Analisi Matematica 2

Serie di Funzioni - continuazione

Abbiamo tentato, mediante lo studio della successione di funzioni del=l'esempio precedente, di verificare se la convergenza puntuale sia sufficiente=mente forte come condizione, per poter effettuare le eventuali conseguenze dell'e=quivalenza limite di integrale/integrale di limite, fallendo.

Il problema riscontrato è che dei punti non tendono a 0. Ciò impedirebbe una convergenza.

Ciò che vogliamo imporre, per avere una condizione forte, è che il massimo assoluto. Non parleremo di massimo ma di estremo superiore, perché la funzione non deve per forza essere continua, e di estremo superiore in modulo, perché la funzione può essere negativa.

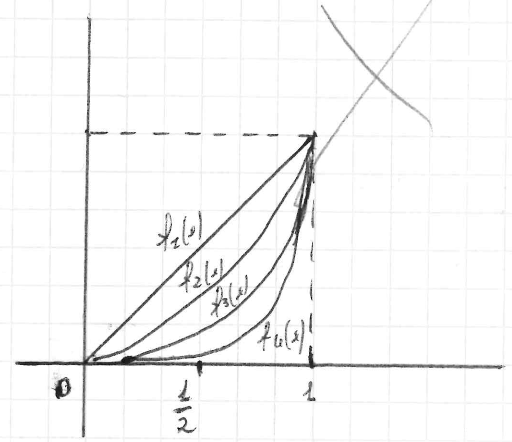
$\sup |f_n(x)| \longrightarrow 0$

Definizione: dato $I \subset (-R;R)$, data una successione di funzioni $f_n(x)$, si dice che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente in I, se:

$\forall \bar{x} \in I, \; \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$

Definizione: dato $I \subset (-R;R)$, data una successione di funzioni $f_n(x)$, si dice che $f_n(x)$ converge uniformemente in I, se:

$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$



Esempio pratico:

$f_n(x) = x^n$

Faccio

Consideriamo due diversi intervalli: $I_1 = [0; \frac{1}{2}]$, $I_2 = [0; 1]$.
Nei due intervalli, la $f_n(x)$ ha come sup sempre l'estremo destro, quindi useremo gli estremi per studiare la convergenza a 0 della funzione.
Vediamo che, in entrambi i casi, abbiamo convergenza puntiforme:
Per $x \in [0; 1)$, o meglio, $x \in [0; 1-\epsilon]$, $\epsilon > 0$,
$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |x^n - 0| = 0$.
In 1 la successione non converge puntualmente a 0. Per il resto, sì.
Per $I_1 = [0; \frac{1}{2}]$, $\sup |I| = \frac{1}{2}$;
$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0;\frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
In I_1, la successione di funzioni converge anche uniformemente.
In I_2, vediamo che, anche se limitiamo l'intervallo ad aperto, per la definizione di sup (estremo superiore), come minimo dei maggioranti di un insieme, 1 non va bene. Neanche con $I_2 = [0; 1)$.
Dovremo considerare la convergenza uniforme in $I_2 = [0; 1-\epsilon]$, $\epsilon > 0$, così
$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in[0;1-\epsilon] \\ \epsilon>0}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |(1-\epsilon)^n| = 0$, $\epsilon > 0$.
Invece, se $I_2 = [0; 1)$,
$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0;1)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |1^n| = 1$.
Ciò che volevamo arrivare a dire è che la convergenza uniforme è ciò che cercavamo per "scambiare serie e integrali", e risolvere il nostro problema precedente.

Finora in teoria avevamo parlato di convergenza puntuale. Iniziamo ora a parlare di convergenza uniforme di una serie.
Una serie che converge uniformemente, allora lo fa anche puntualmente. Fissato un intervallo, studiamo la convergenza puntuale. Senza di essa, infatti, non ci può essere convergenza uniforme. Studiamo dunque raggio di convergenza ed estremi, poi passiamo allo studio del sup $|I|$.
Dire che "la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente in una funzione $s(x)$" vuol dire che, data $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}$, costruisco la somma parziale, e così $s_n(x)$ converge a $s(x)$, $n \to \infty$.
$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |s_n(x) - s(x)| = 0$.
Il problema che ora sorge, è lo stesso che sorgeva con le serie numeriche: esplicitare le somme parziali, riuscire cioè a calcolare analiticamente le somme della serie con un termine generale, era pressoché impossibile prima, lo è pure ora, a parte rarissimi casi (es. serie geometrica).
Abbiamo in nostro aiuto, un criterio che ci permette di determinare, date certe ipotesi, la convergenza uniforme
Criterio di Weierstraß: sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ una serie di funzioni definite in un intervallo I. Se esiste una certa quantità $M_k \in \mathbb{R}$, tale per cui:
1) $|f_k(x)| \le M_k$ $\forall x \in I$, $k \in \mathbb{N}$
2) $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ è convergente (la serie della successione degli M_k)
Allora $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente a $s(x)$ in I.
Maggiorando una funzione con una costante in un certo intervallo,

e la serie degli M_k converge, allora la serie di funzioni convergerà uniformemente a una $s(x)$.

Esempio pratico:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \qquad R=1$$

Maggioriamo la serie dei valori assoluti: se $|x| \leq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ma noi sappiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ CONVERGE, per il criterio di Maclaurin, dunque anche la serie di funzioni convergerà, e uniformemente, per il criterio di Weierstraß.

La convergenza uniforme attribuisce importanti proprietà a una successione/serie di funzioni:

1) Se $f_k(x) \in C^0(I)$, $\Rightarrow s(x) \in C^0(I)$.

2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x)$, con convergenza uniforme su I, dati $a, b \in I$,

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

Questo è detto "teorema di integrazione per serie".

3) Date come seguenti ipotesi:

- $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x)$, che converga puntualmente in I
- $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = \sigma(x)$, che converga uniformemente in I,

Allora $\sigma(x) = s'(x)$

Questo è detto "teorema di derivazione con convergenza uniforme".

Abbiamo in precedenza studiato le serie di potenze. Riprendiamole, per applicarle alle serie di funzioni.

Quando abbiamo una serie di potenze, verifichiamo prima, come già detto, la convergenza puntuale, trovo R, e studio gli estremi. A questo punto, qui, studiamo l'eventuale convergenza uniforme, con Weierstraß.

In realtà, abbiamo, sulle serie di potenze, un risultato generale, molto interessante:

Teorema: data una serie di potenze convergente in raggio R,

1) Se $R = +\infty$, $\forall k \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente in $[-k; k]$.

2) Se $R \geq 0$, $\forall k: 0 < k < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente in $[-k; k]$.

Di conseguenza, data una serie di potenze, per il teorema precedente, sia: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x)$, $R \geq 0$; dati $a, b \subset (-R; R)$,

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\,dx.$$

Inoltre, fintanto che la funzione, o la serie, è convergente, allora è anche continua, ed è possibile esprimerla come serie di potenze.

Una funzione discontinua non può essere scritta come serie di potenze.

Diamo ora una definizione fondamentale per andare avanti:

Definizione: data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si dice "serie derivata" (termine a termine) la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$

Vogliamo sapere, con la derivazione, cosa capita del raggio di convergenza.

Esiste un fondamentale teorema al riguardo:

Teorema: una serie di potenze e la sua serie derivata hanno il medesimo raggio di convergenza.

Osservazione: il comportamento agli estremi può invece variare, e si suol dire che "possiamo soltanto perdere convergenza agli estremi, o al più restare nella condizione di partenza".

Ragioniamo ora su una cosa: andando a riprendere il precedente teorema sulla convergenza uniforme e sulle sue proprietà, ne abbiamo osservata una sulla derivazione: data serie di partenza convergente almeno puntualmente, e serie derivata almeno uniformemente, "la derivata della serie è uguale alla serie delle derivate". Entrambe le serie, sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, che $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, in quanto serie di potenze, convergono uniformemente, e nello stesso R. La prima, $s(x)$, è continua in quanto convergente, quindi $s(x) \in C^{(0)}(-R;R)$. Ma anche la seconda, $s'(x)$, $\in C^{(0)}(-R;R)$. Dunque, $s(x) \in C^{(1)}(-R;R)$. Il legame tra le due ci è permesso mediante il teorema di derivazione di serie citato poco fa. Iterando questo ragionamento allora $s''(x) \in C^{(0)}(-R;R)$, $s(x) \in C^{(2)}(-R;R)$ e così via. Questo perché la derivata di una serie di potenze converge a sua volta in una serie di potenze. Arriviamo dunque a dire che, continuando a iterare questo ragionamento, all'infinito, che

$s(x) \in C^{(\infty)}(-R;R)$.

Le serie di potenze sono solo funzioni appartenenti a $C^{(\infty)}$, cioè derivabili infinite volte. Ad esempio, non posso scrivere la serie di potenze di $|x|$, in quanto $|x| \in C^{(0)}(\mathbb{R})$. Una funzione, per essere esprimibile come serie di potenze in un intervallo, allora deve essere derivabile infinite volte al suo interno.

Il nostro problema di lavoro è sempre il solito: esplicitare le somme parziali in un'espressione. L'unica (o quasi) serie su cui siamo in grado di lavorare, è la serie geometrica.

Facciamo ora un esempio pratico su di essa.

Esempio pratico 1

Partendo dalla somma geometrica, e dalla serie ad essa associata, sappiamo che "di base" abbiamo una cosa del tipo

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = s(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1;1)$.

Facciamo un cambio di variabili nella $s(x)$, e vediamo cosa capita:

$t = -x$; $s(t) = \frac{1}{1+t}$.

$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$.

Possiamo integrare ambo i membri, e vedere cosa capita: usiamo $[a;b] = [0;x]$.

$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt$;

N.B.: gli intervalli di integrazione, per poter fare il prossimo passaggio, bisogna sceglierli a piacimento tra $(-1;1)$, per poter avere convergenza uniforme. Data la convergenza uniforme, e la linearità dell'integrale, possiamo dire che

$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Abbiamo appena scritto la funzione logaritmo sviluppata in serie di potenze.

Esempio pratico 2

Partendo da $s(x) = \frac{1}{1-x}$, vogliamo sostituire, a x, $x = -t^2$. $x \in (-1;1)$. Studiamo allora i nuovi punti per la t: $-1 < t < 1$ va bene. Scegliamo nuovamente $a=0$, $b=x$, $|x|<1$, per l'integrazione. Data $x = -t^2$, avremo $\sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$.

Integriamo ora ambo i membri

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad ; \quad Arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

N.B.: facciamo molta attenzione, in questi casi, agli estremi di integrazione che scegliamo.

