione, il comportamento di $a = 1$ sarebbe incognito. Introduciamo, fatte tali premesse, due criteri di convergenza per serie:
Criterio della radice, criterio del confronto.
Ci sia data una serie a termini positivi
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Se esiste:
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ (criterio della radice)
- $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ (criterio del rapporto)

Osserviamo che, date queste ipotesi, λ sarà sempre positivo, e
1) Se $0 \leq \lambda < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
2) Se $\lambda > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty}$ diverge.
3) Se $\lambda = 1$, non possiamo dire niente

I criteri appena citati dunque, se il limite del rapporto è 1, non ci dicono niente. Il criterio del rapporto ci può tornare molto utile in serie dove abbiamo dei rapporti, ad esempio con dei fattoriali.
Con delle radici o esponenziali, esempio con degli a^n, il criterio della radice si può usare.
Conclusione: tutto ciò che abbiamo detto finora, vale con le serie a termini anche positivi: basta usare la linearità delle serie per "portar fuori un -1" da moltiplicare; vengono dette, infine, serie "definitivamente a segno costante" quelle in cui, da un certo punto in poi, sono costanti.
Convergenza assoluta
Una serie $\sum_{n=0}^{\infty}$ si dice assolutamente convergente, se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, ossia la serie dei valori assoluti, che risulta essere una serie a termini positivi.
Ovviamente, se la serie è a termini positivi, o anche più genericamente a segno costante, la convergenza e la convergenza assoluta coincidono.
Il concetto di convergenza assoluta serve per introdurre il relativo teorema, per determinare la convergenza delle serie
Teorema della convergenza assoluta: data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ assolutamente convergente, allora è anche convergente, e vale la relazione
$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Osserviamo che questa disuguaglianza sta alla base della disuguaglianza triangolare, e anzi ne è un'estensione all'infinito.

Osserviamo che, se convergenza assoluta implica convergenza, il viceversa non è valido. Quando una serie è convergente ma non assolutamente convergente, si dice "convergenza semplice" o "convergenza condizionata".
Questo teorema risulta fondamentale con una serie in cui abbiamo infiniti cambiamenti di segno, ossia una "serie a segni alterni".
In realtà le serie a segni alterni sono il caso specifico più interessante delle serie a segni variabili. Analizziamo, nello specifico, questo caso particolare.
Un caso molto comune di serie a segni alterni è la seguente:
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$.
Ciò che stiamo per dire ha come ipotesi stretta, che n parta da 0, e che b_n sia positivo strettamente: $n_0 = 0$; $b_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
La serie avrà una forma del tipo
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots$
Per lo studio di questo particolare tipo di serie, è stato introdotto un ennesimo criterio: il Criterio di Leibniz.
Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, a termini di segno alterno, se la successione b_n è infinitesima e monotona decrescente, ossia
1) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$
2) $b_{n+1} \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$,
allora la serie convergerà.
Per spiegare questo criterio, immaginiamo un bambino che salta, una volta in avanti, e una volta in indietro, alternando il verso. Ora, man mano che salterà, egli non potrà mai raggiungere l'ampiezza del salto precedente. Prima o poi, all'infinito, per questo motivo, il bambino, a forza di ridurre l'ampiezza del salto, si ritroverà a non poter più saltare. Questo è paragonabile alla convergenza della serie a un certo valore.
Osserviamo che, date le ipotesi precedenti, la successione degli indici pari, ossia s_{2n}, è decrescente, mentre s_{2n+1} è crescente. Si dimostra che le due successioni delle ridotte, pari e dispari, hanno limite comune. Il criterio di Leibniz inoltre ci dà una condizione molto forte: non è detto che una serie che non rispetti una delle ipotesi del criterio di Leibniz diverga.
Per quanto riguarda le serie a segni alterni, abbiamo un "criterio" che ci permette di quantificare l'errore della somma fatta. Il "resto" di una serie a segni alterni, sarà uguale a:
$r_n = |s - s_n| \leq b_{n+1}$
Esempio pratico: ulteriore generalizzazione della serie armonica;
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$
Osserviamo che
1) $\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$
2) Che $\frac{1}{n+1}$ è una successione decrescente
Possiamo applicare il criterio di Leibniz, e affermare che questa serie converga senza dubbio, almeno semplicemente.
Proviamo a verificare la convergenza assoluta:
$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum \frac{1}{n+1}$, che, assolutamente, diverge.
Abbiamo fatto una prova con un caso generico. Generalizziamo.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$$