Come abbiamo detto in precedenza, la serie di potenze è "applicabile" solo a certi tipi di funzioni. Se una funzione ha tale possibilità, allora essa è C^{∞} nell'intervallo studiato.

Siamo inoltre finora partiti da serie geometriche, le quali sono comunque piuttosto limitate (con $x_0=0$, da $(-R;R)$). L'unico mezzo che possiamo usare, è la traslazione della serie sull'asse x, di x_0.

Abbiamo un teorema molto potente di derivazione di serie uniformemente convergenti. Applichiamolo, iterando questo ragionamento:

Data $f(x) \in C^{(\infty)}(x_0-R\,;\,x_0+R)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Deriviamo e vediamo che

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

Arrivati alla derivata n-esima, avremo che

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n$$

Valutiamo ora questi polinomi in $x=x_0$. Cosa ci capiterà: avremo questo risultato:

$f(x_0) = a_0$; $f'(x_0) = a_1$; $f''(x_0) = 2a_2$; generalizzando,

$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$.

Da qui, possiamo trovare il termine generale a_n, che ha questa forma:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

Questi sono i coefficienti già visti in analisi 1, parlando dei Polinomi di Taylor.

Dunque, se $f(x)$ è rappresentabile come somma di una serie di potenze, in $I = (x_0-R\,;\,x_0+R)$, allora avremo 2 conseguenze:

1) $f(x) \in C^{(\infty)}(I)$;
2) I coefficienti a_n avranno la forma $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

[SERIE DI TAYLOR DI $f(x)$ CENTRATA IN x_0]

Se una serie di funzione esiste, allora deve essere di Taylor per forza.

Serie di Taylor

Finora abbiamo "per caso" associato delle serie di potenze a delle funzioni.

Vogliamo fare l'opposto: data una funzione, posso cercarne la serie?

Una richiesta per noi ragionevole sarebbe studiare la funzione come serie di Taylor in un intervallo $(x_0-d\,;\,x_0+d)$, con $d>0$; $d \le R$.

Studieremo localmente la serie in un punto, con un intorno grande a piacere. Inoltre, sappiamo che una funzione di cui possiamo fare la serie di funzioni, è $C^{(\infty)}$. Ma è questa la condizione necessaria?

Schematizzando, data $f(x)$, vorremmo trovare la serie, e collegarla, mediante Taylor, alla f stessa.

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[rr, "1"] & & f^{(n)}(x)\ \forall n \in \mathbb{N} \arrow[dl, "2"] \\ & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \arrow[ul, "3\ ???"] & \end{tikzcd}$$

Il passaggio 3 è sempre possibile? Possiamo, anche solo localmente, "chiudere il giro"?

Se la risposta al quesito è "sì", per la funzione che stiamo studiando, $f(x)$, allora $f(x)$ è una "funzione analitica": ha delle condizioni ancora più forti di $C^{(\infty)}$, oltre ad essa. Non tutte le $f \in C^{(\infty)}$ sono analitiche.

Esempio pratico: $f \in C^{(\infty)}$, NON ANALITICA

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

La funzione è derivabile infinite volte in ogni punto, come possiamo verificare per il rapporto incrementale.

Abbiamo le condizioni per scriverne la serie di Taylor. Il problema è che la serie di Taylor per questa funzione, è la funzione identicamente nulla. Ciò andrebbe anche bene per $x=0$, ma per $x\neq 0$ assolutamente no.

Allontanandosi dall'origine, $f^{(n)}(x)(x-x_0)$ andrebbe sempre a 0, $f(x)$ verso 1.

Questa $f(x)$ ha una lacuna rispetto alle funzioni analitiche.

Prendiamo una generica $f(x)$, e la serie di Taylor associata, con relativo resto di Lagrange:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-x_0)^k$$

In forma di Lagrange il resto della serie sarebbe il calcolo del resto partendo dalla derivata $n+1$-esima.

N.B.: la funzione $f^{(n+1)}$ non va valutata in x_0, ma in $\bar{x}$, con $\bar{x}$ punto di Lagrange, che noi NON CONOSCIAMO e sappiamo solo essere $x_0 < \bar{x} < x$, per il teorema del valor medio di Lagrange.

Da qua, possiamo dire che si verifica la relazione

$$\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-x_0)^k\right\|=\left\|\frac{f^{(k+1)}(\bar{x})}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right\|.$$

Le due funzioni tendono a coincidere (e quindi il primo membro a essere nullo) quando anche il secondo membro è nullo o tende ad esserlo. Il resto in forma di Lagrange della serie di Taylor deve tendere a 0, affinché la funzione sia analitica.

Ciò che possiamo usare è la maggiorazione con funzioni o serie di funzioni che già conosciamo, sperando in risultati utili. Il massimo sarebbe aver a che fare con seni o coseni, facilmente maggiorabili a 1.

Esempio pratico rapido:

$$\sin(x)=p_{n,0}+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Ma $f^{(n+1)}(\bar{x})$ può essere: $-\sin(\bar{x})$, $\sin(\bar{x})$, $\cos(\bar{x})$, $-\cos(\bar{x})$, tutte e 4 maggiorabili con 1 in valore assoluto.

$$|\sin(x)-p_{n,0}|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}\right| \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(CHE CONVERGE! DUNQUE $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$!!!)

$\sin(x)$ è dunque analitica, per $x_0=0$.

La condizione necessaria per una funzione di essere analitica è, in parole povere, che la generica derivata della funzione tenda a qualsiasi cosa, ma meno violentemente di un fattoriale. $f^{(n+1)}(\bar{x})$ non deve crescere violentemente quanto un fattoriale, affinché $\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$.

Esempio pratico:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad R=\infty \quad ; \quad e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad R=\infty$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

Quindi, $1+(-1)^n=\begin{cases}2, & \text{se } n \text{ pari}\\ 0, & \text{se } n \text{ dispari}\end{cases} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Quindi, in conclusione, possiamo dire che

$$\cosh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Alcune note: se ci viene richiesta la serie di Taylor di una funzione non centrata nell'origine, ma in $x_0 \neq 0$, opero come prima sostituendo, $x-x_0=t$.

La condizione di far la serie è la solita: la funzione deve essere analitica. La serie deve dunque essere convergente in $I=(x_0-d\ ;\ x_0+d)$, $d>0$.

Se una funzione è analitica su $\mathbb{R}$, allora essa è sviluppabile come serie di Taylor in qualsiasi punto. Chiaramente, lo sviluppo varierà a seconda del punto.

Esempio particolare:

$f(x)=3+x+2x^2, \quad x_0=1.$

Cosa dobbiamo fare: dobbiamo trovare le derivate in x_0, e così avremo i coefficienti, che moltiplicheremo per $(x-x_0)^n$.

$f(1)=6\ ;\ f'(1)=1+4=5\ ;\ f''(1)=4\ ;\ f'''(1)$ in poi $:0$

$f(x)=6+5(x-1)+2(x-1)^2$

N.B.: partendo da una serie qualsiasi, ricorda, devi sempre ricondurti alla serie geometrica!!!

Esempio pratico:

$f(x)=\frac{1}{x}\ ;\ x_0=1$

$x-1=t\ ;\quad x=t+1 \Rightarrow f(t)=\frac{1}{1+t}.$

Riconducendoci alla serie geometrica, $f(t)=\frac{1}{1-(-t)}$.

$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\ ;$

$\Downarrow$

$R=1\ ;\ |t|<1\ ;\ -1<t<1\ ;\ -1<x-1<1\ ;\ 0<x<2.$

Applichiamo ora per casi più interessanti questo potente mezzo: abbiamo una funzione quale e^{-x^2}. Essa non ha primitive che si possano rappresentare con funzioni elementari: e^x, $\sin x$, $\cos x$, e relative inverse e traslate.

Viene introdotta una funzione, in questo caso, appartenente a una nuova classe di funzioni: le funzioni trascendenti non elementari.

Esse servono per rappresentare integrali altrimenti non risolubili.

$\int_0^x e^{-t^2}dt$; Si dimostra che per $x\to\infty$, $\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Si definisce una "funzione degli errori" come

$Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

Come possiamo calcolarla? Mediante la serie!

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $R=\infty$. Se $z=-t^2$,

$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\ ;$

$\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}dt=$ Ma la serie ha $R=\infty$, quindi ho convergenza uniforme su $\mathbb{R}$:

$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

$Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

N.B.: questa è una serie a segni alterni. Immaginiamo di cercarne il valore in 1:

$Erf(1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}\dots\right)$

Nelle serie a segni alterni, un teorema ci afferma che la precisione (l'errore massimo) con cui calcoliamo la serie è dato dal primo termine che non calcolo. Fermandomi a $n=3$ avrò già $\frac{1}{200}$ di precisione.
Determiniamo ora la serie della funzione $Si(x)$ [SENO INTEGRALE]

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt .$$

Tutto ciò si può scrivere come integrale della serie di potenze seguente:

$$= \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\, dt =$$ PER LA CONVERGENZA UNIFORME

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}$$

Disponiamo di una serie a segni alterni. Per fare la somma della serie, a meno di un certo errore, possiamo utilizzare il teorema del resto delle serie a segni alterni: il resto è infatti uguale all'ultimo termine (o meglio, al termine dopo l'ultimo).
Vediamo che la serie decresce velocemente; dopo pochi passaggi avremo un errore già molto piccolo (per $n=3$, $e \simeq 10^{-3}$).

Serie di Fourier - introduzione

Prima di introdurre l'argomento, diciamo all'incirca di cosa tratta: la serie di Fourier nasce per studiare funzioni periodiche. C'è da dire che, come meglio vedremo, esse convergono "molto peggio" delle serie di potenze (che, tra le serie di funzioni, sono quelle "funzionanti meglio"), ma d'altra parte si possono usare per funzioni molto meno regolari.
Funzioni periodiche (in realtà, $\sin(x)$ e $\cos(x)$)
Dato un numero $T \in \mathbb{R}$, $T>0$, data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f è definita "di periodo T" se $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ad esempio, se prendiamo $f(x) = \sin(x)$, e aumentiamo di 2π, avremo sempre la stessa ordinata.
In realtà, $\sin(x)$ è periodica non solo di 2π, ma anche dei suoi multipli! Quindi di 4π, 6π, 8π, e così via. Facciamo alcune considerazioni:
1) Se f è periodica di periodo T, allora è periodica di $K \cdot T$, $K \in \mathbb{N}$, $K \geq 1$.
2) Se $f(x)$ è una funzione costante, quindi $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, allora essa è periodica di periodo T, $T \in \mathbb{R}$, $T>0$.
3) Se una funzione è periodica di periodo T, ci basta conoscere il grafico in un periodo T, per conoscere l'andamento dell'intera funzione. L'intervallo conosciuto è della forma $[x_0; x_0+T]$.
Di solito useremo due forme fondamentali: $[0; T]$, $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$
Ora, di tutti i periodi, a meno che non si parli di funzioni costanti, consideriamo un particolare periodo: il minimo dei periodi della funzione. Esso sarà detto "periodo fondamentale della funzione". Ci rife-

riuremo quasi sempre ad esso, parlando di periodo.
Detto T_0 il periodo fondamentale, definiamo un'altra grandezza,
$f = \frac{1}{T_0}$, frequenza della funzione.
Fourier introduce le serie per lo studio di fenomeni di vibrazione: quando pizzichiamo una corda, essa vibra con una certa frequenza; se consideriamo $T=2\pi$, la nota è di $1\ Hz$ (misura della frequenza: Hertz).
In musica, la "nota di riferimento" è il LA, da $440\ Hz$. A essa, volendo associare una sinusoide, essa dovrebbe avere $T = 440 \cdot 2\pi$.
Proposizione 1: sia $f(x)$ una funzione di periodo T; dunque,
$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$
Per calcolare l'integrale di un periodo, non ci interessa la posizione di partenza x_0.
Proposizione 2: data una funzione $f(x)$ di periodo T_1, e un numero $T_2 \in \mathbb{R}$, $T_2 > 0$, la funzione $g(x) = f\left(\frac{T_1}{T_2}x\right)$, ha periodo T_2. Ciò è detto "teorema di cambiamento del periodo".
Esempio pratico:
$f(x) = \sin(x)$; $T = 2\pi$.
Se voglio una sinusoide di $T = 6\pi$,
$g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{6\pi}x\right) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
Posso estendere o ridurre periodo e frequenza, "a fisarmonica": maggiore sarà il coefficiente di x, minore sarà il periodo, maggiore la frequenza.
Dimostrazione proposizione 2: voglio dimostrare che $g(x+T_2) = g(x)$.
$g(x) = f\left(\frac{T_1}{T_2}(x+T_2)\right)$, $= f\left(\frac{T_1}{T_2}x + T_1\right)$. Ma se f è di periodo T_1 per definizione, allora non varierà. Quindi abbiamo verificato che $g(x) = f\left(\frac{T_1}{T_2}x\right)$, $T=T_2$.

Fino a quando non specificheremo il contrario, parleremo di funzioni con $T_0 = 2\pi$, di base, o anche con 2π come periodo multiplo.
Ci riferiremo quasi sempre a 2π.
$\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\sin(nx)$, $n \geq 1$, hanno tutte $T=2\pi$, idem per le varie $\cos(nx)$; tra tutte queste funzioni, interessiamoci di $\sin(x)$ o $\cos(x)$: esse sono quelle in cui $T=2\pi$ è il periodo minimo.
Esse sono dette "armoniche fondamentali", mentre le altre "armoniche superiori".
Cosa posso fare ora: date le varie $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(nx)$, $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(nx)$, posso prenderle e farne la combinazione lineare, ossia moltiplicare per scalare e sommare.
Una combinazione lineare di seni n-esimi e coseni n-esimi, è detta "polinomio trigonometrico di ordine n".
Esso si scrive così:
$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$
Questo sarebbe, nelle serie di Fourier, il "parente" del polinomio di Taylor.
Ora, una cosa che ci interessa è: oltre a $\sin(x)$ e $\cos(x)$, ci sono altre funzioni da cui posso tirar fuori un polinomio trigonometrico?
Esempio pratico:
$f(x) = \cos^2(x)$: mediante le formule di bisezione, potremmo rappresentare questo polinomio, non lineare, mediante un polinomio trigonometrico (ergo lineare):
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \quad \text{[POLINOMIO TRIGONOMETRICO]}$$

Partendo da una funzione quadratica, abbiamo ottenuto un polinomio di funzioni lineari con $T=2\pi$.

Cosa succede, facendo i grafici di questi polinomi: aumentando l'ordine (il K), possiamo confondere un polinomio di grado alto con un tratto rettilineo. Ciò ci permette di ottenere, per studiare funzioni non ottime, di "approssimarle" con serie di funzioni trigonometriche. (o, meglio, di "scomporle").

Quando studiamo segnali/fenomeni in qualche modo simili tra loro, ma con grafici diversi, la differenza sta proprio nello studio delle armoniche superiori: dati ad esempio due strumenti musicali, che suonano la stessa nota, il "timbro" sarà diverso: ciò dipende proprio dall'influenza delle armoniche superiori.

Per studiare la serie di Fourier, introduciamo alcuni "mezzi" fondamentali: le "relazioni di ortogonalità": si tratta di relazioni integrali, utili per alcune proprietà:

- $\int_0^{2\pi} \sin(Kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(Kx)\,dx = 0 \quad \forall K \in \mathbb{R}$
- $\int_0^{2\pi} \sin(Kx)\cdot\cos(hx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin(K+h)+\sin(K-h)\right) = 0$
- $\int_0^{2\pi} \sin(Kx)\cdot\sin(hx)\,dx = \int_0^{2\pi}\cos(Kx)\cos(lx)\,dx = 0, \quad \forall K \neq l$
- $\int_0^{2\pi} \sin^2(Kx)\,dx = \int_0^{2\pi}\cos^2(\cancel{Kx})\,dx = \pi, \quad \forall K \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Partendo da ciò, abbiamo detto che, in precedenza,

$$f(x) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\cos(Kx)+b_K\sin(Kx)\right)$$

Come per le serie di potenze abbiamo determinato i coefficienti della serie con coefficienti degli sviluppi di Taylor, così, definito un periodo T, della $f(x) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\cos(Kx)+b_K\sin(Kx)\right)$, poniamo alcune ipotesi:

1) La serie di Fourier associata al polinomio deve essere convergente, e la convergenza uniforme
2) La somma della serie deve essere $f(x)$, e deve essere valida su un periodo. A queste condizioni, sarà valida su $\mathbb{R}$, la relazione.

Ora ci chiediamo: che relazione esiste tra $f(x)$, e i termini a_0, a_K, b_K?

Partiamo da a_0:

$$f(x) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\cos(Kx)+b_K\sin(Kx)\right);$$

Integriamo ambo i membri in un periodo:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0\,dx + \int_0^{2\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\cos(Kx)+b_K\sin(Kx)\right)dx$$

Data la convergenza uniforme, integriamo e otteniamo a_0:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = a_0\cdot 2\pi + \sum_{K=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(a_K\cos(Kx)+b_K\sin(Kx)\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left[a_K\int_0^{2\pi}\cos(Kx)\,dx + b_K\int_0^{2\pi}\sin(Kx)\,dx\right]$$

Per le relazioni di ortogonalità, i due integrali a destra saranno nulli;

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 \quad ; \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

N.B: è un'applicazione, come vediamo, della media integrale. a_0 è proprio il valore medio integrale del periodo T.

Passiamo ora al coefficiente del $\cos(Kx)$, a_K. Partendo dalla stessa via, facciamo uno studio analogo al precedente, moltiplicando membro a membro per $\cos(nx)$, dove n è fissato.

$$f(x)\cos(nx) = a_0\cos(nx) + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)\right)\cos(nx)$$

Integriamo membro a membro: (applicando subito l'uniformità della convergenza)

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0\cos(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cdot\cos(nx)\,dx + b_k\int_0^{2\pi}\sin(kx)\cdot\cos(nx)\,dx\right)$$

Per le relazioni di ortogonalità, l'integrale di a_0 e di $\sin(kx)$ saranno sempre nulli. Invece, nell'integrale di $\cos(kx)$, tutti saranno nulli meno il caso $k=n$, dove $\int_0^{2\pi}\cos^2(nx)\,dx = a_k\pi$.

'a_n'

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \pi a_n \;; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.$$

[$k=n$ in realtà: a_n dipende dall'n che fissiamo]

Per conclusione, i coefficienti di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$ [Si dimostra analogamente ad a_n, moltiplicando per $\sin(nx)$].

Se nella serie di potenze (Taylor) i coefficienti si calcolavano mediante operazioni di derivazione, ora lo si fa mediante integrazioni.

Finora queste formule sono verificate per funzioni uniformemente convergenti. In realtà, in seguito si saprà che esse sono valide universalmente.

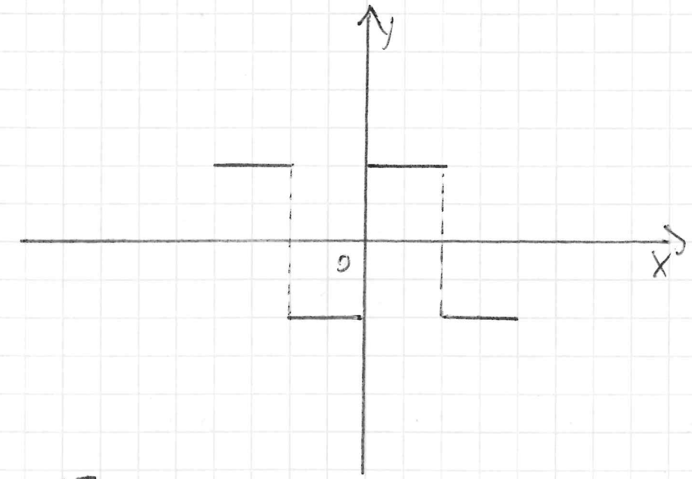
Vogliamo inoltre capire quali siano le condizioni di convergenza di una serie di Fourier. Nel dettaglio, non ci andremo, ma considereremo solo una particolare classe di funzioni: funzioni continue a tratti, di periodo 2π, quindi:

$f \in \tilde{C}_{2\pi}$. Abbiamo le seguenti caratteristiche:

1) Funzioni periodiche, $T = 2\pi$
2) Funzioni continue almeno a tratti in T, a meno di un numero finito di discontinuità. Essa, inoltre, deve essere eliminabile, o di tipo "salto", ossia, per x_0 "discontinuo", $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = m$, l e m finiti
3) Nei salti, le funzioni vanno regolarizzate: il valore discontinuo avrà come ordinata la media dei due limiti, quindi $f(x_0) = \frac{1}{2}(l+m)$

Esempio pratico: data funzione di $T=2\pi$, dispari, tale che $f(x)=1$ in $(0,\pi)$, determinarne la serie di Fourier.

Osserviamo ciò: come periodo, possiamo per comodità prendere $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, ossia $[-\pi;\pi]$. Se la funzione è dispari, allora essa sarà simmetrica rispetto all'origine. Se è uguale a 1 in $[0,\pi]$, sarà dunque -1 in $[-\pi;0]$. 0 in realtà è una discontinuità di tipo salto: $f(0) = \frac{(-1+1)}{2} = 0$.