Possiamo incominciare facendo un cambio di variabili: $n+1=K$;

$n=0 \Longrightarrow K=1$; la serie diventa

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^{K-1}}{K^\alpha}$$

Studiamo la convergenza assoluta:

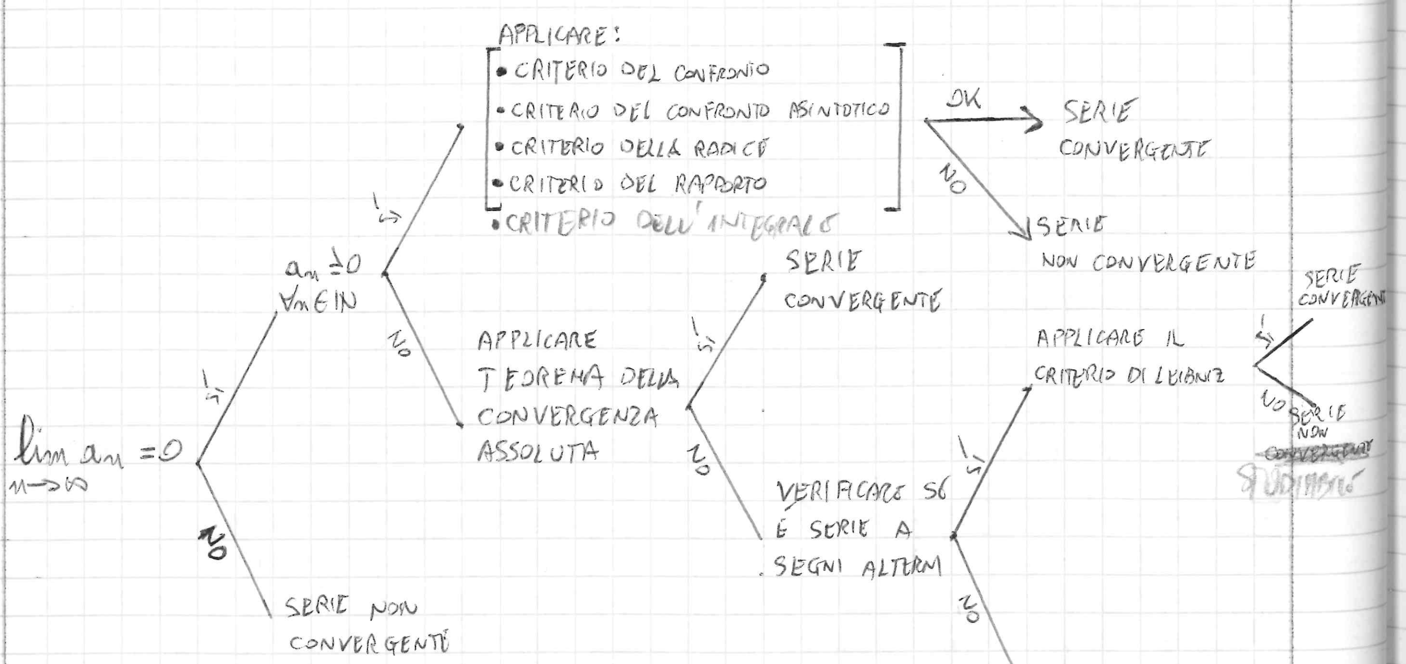
$$\sum_{K=1}^{\infty} \left|(-1)^{K-1}\cdot\frac{1}{K^\alpha}\right| = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 & \text{CONVERGE ASSOLUTAMENTE} \\ \alpha \le 1 & \text{NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE.} \end{cases}$$

Ora, con $0 < \alpha \le 1$, la successione $\frac{1}{K^\alpha}$ ha limite 0 ed è monotona decrescente, ergo per il criterio di Leibniz converge, solo semplicemente.

In parole povere, schematizziamo dicendo che

LA SERIE ARMONICA A SEGNI ALTERNI CONVERGE:
- ASSOLUTAMENTE, PER $\alpha > 1$.
- SEMPLICEMENTE, PER $0 < \alpha \le 1$

Schematizziamo un procedimento intelligente per lo studio di una serie:



N.B.: l'applicazione del criterio di Leibniz è piuttosto rischiosa se non si fa attenzione: prima si calcola il limite, poi si studia la monotonia. Per essere sicuri di quest'ultima, passiamo nel continuo e studiamo il segno della derivata prima.