Questa funzione è detta "onda quadra".

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx =$$: $f(x)$ dispari, $\cos nx$ pari, $f(x)\cos nx$ dispari. L'integrale vale 0.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,Sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,Sin(nx)\,dx =$$ Da 0 a π, $f(x)=1$, quindi,

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-Cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{Cos(n\pi)}{n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-Cos(n\pi)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi}, & n \text{ dispari} \\ 0, & n \text{ pari} \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} Sin((2n+1)x)$$

Abbiamo così trovato lo sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra.

Ciò che "caratterizza" un segnale, è l'armonica fondamentale, le altre armoniche saranno meno influenti, e daranno un "timbro" al segnale (di qualsiasi tipo).

Notiamo una cosa:

- Se $f(x)$ è pari, avremo $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos(nx)$ [SERIE DI SOLI COSENI]
- Se $f(x)$ è dispari, avremo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin(nx)$ [SERIE DI SOLI SENI].

Come accennato, nelle serie di potenze abbiamo capito quando è possibile rappresentare una funzione come serie di Fourier. Qui il problema è molto più complesso: si divide in 3 punti:

1) Convergenza quadratica
2) Convergenza ~~assol~~ puntuale
3) Convergenza uniforme

Cerchiamo di parlare di convergenza quadratica

Definizione: l'energia associata a un segnale è l'integrale su un periodo del quadrato della funzione (periodica) che studiamo

Dato $T=2\pi$, $I=[0;2\pi)$,

$$E = \int_0^{2\pi} [f(x)]^2\,dx.$$

$$a_0 = \int_0^{2\pi} a_0^2\,dx = 2\pi a_0^2$$

$$a_k Cos(kx) + b_k Sin(kx) \longrightarrow \int_0^{2\pi}\left[a_k Cos(kx)+b_k Sin(kx)\right]^2 dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} a_k^2 Cos^2(kx)\,dx + \int_0^{2\pi} b_k^2 Sin^2(kx)\,dx + 2\int_0^{2\pi} a_k b_k\, Sin(kx)\,Cos(kx)\,dx$$

Per le relazioni di ortogonalità viste in precedenza, abbiamo che tutto ciò è uguale a

$$\pi a_k^2 + \pi b_k^2 = \pi(a_k^2+b_k^2).$$

Dunque, il segnale associato al polinomio trigonometrico, fino all'ordine n. Prendo il segnale, ne faccio lo sviluppo in serie di Fourier, e tronco a un certo n.

$$E = \int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx = 2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k^2+b_k^2)$$

Ciò che si fa in pratica, è prendere un segnale, svilupparlo e troncare certe frequenze. Ottengo un polinomio trigonometrico.

Se $n \to +\infty$ otteniamo il segnale di partenza, almeno idealmente.

Definendo il segnale non convertito, "tagliato" E_n,

$$E_n = \int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx - \left(2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\pi(a_k^2+b_k^2)\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} E_n = 0.$$

Si dice che la serie di Fourier converga quadraticamente a $f(x)$: questo perché $\left(\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f(x)\|_2$ | norma euclidea di $f(x)$

Questa è la norma euclidea al quadrato di $f(x)$. Da ciò, convergenza quadratica.

Parliamo ora delle altre due convergenze, puntuale e uniforme, legate alle serie di Fourier. La relazione

$$\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx = 2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\pi(a_k^2+b_k^2)$$ è detta "uguaglianza di Parseval".

Convergenza puntuale

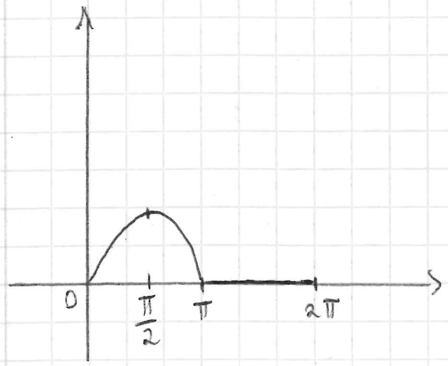
Data $f(x)$, $\in \tilde{C}_{2\pi}$, calcolo i coefficienti di Fourier, a_0, a_n, b_n. A questo punto ho sviluppato in serie la $f(x)$. Fissato un punto $\bar{x}$, cosa mi garantisce la convergenza, in $\bar{x}$?

$$\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[rr, "1"] & & \text{TROVO } a_0;\ a_n;\ b_n \arrow[dl, "2"] \\
& a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx)\right) \arrow[ul, "3"] &
\end{tikzcd}$$

3) Non è sempre possibile: la continuità non è una condizione sufficiente: se abbiamo come $f(x)$ una funzione tipo $x\sin\left(\cancel{\frac{1}{x}}\right)$ ($x \sin x$), abbiamo infinite oscillazioni in un intervallo, dunque ci è impossibile garantire la convergenza di una serie a questa funzione, per quanto continua.

La condizione che cerchiamo affinché "il cerchio si chiuda", è questa: $f(x)$ deve essere, in di un periodo, monotona a tratti.

Esempio pratico:



- Da 0 a $\frac{\pi}{2}$ è monotona crescente
- Da $\frac{\pi}{2}$ a π è monotona decrescente
- Da π a 2π è costante

Il numero di intervalli deve essere finito. In $x\sin(x)$ non lo è, ergo la funzione non è convergente puntualmente. Nel nostro esempio pratico, la funzione è monotona in $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; $[\pi;2\pi]$.

Terminiamo ora il discorso, parlando dell'ultimo tipo di convergenza: la convergenza uniforme.

Convergenza Uniforme

Allora: innanzitutto, una serie di Fourier è combinazione lineare di funzioni seno e coseno. Quindi, continue. Una funzione sviluppata in serie di Fourier per convergere uniformemente deve quantomeno essere continua.

Questa condizione però non ci è sufficiente. Per studiare la convergenza uniforme abbiamo però abbiamo sempre a disposizione un interessante strumento: il criterio di Weierstraß. Proviamo a maggiorare il termine generale della serie:

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(kx)+b_k \sin(kx)\right);$$

$$\|a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\| \leq \|a_k\cos(kx)\|+\|b_k\sin(kx)\| \leq \|a_k\|+\|b_k\|.$$

Se dunque la sommatoria dei moduli di a_n e b_n sommati converge, avremo convergenza uniforme: tutto dipende da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\|a_n\|+\|b_n\|\right).$$

Esempio pratico:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{(2n+1)^2} \quad \text{(già sviluppata in serie di Fourier)}$$

f è continua. Proviamo a maggiorarla con una serie numerica:

$$\left\|\frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}\right\| \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{(Serie numerica convergente)}$$

$f(x)$ è convergente uniformemente.

Studiamo ora la serie derivata: per il teorema della derivazione per serie, necessitiamo di serie "da derivare" convergente puntualmente, cosa che abbiamo, troviamo ora la serie derivata punto a punto, che sarà:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)x]\,\cancel{(2n+1)}}{(2n+1)^{\cancel{2}}};\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)};$$

Proviamo a maggiorare il termine generale:

$$\left\| \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)} \right\| \leq \frac{1}{2n+1}$$ SERIE DIVERGENTE.

Il teorema/criterio di Weierstraß dunque non è applicabile.

Osservazioni: vediamo che con serie del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$$

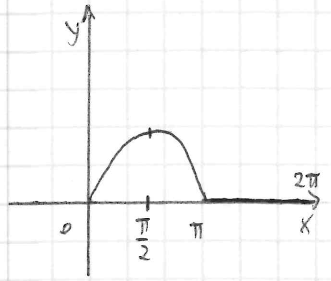
a seconda di α, la serie sarà più o meno regolare. Maggiore sarà α, maggiore sarà la derivabilità/regolarità della serie.

N.B.: avessimo al denominatore un "e^{+n}", la funzione sarebbe C^{∞}.

Abbiamo, per la convergenza uniforme, delle condizioni sufficienti:

1) $f(x)$ deve essere continua $\left(f(x) \in C^{(0)}(I) \right)$
2) $f(x)$ deve essere derivabile eccetto al più in un numero finito di punti
3) $f'(x)$ deve essere continua a tratti (e discontinuità al più di tipo salto).

Esempio pratico:



1) È continua su $T = 2\pi$
2) È derivabile tranne che in $x = \pi$
3) La derivata ha discontinuità salto in $x = \pi$ e basta.

Abbiamo, in questo caso, convergenza uniforme.

Facciamo ora un riassunto di ciò che abbiamo visto, studiando e dicendo come si fa ad avere convergenza, e di quale tipo.

1) Convergenza quadratica: convergenza in norma euclidea della funzione. Perché vi sia la convergenza quadratica della serie di Fourier di f, $f \in \tilde{C}^{(0)}_{2\pi}$: essere periodica e continua a tratti.

Vale la ~~disegno~~ EGUAGLIANZA di Parseval:

$$\int_0^{2\pi} \|f(x)\|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \pi (a_k^2 + b_k^2).$$

A questa è associato un lemma, detto "di Riemann-Lebesgue", che afferma che:

$$\lim_{n \to +\infty} E_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{2\pi} \|f(x)\|^2 dx - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) = 0.$$

Perché vi sia ciò, la serie deve essere convergente, dunque le successioni a_k e b_k con limite infinitesimo, per la condizione necessaria di convergenza della serie. Dunque, per il lemma di Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0.$$

2) Convergenza puntuale: convergenza in un punto della serie di Fourier a f.

Perché vi sia convergenza puntuale della serie a f, $f(x)$ deve essere "monotona a tratti", cioè derivabile a meno di un numero finito di punti, in un periodo.

Notiamo che nelle serie di Taylor studiavamo la convergenza della serie alla funzione. Qua, le condizioni non si studiano tanto sulla serie, quanto sulla funzione da cui prendiamo i coefficienti di Fourier.

3) Convergenza uniforme: per questo tipo di convergenza, in cui serie e funzione coincidono, possiamo applicare il già visto in pro-

estrema "criterio di Weierstraß". Condizioni sufficienti sono la continuità sul periodo della funzione (non a tratti), derivabilità eccetto al più in un numero finito di punti, e derivata prima continua a tratti.

Serie di Fourier Complessa

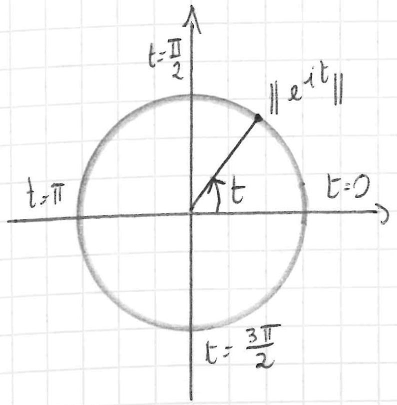
Riprendiamo, dal corso di Analisi I, la formula di Eulero per l'esponenziale complesso:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

Ciò è detto "fasore", perché è quell'entità che "dà la fase", l'angolo.

Il modulo dell'esponenziale complesso, $\|e^{it}\|$, è 1.

$\|e^{it}\| = 1$. Nel piano di Gauss, rappresenta la "distanza dall'origine".



Il fasore è il punto che "gira" su una circonferenza, nel piano complesso.

$e^{it} = \cos t + i\sin t$ avrà verso antiorario

$e^{-it} = \cos t - i\sin t$ è il suo complesso coniugato, e avrà verso orario.

Vogliamo ora, mediante ciò, passare dalla serie di Fourier in forma reale a quella in forma complessa.

Vale la relazione:

$$e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

Questa sarebbe, in $\mathbb{C}$, una rappresentazione delle armoniche

Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} e^{it} = \cos t + i\sin t \\ e^{-it} = \cos t - i\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{it} + e^{-it} = 2\cos t \\ e^{it} - e^{-it} = 2i\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \end{cases}$$

Queste sono dette "formule di Eulero".

Sappiamo che, in $\mathbb{R}$, la serie di Fourier ha una forma del tipo:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Ora che abbiamo espresso, mediante le formule di Eulero, $\cos(t)$ e $\sin(t)$ in $\mathbb{C}$, riesprimiamo la serie di Fourier; il termine generale sarà:

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

Evidenziamo ora i termini e^{int} ed e^{-int}: avremo $\left(\frac{1}{i} = -i\right)$

$$\frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)e^{int} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)e^{-int}$$

Ridefiniamo quindi:

$$\begin{cases} c_0 \equiv a_0 \\ c_n \equiv \dfrac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \\ c_{-n} \equiv \dfrac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \end{cases}$$

In termini di fasori, abbiamo ottenuto due nuove armoniche, espresse come due numeri complessi tra loro coniugati.

La serie di Fourier in forma complessa avrà una forma del tipo:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}\right)$$

Vogliamo ora introdurre un nuovo formalismo per esprimere la serie in complessi: facciamo un cambio di variabili nel secondo termine, $m = -n$. Otteniamo, da c_m, la serie $\sum_{m=-\infty}^{-1} c_m e^{imt}$. Riportiamoci per far prima a $m \equiv n$, cambiamo il nome senza toccare il risultato, e otteniamo:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{int}.$$

Tenendo conto che c_0 si può scrivere come

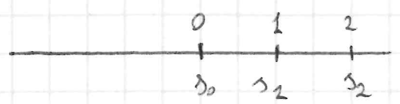
$c_0 = e^{i\cdot 0\cdot t}\cdot c_0$,

la serie può essere riscritta così:

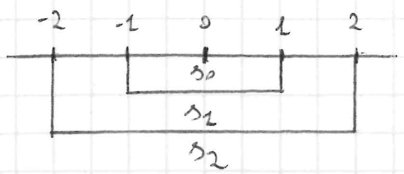
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$.

Che senso ha dire che questa serie converge? Definiamo in modo "simmetrico": la serie è la successione delle somme parziali. Ma invece che andare avanti e basta, noi ci "estenderemo" in intervalli simmetrici dall'origine, sommando le somme parziali fino a $[-n; n]$ non solo da $[0; n]$

Se prima avevamo:



Ora abbiamo:



Come già visto,

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \\ c_0 \equiv a_0 \end{cases}$$

- Se f è pari, i c_n perderanno la parte immaginaria!
- Se f è dispari, i c_n perderanno la parte reale!

La successione dei c_n, "doppia", è detta "spettro del segnale".

Esplicitiamo ora i c_n:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx - i\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos(nx) - i\sin(nx)\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Da qui, possiamo esprimere la serie di Fourier complessa come:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx \qquad n = K\frac{2\pi}{T},\ K\in\mathbb{Z}$$

Osserviamo che ciò di cui disponiamo ora vale a due "limitazioni":

1) K non reale ma discreto, in quanto K appartiene ai relativi

2) Il segnale di cui studiamo lo spettro, deve essere periodico.

Riassumendo, per calcolare la serie di Fourier complessa, calcolo i coefficienti della serie, ne faccio l'integrale e poi la serie dell'integrale.

Uguaglianza di Parseval complessa:

Su $\mathbb{R}$ abbiamo che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|f(x)\|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\pi(a_n^2 + b_n^2);$$

I nostri a_n erano appartenenti a $\mathbb{R}$.

Ora che abbiamo la serie complessa, con $c_0 \dots c_n \in \mathbb{C}$, vale l'espressione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\|c_n\|^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{2}(a_n - i b_n)\right\|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left\|\frac{1}{2}(a_n + i b_n)\right\|^2 =$$

$$= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2) + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2) =,$$

Ma i due termini, poiché abbiamo fatto il valore assoluto (in $\mathbb{C}$, modulo), e sono simmetrici, allora coincidono, e possiamo sommare le due serie:

$$= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

Ciò è molto interessante, in quanto notiamo che, tra l'uguaglianza di Parseval su $\mathbb{R}$ e quella su $\mathbb{C}$, c'è solo una differenza minima: la serie dell'uguaglianza complessa, moltiplicata per fattore 2π, dà la serie dell'uguaglianza reale. Abbiamo un legame tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$!

Trasformate di Fourier

Abbiamo specificato per quali tipi di segnali la serie di Fourier ci permette di trovarne lo spettro: segnali discreti e periodici.
La trasformata di Fourier è la naturale estensione: con essa possiamo studiare segnali continui e aperiodici. Essa è "legata" alla serie di Fourier complessa, come vedremo.
La trasformata di Fourier è un integrale sulla retta reale $\mathbb{R}$ (da $-\infty$ a $+\infty$) di una certa funzione x nel tempo t:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt .$$

Ma cosa significa integrare sulla retta reale? Di primo acchito ci verrebbe da "spezzare" per linearità l'integrale come somma di due integrali, cosa lecita, sommarli, e ottenere una misura.
Ciò che ci causa problemi è un ipotetico caso di somma di infiniti di segno opposto, $(-\infty)+(+\infty)$; $(+\infty)+(-\infty)$: ciò ci bloccherebbe pesantemente.
Ciò che introduciamo, è un nuovo "modo" di integrare integrali impropri, mediante il "senso di valore principale di Cauchy": partiamo da un punto c, e continuiamo a estenderci "simmetricamente" a destra e a sinistra", con un intervallo, per l'appunto, simmetrico.
Dopo aver integrato in tale intervallo, estendiamo all'infinito, facendo il limite dell'integrale trovato.
Definizione: si dice "integrale nel senso di valor principale di Cauchy" la seguente notazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \lim_{m\to\infty}\int_{-m}^{m} x(t)\,dt ;$$

La stessa cosa vale con punti di singolarità: data una singolarità in punto c, in intervallo $[a;b]$, $c \in [a;b]$,

$$\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}x(t)\,dt + \int_{c+\varepsilon}^{b} x(t)\,dt\right)$$

Esempio pratico:

$f(x) = \frac{1}{x}$; $c=0$; $[a;b]=[-1;1]$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(\varepsilon)-\ln(1)+\ln(1)-\ln(\varepsilon)\right)=0$$

(N.B: abbiamo dovuto fare trucchi con la linearità e le proprietà dell'integrale definito).
Definizione di trasformata di Fourier:

$$F\left[x(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \quad , \quad \omega \in \mathbb{R}. \qquad =$$

Per la formula di Eulero, $e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$, dunque

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)\,dt \;-i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)\,dt$$

Intuitivamente, otterremo una funzione di ω, se i due integrali convergeranno. In questi due integrali, Coseno e Seno vengono "modulati" da $x(t)$. Ciò che otterremo, sarà una funzione complessa.
Immaginiamo di fare infatti prove con diversi valori di ω: man mano che ne "troveremo" di nuovi, delineeremo meglio la trasformata.
La notazione
"$F[x(t)](\omega)$" rappresenta la dicitura "trasformata di Fourier della funzione del tempo t $x(t)$, dipendente da ω".

Nota pre-esempio: dato un esponenziale complesso, e^{it}, $= \cos t + i \sin t$, si può lavorare, per derivare/integrare, tranquillamente su seni e coseni, separatamente, e sommare, dividendo componenti reali e componenti immaginarie.

Prove:

$$(e^{it})' = (\cos t + i\sin t)' = -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t) = i\cdot e^{it}.$$

$$\int e^{it}\,dt = \frac{1}{i}\cdot e^{it} + c = -i\cdot e^{it} + c.$$

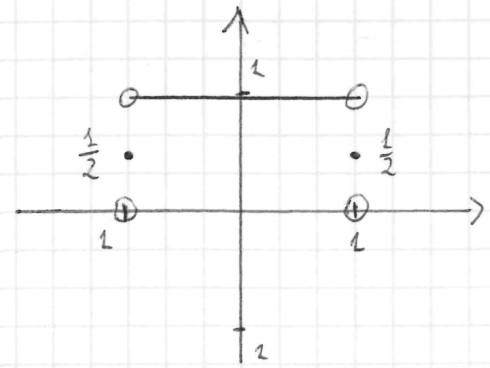
Esempio pratico: calcolare la trasformata di Fourier del segnale così definito:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} & t = -\frac{T}{2} \text{ o } t = \frac{T}{2} \\ 0 & \text{se } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Questa funzione è detta "porta", ed è la rappresentazione matematica di un interruttore.

Diamone una rappresentazione grafica, con $T=2$:

$$\frac{T}{2} = 1$$



$$F[p_T(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t)\, e^{-i\omega t}\,dt = \dots$$

Poiché la funzione è identicamente nulla in $|t| > \frac{T}{2}$, possiamo scrivere ciò:

$$\dots = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\cdot e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \frac{e^{-i\omega\frac{T}{2}} - e^{i\omega\frac{T}{2}}}{-i\omega} = \dots$$

Questa sarebbe la trasformata. Volendo "scrivere meglio", notiamo la similitudine con la funzione seno, e moltiplichiamo per $\frac{2}{2}$

$$\dots = \frac{-2\left(e^{i\omega\frac{T}{2}} - e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right)}{-2i\omega} = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Vediamo che, per $\omega = 0$, abbiamo un buco nel dominio. Calcoliamo a parte la trasformata con $\omega = 0$:

$$F[p_T(t)](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t)\, e^{0}\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\,dt = T$$

Dunque,

$$F[p_T(t)](\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right) & \omega \neq 0 \\ T & \omega = 0 \end{cases}$$

Notiamo e noteremo che spesso ci capiterà di avere a che fare con funzioni "a supporto compatto": ciò significa che esiste un numero $m > 0$ tale per cui, $x(t) = 0 \ \forall t : |t| > m$.