Abbiamo parlato di serie come di un'estensione del concetto di somma. In realtà, le uniche serie che veramente godono delle stesse proprietà della somma, sono quelle assolutamente convergenti.

Serie di funzioni

Le serie di funzioni sono sommatorie di funzioni diverse in ogni punto. Si usa una forma del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Intuiamo facilmente che, fissato un dato punto, la serie di funzioni diventa una serie numerica.

Cominciamo a introdurre il concetto di convergenza puntuale, ossia in un ben determinato punto. Per far ciò useremo due serie "fondamentali":

- Serie di potenze : $f_n(x) = a_n \cdot x^n$ (funzione di tipo polinomiale)
- Serie di Fourier : $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Ci soffermiamo a parlare della prima per ora.

Serie di potenze

Definizione: dato punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si considera la somma seguente:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$; N.B.: se $n=0$, $a_0(x-x_0)^0 \overset{\text{def}}{\equiv} a_0$, per convenzione.

I vari a_n sono detti "coefficienti".

Ponendo $x_0 = 0$, possiamo ottenere risultati importanti, che possiamo facilmente estendere a tutti gli altri casi. Useremo dunque $x_0=0$, e quindi avremo il "centro" nell'origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Una volta fissato un certo $\bar{x}$, avremo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \bar{x}^n$.

Se questa serie (numerica) converge, allora diciamo che "la serie di potenze converge puntualmente in $\bar{x}$"; se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \bar{x}^n|$ converge, allora "la serie di potenze converge assolutamente in $\bar{x}$".

A questo punto, vogliamo, indipendentemente dalla successione degli a_n (dai coefficienti), dire qualcosa negli insiemi di convergenza.

Una cosa scontata, è che, se $x=0$, la serie di potenze converge sempre: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 0^1 + a_2 0^2 + \ldots + a_n \cdot 0^n = a_0$.

Esistono altri punti, diversi da 0, in cui una serie di potenze possa convergere? Facciamo alcuni esempi:

Esempio pratico 1

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x_0=0$; scriviamo alcuni termini:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Vediamo che, se $x \geq 0$, la serie è a termini positivi. Applichiamoci dunque il criterio del rapporto:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \ ; \ \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0;$$ la serie converge per $x \geq 0$.

Per $x<0$, la serie è a segni alterni. Studiamone la convergenza assoluta

$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum \frac{|x|^n}{n!}$; la serie è identica alla precedente, ergo converge.

La serie studiata converge assolutamente su tutto $\mathbb{R}$.

N.B.: la serie studiata è detta "serie esponenziale", poiché, come vedremo, approssima una funzione esponenziale.

Esempio pratico 2

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot n!$; scriviamone alcuni termini:

$$1 + x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \ldots + n!\,x^n$$

Se $x \geq 0$, con il criterio del rapporto,

$$\frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n!\,x^n} = (n+1)\cdot x \ ; \ \lim_{n\to\infty} (n+1)x = +\infty$$

Se $x<0$, la serie è a segni alterni. Vediamo che però abbiamo un'esponenziale e un fattoriale. Poiché il fattoriale tende a infinito molto più violentemente di quanto non tenda a 0 l'esponenziale, allora la serie non convergerà.

La serie convergerà se e solo se $x=0$.

L'esempio 1 e 2 sono i due casi estremi, convergenza su $\mathbb{R}$ e convergenza nel solo 0. Vediamo ora dei casi "intermedi":

Esempio pratico 3

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (serie geometrica)

Questa serie, in $(-1;1)$, converge. Per $0 \leq x < 1$ converge, per $-1<x<0$ converge assolutamente.

Lavoriamo ora su serie simili a questa a meno di una peculiarità

Esempio pratico 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Applichiamo il criterio del confronto, maggiorando questa serie con x^n.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Da qui, se $-1<x<1$, la serie converge.

Ma negli estremi? Se $x=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, [illegible] serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, diverge.

Se $x=-1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ diverge assolutamente, ma converge semplicemente. Dunque, questa serie converge per l'intervallo $[-1;1)$.