La trasformata spesso si fa per tratti "piccoli".

Se $x(t)$ è a supporto compatto e continuo (a tratti), allora $x(t)$ ammette, a certe condizioni, trasformata di Fourier.

Esistono funzioni non trasformabili secondo trasformata di Fourier.

Prendiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\,dt.$$

Facciamone la convergenza assoluta: ricordiamo che $\|e^{-i\omega t}\| = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\, e^{-i\omega t}\|\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|\,dt.$$

Definizione: $x(t)$ si dice "appartenente a $L^1(\mathbb{R})$", se $\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|\,dt$ è un integrale convergente.

Teorema: se $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora essa ammette trasformata di Fourier. Questa è una condizione sufficiente di trasformabilità.

Dimostrazione:

$\| x(t) e^{-i\omega t} \| = \|x(t)\|$.

Per il teorema di convergenza assoluta di un integrale, se $\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\| dt$ converge (assolutamente), allora convergerà anche $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$, ossia la trasformata di Fourier.

Esempio pratico

Determinare la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$

$$F[e^{-a|t|}](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cos(\omega t) dt = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-a|t|} \cos(\omega t) dt$$

Integrando per parti, si ottiene che

$$F[e^{-a|t|}](\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

N.B.: abbiamo considerato due trasformate che trasformano da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. In realtà, è un caso molto particolare:

- se $x(t)$ è reale e pari, $x(t) \cos t$ sarà pari, $x(t) \sin t$ sarà dispari, di conseguenza integreremo solo col $\cos t$, poiché funzioni dispari su intervalli simmetrici hanno integrale nullo.
- se $x(t)$ è reale e dispari stesso discorso al contrario: $\int_{-m}^{m} x(t) \cos t \, dt = 0$, $\int_{-m}^{m} x(t) \sin t \, dt = 2 \int_{0}^{m} x(t) \sin t \, dt$.

- Nel primo caso, la trasformata sarà "puramente reale", nel secondo "puramente immaginaria". Infatti si annullano rispettivamente i termini immaginari e reali. Se $x(t)$ non è né pari né dispari, la trasformata sarà complessa, in linea di massima.

Proprietà formali della trasformata di Fourier

Consideriamo come ipotesi che le funzioni siano trasformabili secondo Fourier; abbiamo le seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

- Linearità: dato uno spazio vettoriale, la trasformata di Fourier è un operatore lineare, se ivi agisce. Data una combinazione lineare di due funzioni, si possono applicare i teoremi di linearità della trasformata (in quanto essa è un integrale).

$$F[a x(t) + b y(t)](\omega) = a X(\omega) + b Y(\omega).$$

- Traslazione: dato $a \in \mathbb{R}$,

$$F[x(t+a)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+a) e^{-i\omega t} dt \quad ; \quad s = t+a;$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-i\omega(s-a)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-i\omega t} \cdot e^{i\omega a} dt = e^{i\omega a} X(\omega).$$

Traslare di punto sulla retta reale la trasformata equivale a moltiplicarla per il fasore ad essa associato.

- Modulazione: dato un esponenziale immaginario e^{iat} col quale intendiamo "modulare" la $x(t)$,

$$F[e^{iat} \cdot x(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i(\omega-a)t} dt =$$

$$= X(\omega - a)$$

Effettuo una traslazione nel "dominio delle frequenze".

Esempio pratico 1

determinare la trasformata di Fourier della $x(t)$ seguente:

$$x(t) = \begin{cases} 10 & 1 < t < 5 \\ 0 & t < 1 \vee t > 5 \end{cases}$$

Notiamo la similitudine con una porta. Applicando linearità e traslazioni, ci riconduciamo a una porta di $T = 5-1=4$, traslata di 3 verso destra:

$p_4(t) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{4\omega}{2}\right) = \frac{2}{\omega} \sin(2\omega)$; trasliamo di 3 verso destra:

$\Rightarrow p_4(t-3) = e^{-3i\omega} \frac{2}{\omega} \sin(2\omega)$; ampliamo di 10 volte con linearità

$\Rightarrow 10\, p_4(t-3) = e^{-3i\omega} \frac{20}{\omega} \sin(2\omega)$.

Esempio pratico 2

$$x(t) = \begin{cases} \sin(t) & -\pi < t < \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$

Possiamo procedere in due modi:

1) Calcolo diretto: lavorando col seno mediante le formule di Eulero, $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, e integriamo

2) Possiamo vedere la funzione come prodotto della porta di $T = 2\pi$ centrata in 0, e del seno. A questo punto, applicare la modulazione.

$\sin(t) \cdot p_{2\pi}(t) =$ USANDO TABELLE ED EULERO: $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{\omega} \sin(\pi\omega) \cdot \frac{1}{2i} \left(\underset{(1)}{e^{it}} - \underset{(2)}{e^{-it}}\right) \Rightarrow$ MODULAZIONE $\Rightarrow$ $a_1 = 1$, $a_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{1}{2i} \left[\frac{2}{\omega-1} \sin(\pi(\omega-1)) - \frac{2}{\omega+1} \sin(\pi(\omega+1)) \right]$

Ricondursi a trasformate note per applicarne proprietà può essere cosa molto utile a fini pratici.

Andiamo avanti con le proprietà:

- Riscalamento: dato $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, vogliamo "riscalare" l'asse delle t. Consideriamo il caso con $a < 0$; esso funzica per comprendere anche a positive.

$a < 0$

$F[x(a \cdot t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a \cdot t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ [SOSTITUIAMO $a \cdot t = s$; $t = \frac{s}{a}$; $dt = \frac{ds}{a}$]

$\Rightarrow \int_{+\infty}^{-\infty} x(s)\, e^{-i\omega \frac{s}{a}} \cdot \frac{ds}{a}$ [POICHÉ $a < 0$, PER MANTENERE SENSATA LA SOSTITUZIONE, "CONVIENE" SCAMBIARE GLI INFINITI]

$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, e^{-i \frac{\omega}{a} s}\, ds = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

La proprietà così posta vale per $a > 0$, anche.

- Trasposizione: è un caso particolare di riscalamento, con $a = -1$.

$F[x(a \cdot t)](\omega) = F[x(-t)](\omega) = X(-\omega)$.

- Coniugazione: vogliamo trovare, data una $x(t)$ e la sua $X(\omega)$, un'eventuale relazione con le rispettive coniugate.

$F\left[\overline{x(t)}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}\, e^{-i\omega t}\, dt \Rightarrow$ IL CONIUGATO DI TUTTO L'INTEGRANDO È $\overline{x(t) e^{i\omega t}}$:

$\Rightarrow \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{i\omega t}\, dt} \Rightarrow \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i(-\omega)t}\, dt} = \overline{X(-\omega)}$.

Osserviamo ora due interessanti proprietà di questa trasformata integrale, che meglio verrà sfruttata nella trasformata di Laplace: la derivabilità rispetto a una variabile.

- Derivazione rispetto al tempo t

$$F\left[x'(t)\right](\omega) = i\cdot\omega\cdot X(\omega).$$

- Derivazione rispetto alla pulsazione ω (N.B: $\omega = 2\pi f$, $\omega \propto f$)

$$X'(\omega) = F\left[-i\cdot t\cdot x(t)\right](\omega).$$

Discutiamo queste proprietà, dopo averle descritte meglio: vediamo che, con questa proprietà, leghiamo delle derivate e delle moltiplicazioni. In parole povere, mediante la trasformata di Fourier, è possibile risolvere alcuni tipi di equazioni differenziali, trasformandole in semplici prodotti. Sfruttiamo tale proprietà:

$x(t) \longrightarrow X(\omega)$

$-i\cdot t\cdot x(t) \longrightarrow X'(\omega) \iff t\cdot x(t) \longrightarrow i\cdot X'(\omega)$

$i^2 t^2 x(t) \longrightarrow i^2 X''(\omega) \iff -t^2 x(t) \longrightarrow -X''(\omega)$

Con l'altra proprietà,

$x'(t) = i\cdot\omega\cdot X(\omega)$

$x''(t) = -\omega^2 X(\omega)$

$x^{(n)}(t) = (i\cdot\omega)^n X(\omega)$ (generale).

Prima di terminare con le proprietà vere e proprie, introduciamo un "nuovo" operatore: l'antitrasformata di Fourier.

Cosa abbiamo fatto finora: dataci una funzione $x(t)$, ossia una funzione nel dominio dei tempi "t", ne abbiamo fatto l'analisi armonica, trovando così la funzione nel dominio delle frequenze; ricordiamo che $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Ciò che faremo ora "tornando indietro", è la "sintesi armonica", cioè tornare nel dominio dei tempi.

Per definizione (almeno per noi) consideriamo l'antitrasformazione di Fourier l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$ Esso va in realtà "corretto di 2π":

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = F^{-1}\left[X(\omega)\right](t).$$

Dal punto di vista formale, trasformata e antitrasformata sono piuttosto simili: cambia solo il segno dell'esponente.

Cosa ci chiediamo ora: se noi prendiamo una $x(t)$, ne facciamo prima l'analisi armonica (la trasformiamo), poi la sintesi armonica (antitrasformiamo), cosa speriamo di ottenere? Il segnale di partenza, regolarizzato con la regola "del valor medio" nei punti di discontinuità (a tratti, ovviamente, quindi numero finito di punti di salto).

Proseguiamo ora nell'elenco delle proprietà:

- Simmetria: vogliamo chiederci quale sia il significato di un'ipotetica "seconda trasformazione di Fourier" su di una funzione $x(t)$. Data $x(t)$,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, e^{-i\omega s} \iff \left[\text{APPLICHIAMO UN CAMBIO DI VARIABILI, } s=-t.\text{ OTTENIAMO:}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_{+\infty}^{-\infty} x(-t)\, e^{i\omega t}\, dt = +\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{i\omega t}\, dt = 2\pi\cdot F^{-1}\left[x(-t)\right](\omega).$$

Se applichiamo la trasformazione di Fourier per una seconda volta, otteniamo:

$\Rightarrow 2\pi\, F\left[F^{-1}\left[x(-t)\right](\omega)\right](t) = 2\pi\, x(-t)$, normalizzata al valor medio.