Esempio pratico 5

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Sappiamo che la serie converge, per criterio del confronto, con $|x| \leq 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$; questa converge assolutamente in $[-1;1]$

Se $|x|>1$, il limite non tende a 0 (del termine generale), dunque la successione avrà limite costante o infinito, e la serie divergerà.

In questo caso, la serie convergerà in $[-1;1]$.

Osservazioni dagli esempi pratici

Una serie di potenze è sempre convergente in un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Esso può almeno coincidere con l'origine, e al più con l'asse reale. Una serie di potenze, dunque, converge sempre assolutamente. Unica nota negativa, sono gli estremi, dei quali bisogna verificare caso per caso.

Teorema: date come ipotesi le seguenti:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$

1) Se la serie di potenze converge in x_1, allora converge assolutamente per ogni x tale per cui $|x|<|x_1|$.

2) Se la serie di potenze non converge in x_2, allora non converge per ogni x tale per cui $|x|>|x_2|$.

Abbiamo solo garanzia sugli intervalli aperti.

Dunque, trovato un x_1 in cui la serie converge, vogliamo passare a estendere l'intervallo di convergenza, andando avanti con $\bar{x}$ maggiori in modulo a x_1.

Nasce, per stabilire il massimo intervallo di convergenza, la nozione di "raggio di convergenza", che indicheremo con R, definito come

$R = \sup\{x \in \mathbb{R} : a_n \cdot x^n \text{ CONVERGA}\}$. $R \geq 0$ (essendo l'estremo superiore).

Vogliamo ora determinare il raggio di convergenza di una serie;

Teorema: se esiste il "$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$," ~~o~~ il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, allora

1) Se $l=0$, $R=+\infty$

2) Se $l=+\infty$, $R=0$

3) Se $l>0$, $R=\frac{1}{l}$

Esempio pratico

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2}$; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

$R=1$

A questo punto, dovrei studiare il comportamento negli estremi (cosa già fatta nell'esercizio 5)

Esempio pratico importante:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{4n}}{3^n}$

Scriviamone alcuni termini: $\frac{x^4}{3} + \frac{2x^8}{9} + \frac{3x^{12}}{27} + \dots$

Notiamo che l'esponente avrà solo multipli di 4. La serie è dunque incompleta: possiamo dire che i coefficienti saranno i seguenti:

a_0	$a_1 x$	$a_2 x^2$	$a_3 x^3$	$a_4 x^4$	$a_5 x^5$	$a_6 x^6$	$a_7 x^7$	$a_8 x^8$	
0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{9}$	...

Il criterio del rapporto è insensato. Quello della radice difficilmente applicabile. Dobbiamo trasformare la serie in una serie completa, mediante un cambio di variabile: esso deve far sì da eliminare la proprietà dei multipli di 4 all'esponente.

$z = x^4$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot z^n}{3^n}$; CON IL CRITERIO DEL RAPPORTO, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n}\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n}$;

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. $\quad R_z = 3$; $\quad R_x = R = \sqrt[4]{3}$

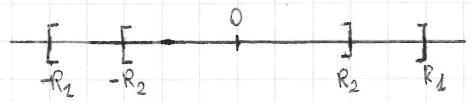
Agli estremi, $-\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt[4]{3}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(\sqrt[4]{3})^{4n}}{3^n} = \frac{n\cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}} = n\cdot \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$ Idem per $-\sqrt[4]{3}$.

Entrambi divergono.

Finora abbiamo studiato serie di potenze, cioè serie che convergono sempre, almeno nell'origine. Le serie di funzioni, invece, possono non convergere in alcun punto. Concludiamo temporaneamente il discorso sulle serie di potenze, per poi introdurre le più generali serie di funzioni, con le operazioni applicabili a serie di potenze. Date due serie, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, voglio studiare la somma delle serie, e il nuovo raggio di convergenza.

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow R_1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow R_2 \end{cases} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n, \quad |R_1| > |R_2| \text{ per ipotesi.}$$



Cosa capita: la serie di a_n converge su $(-R_1;R_1)$, quindi anche su $(-R_2;R_2) \subset (-R_1;R_1)$. Al contrario, la serie di b_n diverge in $(-R_1;-R_2)\cup(R_2;R_1)$. Dimostriamolo per assurdo: poniamo per ipotesi che $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)t^n$ sia convergente, $|R_2|<t<|R_1|$, $|R_1|>|R_2|$, e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge. Se facciamo la differenza tra le due serie, quella delle somme e quella di a_n, otteniamo $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n-a_n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Essa però è divergente. Siamo a un assurdo.

Teorema: date due somme convergenti nei rispettivi raggi di convergenza R_1 ed R_2, il raggio della somma, $R_{1,2}$ sarà il minimo in valore assoluto dei raggi: $R_{1,2} = \min\{|R_1|, |R_2|\}$ (il valore assoluto è in realtà una precauzione inutile).

N.B.: Se $R_1=R_2$, il raggio di convergenza può anche aumentare!!!

Prodotto di due serie di potenze (prodotto alla Cauchy)

Date due serie, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, si può definire una serie, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, con c_n prodotto dei polinomi di a_n e b_n. La regola per definire c_n, è che la somma dei prodotti è la somma dei prodotti degli elementi tali per cui la somma degli indici dei moltiplicandi è sempre uguale all'indice della potenza che "stiamo facendo".

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}.$$

Serie di funzioni

Nella pratica, quando studieremo serie di funzioni, vorremo ricondurci a problemi più semplici, quali serie di potenze, come vedremo.

Un problema interessante da risolvere, sarebbe, data una $f(x)$, associabile a una serie di potenze, fare ciò:

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (associare $f(x)$ a serie di potenze)

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, convergente in $I=(-R,R)$, dati $(a,b)\subset I$,

$\int_a^b f(x)\,dx$ si potrebbe ricondurre a $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx$.

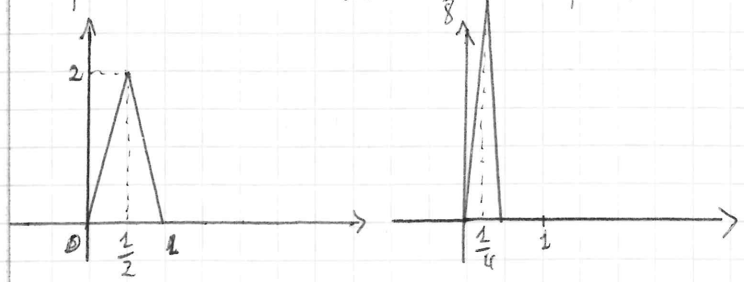
Il passaggio che noi vorremmo fare, è passare dall'integrale della serie, alla serie degli integrali.

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\,dx$$

Ci troveremmo, da una $f(x)$ difficile da integrare, a un polinomio, e a una serie di integrali. Vogliamo dunque trasformare una funzione difficile, ad una serie di funzioni semplici. Facciamo ora un esempio in cui vediamo che ciò (lo "scambio" serie-integrale) non è possibile.

Esempio pratico: successione di funzioni.

Definiamo una successione di funzioni tale per cui $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.



La nostra successione è formata da due spezzate, e dall'ascissa del vertice che tende a 0. L'area del triangolo, ossia $\int_0^1 f(x)\,dx$, dovrebbe essere sempre 1. Man mano che la successione aumenta, cioè n aumenta, il vertice va sempre più verso 0, e il vertice di conseguenza sempre più verso l'alto.

Questa successione di funzioni, a che funzione tende, per $n \to \infty$?

Facciamo alcune osservazioni:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$: vediamo che fino a un certo punto, per n molto elevato, la funzione varrà qualcosa di non nullo, poiché ci sarà ancora "la punta", ma poi, in quello stesso punto, aumentando n, il vertice del triangolo si sposterà comunque ulteriormente verso sinistra, e la funzione, dunque, di lì in poi, sarà identicamente nulla.

D'altra parte, se consideriamo l'integrale,

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ per definizione stessa della funzione. Ma ciò è incompatibile con la scrittura precedente! Dunque, il limite dell'integrale è 1, ma l'integrale del limite è 0. Non sono intercambiabili tra loro.

Il nostro scopo è introdurre una condizione sufficiente per far ciò.

Finora abbiamo fissato un certo punto $\bar{x}$ e abbiamo studiato la successione, in tale punto, sperando che convergessero allo stesso modo limite di integrale e integrale di limite, ma invece no. La convergenza puntuale non è sufficiente come condizione.