Passiamo ora all'ultima proprietà della trasformata di Fourier:

- Convoluzione: si tratta dello studio dell'interazione tra due segnali.

Data una funzione $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$, fare la convoluzione dei due segnali significa:

$$F\left[(x * y)(t)\right](\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Il "prodotto di convoluzione" delle due funzioni nel tempo $x(t)$ e $y(t)$ equivale al "prodotto algebrico" delle relative trasformate di Fourier.

Il prodotto di convoluzione, "$*$", è un operatore commutativo.

Ragioniamoci sopra: dati due segnali, $x(t)$ e $y(t)$,

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

Consideriamo x nella funzione integrale, in variabile τ, e y di $(t-\tau)$. Avremo dunque una funzione traslata di t e ruotata.

In sostanza fare il prodotto di convoluzione significa fare il prodotto di tutte le "possibili traslazioni" tra i due segnali.

Esempio pratico:

Convoluzione di una porta con sé stessa.

$$p_T(t) * p_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t) \cdot p_T(t-\tau)\, d\tau .$$

La porta è una funzione pari, possiamo dunque dire che $p_T(t-\tau) = p_T(\tau-t)$.

Abbiamo dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_T(\tau) \cdot p_T(\tau-t)\, d\tau .$$

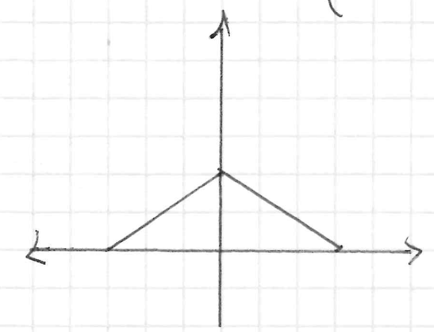
La porta è formata da: $p_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases}$.

Dunque, se $t \geq T \vee t < -T$, i due segnali saranno "a supporto disgiunto", e quindi, nulli i prodotti di convoluzione.

Se $t = 0$, $p_T \cdot p_T = 1$.

Nel caso più generale, per $-T < t < T$,

$$p_T(\tau) * p_T(\tau - t) = : \begin{cases} -T < t < 0, & \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau = T - t \\ 0 < t < T, & \int_{\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} d\tau = t - T \end{cases}$$



PRODOTTO DI CONVOLUZIONE DI UNA PORTA PER SÉ STESSA.

N.B.: passando due funzioni alle trasformate, facendo il prodotto di convoluzione e l'antitrasformata di ciò, otteniamo il prodotto di convoluzione delle due funzioni.

Dimostrazione: date $x(t), y(t) \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x * y)(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-i\omega t}\, dt =$$

SCOMPONENDO $e^{-i\omega t} = e^{-i\omega(t-\tau+\tau)} = e^{-i\omega(t-\tau)} \cdot e^{-i\omega\tau}$,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-i\omega(t-\tau)}\, e^{-i\omega\tau}\, dt =$$

SI DOVREBBE DIMOSTRARE CHE È POSSIBILE SCAMBIARE I DUE INTEGRALI.

DIAMOLO PER SCONTATO

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\, e^{-i\omega(t-\tau)}\, dt \right) x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \; ; \quad \text{Poniamo } t-\tau = s \, ;$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(s)\, e^{-i\omega s}\, ds \right) x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y(s)\, e^{-i\omega s}\, ds =$$

$$= X(\omega) \cdot Y(\omega) .$$

Ora che abbiamo introdotto le proprietà, torniamo al problema precedente: la trasformabilità di una funzione.
Data $x(t)$ a supporto compatto e continua a tratti, non ho problemi a calcolarne la trasformata di Fourier. Su $\mathbb{R}$ garantire ciò è peggio.
Per questo abbiamo introdotto lo spazio $L^1(\mathbb{R})$.
Vale un teorema sulla trasformata: data una $X(\omega)$, essa soddisfa due proprietà:

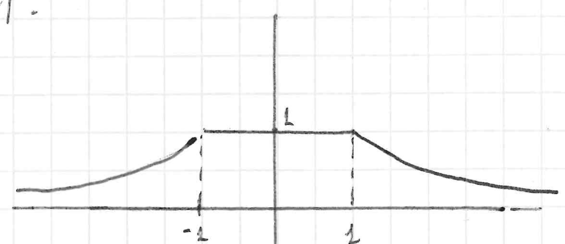
- $X(\omega)$ è continua e limitata in $\mathbb{R}$
- $\lim_{\omega \to \pm\infty} X(\omega) = 0$.

La seconda proprietà è un'applicazione/estensione del teorema di Riemann-Lebesgue nelle serie di Fourier, sui coefficienti.
La funzione che meglio segue tali regole, è la gaussiana, e^{-t^2}.
Poiché $L^1(\mathbb{R})$ è una condizione forte, e inutile ai nostri scopi, chiediamo di meno: $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 \, dt \text{ converge} \iff x(t) \in L^2(\mathbb{R}).$$

L'integrale appena scritto è l'"energia di un segnale". Se esso converge, il segnale è a "energia finita".
Poiché usiamo funzioni infinitesime, una funzione può essere $L^2(\mathbb{R})$, e non $L^1(\mathbb{R})$: il quadrato del modulo aumenta la violenza con cui tende a 0.
Prendiamo una particolare $x(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 1 & |t| < 1 \\ x(t) = \frac{1}{|x|} & |t| \geq 1 \end{cases}$$



Cosa facciamo: estendiamo a L^2 la trasformata.
Vediamo che la funzione da -1 a 1, $I_1 = [-1;1]$, è una porta, quindi trasformabile. Estendendola, da I_1 a $I_2 = [-2;2]$, abbiamo una funzione trasformabile, a supporto compatto.
Generiamo così una successione di trasformate $X_n(\omega)$. La trasformata della massima approssimante sarà: $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega)$.
Estendiamo ora infine il teorema di Parseval, nel "teorema di Parseval-Plancherel": data $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $\exists\, X(\omega)$, e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(\omega)\|^2 \, d\omega.$$

Ossia dell'energia del segnale calcolata nello spazio delle frequenze.

Trasformata di Laplace

Definizione: data $x(t)$, la trasformata di Laplace di $x(t)$ è la funzione

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} \, dt$$

Facciamo ora alcune osservazioni ed esempi prima di introdurre un formalismo più rigoroso: $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, anche se in effetti non ci interessa tanto: la trasformata di Laplace è infatti un integrale nella semiretta positiva, cioè in $I = [0, +\infty)$.
Le due scuole di pensiero sono:

- Rendere funzioni definite su $\mathbb{R}$ e integrare solo in $[0, +\infty)$
- Rendere funzioni definite in $\mathbb{R}_+$, e per $[-\infty; 0]$, $x(t) = 0$.

I risultati sono ovviamente del tutto analoghi.
Precisiamo ancora che "s" sarebbe una variabile complessa. Per noi, invece,

sarà reale, in quanto non sappiamo ancora studiare funzioni complesse in modo approfondito. Le proprietà che illustreremo sono esattamente uguali in $\mathbb{C}$, come vedremo in Analisi Complessa.

Passiamo ad alcuni esempi pratici, per renderci conto di alcune cose:

Esempio pratico 1:

$x(t) = 1$; calcolare $\mathcal{L}[1](s)$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = \frac{-1}{s} e^{-st} = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty}$$

Ci chiediamo ora: dove esiste, la trasformata di Laplace appena calcolata? Vediamo un po':

- Se $s > 0$, facciamo $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-st}}{-s} = 0$.
  La trasformata dunque esiste sempre, per $s > 0$.
- Se $s < 0$, avremmo una forma del tipo: $\frac{e^{st}}{s}$; $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{st}}{s} = +\infty$.
  Il limite diverge, la trasformata non esiste per $s < 0$.
- Se $s = 0$, dividiamo per 0, operazione non permessa.

Ciò che facciamo facendo il limite per $t \to +\infty$, è valutare la funzione in $[+\infty]$ e $[0]$.

Se $s > 0$, $\mathcal{L}[1](s) = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$.

Esempio pratico 2:

$x(t) = e^{5t}$; calcolare $\mathcal{L}[e^{5t}](s)$.

$$\mathcal{L}[e^{5t}](s) = \int_0^{+\infty} e^{5t} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-5)t}\, dt = \dots$$

In base alle osservazioni dell'esempio pratico 1,

$s - 5 > 0 \iff \exists\, \mathcal{L}[e^{5t}](s)$;

La trasformata di Laplace esisterà per $s > 5$. Essa sarà: $\frac{1}{s-5}$.

Cosa abbiamo osservato dai due esempi: la trasformata di Laplace converge solo per s "da un certo valore in poi".

Esistono casi limite in cui essa converge/esiste su $\mathbb{R}$, o in nessun punto, come vedremo.

Notiamo che però la trasformata di Laplace è molto meno "schizzinosa" di quella di Fourier: funzioni tendenti all'infinito, possono in effetti avere trasformata di Laplace.

Osserviamo che, inoltre, ciò è dovuto dal fatto che gli esponenziali per cui moltiplichiamo sono diversi: e^{-st} è una funzione violentemente convergente, $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ è di fatto una funzione oscillante.

Introduciamo il formalismo: data $x(t)$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, essa è "trasformabile secondo Laplace" se:

$\int_0^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt$ CONVERGE, PER QUALCHE $s \in \mathbb{R}$.

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt.$$

Vale un interessante teorema:

Teorema: Date come ipotesi $x(t)$ trasformabile secondo Laplace, e punto $s_0 \in \mathrm{dom}(X(s))$, allora:

- Dato $s > s_0$, $s \in \mathrm{dom}(X(s))$: a "destra" del nostro s_0, la trasformata di Laplace esisterà sempre.
- Posta $y(t) = t^n x(t)$, $n \geq 1$, ~~se~~ allora $s \in \mathrm{dom}(Y(s))$, con $s > s_0$.
  Ciò significa che moltiplicare per un polinomio di grado n non varia la convergenza dell'integrale. Questo perché:

$$\int_0^{+\infty} x(t) e^{-s_0 t}\, dt \implies \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-s_0 t}\, dt \cdot e^{-(s-s_0)t}\, dt.\ ;$$

di fatto, anche moltiplicando per una polinomiale, ci guadagnamo un esponenziale, e due esponenziali infinitesimi sono ben più violenti di un polinomio.
Abbiamo dunque visto che, fissato s_0, non abbiamo problemi ad andare "verso destra". Qual è però il mio s_0 limite, verso sinistra?
Definizione: dato l'insieme degli s, tali che $s \in dom(X(s))$, considero l'estremo inferiore, α_x,
$\alpha_x = \inf\{s : s \in dom(X(s))\}$.
α_x è chiamata "ascissa di convergenza", α_x può essere escluso o compreso nell'insieme di convergenza.
Casi estremi:
- $\alpha_x = -\infty$: esempio classico è $x(t) = e^{-t^2}$: non esistono s abbastanza piccoli da far divergere l'integrale
- $\alpha_x = +\infty$: esempio, $x(t) = e^{t^2}$: non è possibile ottenere un infinito violento come questo.

Cerchiamo dunque una condizione che ci garantisca la massima trasformabilità secondo Laplace: per far ciò, introduciamo il concetto di "funzioni di ordine esponenziale".
Definizione 1: data $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, essa si dice "di ordine esponenziale" se esistono $M \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, tali per cui
$|x(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.
Definizione 2: si definisce "ordine esponenziale di $x(t)$" la quantità "γ" minima, per cui $x(t)$ converge minore di $Me^{\gamma t}$.
Cosa intendiamo fare: abbiamo fatto esempi pratici in cui la trasformata di un esponenziale converge. Se dunque maggioriamo il modulo della $x(t)$ con un esponenziale, allora pure $x(t)$ convergerà.
Esempio pratico: vari esempi di funzioni di ordine esponenziale
1) $x(t) = t$;
$t \leq e^t$, $\forall t \geq 0$. $\gamma_x = 1$.

2) $x(t) = e^{t^3}$
$\nexists M e \gamma : e^{t^3} \leq Me^{\gamma t}$ $\forall t \geq 0$: e^{t^3} non è di ordine esponenziale, in quanto non è maggiorabile con nessun $Me^{\gamma t}$.
3) $x(t) = te^{4t}$
Si può vedere che per ogni $\gamma > 4$ esiste un M tale per cui si può maggiorare la funzione te^{4t}, con $Me^{\gamma t}$.
4) $x(t)$ limitata : è possibile maggiorare questo tipo di funzioni con esponenziali $Me^{\gamma t}$, $\gamma \leq 0$.
Cerchiamo di spiegare meglio: se riesco circa a raggiungere l'"ordine della funzione", con un γ appropriato, potrò effettuare dilatazioni e compressioni con un M scalare reale, che permette di ottenere la condizione di maggiorazione che desideriamo.
Abbiamo introdotto ciò per introdurre un teorema molto utile sulla convergenza della trasformata di Laplace:
Data una funzione $x(t)$ tale che:
- Sia da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Sia definita quantomeno in $[0, +\infty)$
- Sia continua a tratti
- Sia di ordine esponenziale γ_x

VALE IL SEGUENTE TEOREMA

Teorema: se $x(t) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$, allora é trasformabile secondo Laplace, e il dominio della trasformata $X(s)$ include o coincide con l'insieme degli s tali per cui $s > \gamma_x$, γ_x ordine esponenziale di $x(t)$.

$\text{dom}(X(s)) \supseteq \{ s : s > \gamma_x \}$

Il teorema non fornisce garanzie sulla convergenza in $s = \gamma_x$, caso da verificarsi separatamente.

Dimostrazione: data $x(t) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$, sappiamo che esistono M e γ tali per cui

$\|x(t)\| \leq M e^{\gamma t} \quad \forall t \geq 0.$

Moltiplico ambo i membri per l'esponenziale e^{-st}:

$\|x(t) e^{-st}\| \leq M e^{\gamma t} e^{-st}$; $M e^{\gamma t} e^{-st} = M e^{-(s-\gamma)t}$

Se $s > \gamma$, abbiamo al membro destro una quantitá positiva, e dunque un esponenziale decrescente da 0 a $+\infty$, sicuramente integrabile. Dunque, $x(t) e^{-st}$, in quanto minore, sará di sicuro integrabile.

Trovato γ_x, esso coincide con il mio s_0, ossia il punto di partenza nel dominio delle s da cui la trasformata esiste, poiché l'integrale converge in essa.

Vale, sulla trasformata di Laplace, un interessante teorema;

Teorema: data $x(t) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$, allora $\lim_{s \to +\infty} X(s) = 0$. [Per $s \to \infty$, le trasformate di Laplace tendono a 0]

Dimostrazione: prendiamo $X(s)$ in valore assoluto e maggioriamola e minoriamola. In quanto in valore assoluto sará maggiore o uguale a 0, e minore o uguale della definizione di trasformata stessa.

$0 \leq \|X(s)\| \leq \left\| \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \right\|.$

Vale il teorema che afferma che $\left\| \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \right\| \leq \int_0^{+\infty} \|x(t)\| e^{-st} dt$. $e^{-st} > 0$, quindi non includiamo nel modulo.

Poiché $x(t) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$, essa é di ordine esponenziale, e quindi é maggiorabile con funzione del tipo $M e^{\gamma t}$.

$$\int_0^{+\infty} M e^{\gamma t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} M e^{-(s-\gamma)t} dt = M \cdot \frac{1}{s-\gamma}.$$

$0 \leq \|X(s)\| \leq M \frac{1}{s-\gamma}.$

Per $s \to \infty$, e il teorema dei due carabinieri, $X(s)$ tenderá a 0.

Proprietá della trasformata di Laplace

Spesso le proprietá della trasformata di Laplace sono in qualche modo "simili" a quelle della trasformata di Fourier. Analizziamole:

- Linearitá: la trasformata di Laplace é un operatore lineare: date $x(t), y(t) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$, le trasformate $X(s), Y(s)$,

$\mathcal{L}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha X(s) + \beta Y(s).$

- Riscalamento: data $x(t) \in \mathcal{L}(0, +\infty)$, e $a > 0$, allora vale la proprietá:

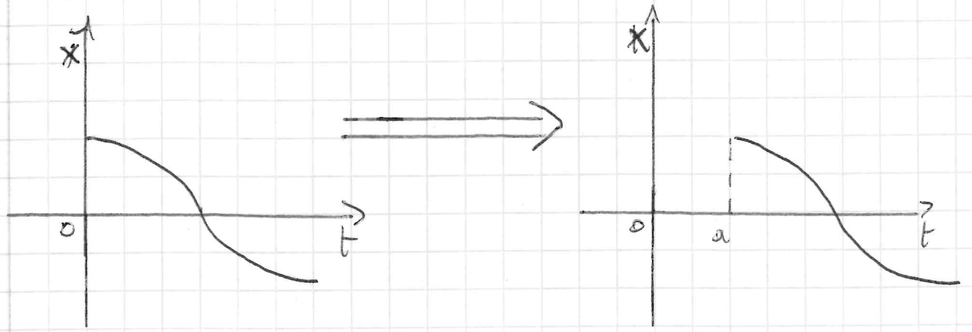
$\mathcal{L}[x(a \cdot t)](s) = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$;

In qualche passaggio, dimostriamo:

$$\int_0^{+\infty} x(a \cdot t) e^{-st} dt = \left[a \cdot t = z; \quad t = \frac{z}{a}; \quad dt = \frac{1}{a} dz\right] = \frac{1}{a} \int x(z) e^{-\frac{s}{a} z} dz = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

N.B.: $a < 0$ non ha senso: $a < 0$ implica ribaltare la funzione ma noi sappiamo che, prima di 0, essa é identicamente nulla. Parlare dunque di $a<0$ in trasformate di Laplace non ha significato alcuno.

- Traslazione: se, data una funzione $x(t) \in \mathcal{L}(0;+\infty)$, intendiamo traslarla, dobbiamo tener conto di una cosa: a sinistra di 0 la funzione è identicamente nulla, quindi, data ad esempio $x(t) = Cos(t)$, una traslazione verso destra di a, $Cos(t-a)$, avrebbe un effetto del tipo:



A sinistra di "a", abbiamo 0!

Per fare un lavoro simile, con Fourier avremmo utilizzato una porta $p_T(t)$, che, moltiplicata per il seno/coseno, l'avrebbe "troncato". Ma con Laplace non è una scelta felice: esiste una funzione più maneggevole della porta $p_T(t)$: il "gradino" $u(t)$: la funzione gradino è definita come:

$$u(t)\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

Il primo stratagemma che potrebbe venirci in mente è il prodotto di $u(t-a)$ e $u(t-b)$, ottenendo una porta.

Ciò non conviene: si tirerebbero in ballo inutilmente prodotti di convoluzione, operazioni delicate da usare.

Come meglio vedremo ancora, la tattica intelligente è considerare una funzione tale che sia della forma "$u(t-a) - u(t-b)$", in modo da ottenere comunque una porta, in un modo più intelligente.

Torniamo a un ragionamento più basilare (quello che abbiamo esposto servirà anche per la proprietà di Modulazione): se intendiamo traslare una $x(t)$ nel dominio dei tempi di "a", l'opportuna "trasformazione" è considerare la funzione (data ad esempio $Cos(t-a)$)

$x(t) = Cos(t-a)\,u(t-a)$ [CIÓ TRASLA IL COSENO E ANNULLA TUTTO CIÓ CHE STA PRIMA DI "a"]

Viene, per la traslazione, definita la "prima formula del ritardo" come:

$$\mathcal{L}[x(t-a)\cdot u(t-a)](s) = e^{-as}X(s)$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{L}[x(t-a)u(t-a)] = \int_a^{+\infty} x(t-a)e^{-st}\,dt \qquad t-a=z;\quad t=a+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x(z)e^{-(z+a)s}\,dz = e^{-sa}\int_0^{+\infty} x(z)e^{-zs}\,dz = e^{-sa}X(s).$$

N.B.: la formula talvolta può non essere precisamente in quella forma; bisogna in tal caso ricondursi a essa.

Esempio pratico:

$$x(t) = \begin{cases}0 & t<0 \vee t\geq\pi\\ Sin(t) & 0\leq t<2\pi\end{cases}$$

Limitiamo $x(t)$ con $[u(t-a) - u(t-b)] = [u(t) - u(t-2\pi)]$. Avremo:

$$\mathcal{L}[[u(t)-u(t-2\pi)]Sin(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)Sin\,t](s) - \mathcal{L}[u(t-2\pi)Sin\,t](s)\ \text{[LINEARITÀ]}$$

Per la prima trasformata non abbiamo problemi di alcun tipo; per la seconda sì: non siamo nella situazione che desideriamo. Mediante la periodicità, possiamo dire che $Sin(t) = Sin(t-2\pi)$, e dunque riadattare la funzione!

N.B.: questo trucco non è quasi mai utilizzabile, e a seconda della $x(t)$ va cambiata strategia.

- Modulazione: vale la seconda formula del ritardo:

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)](s) = X(s-a)$$

Dimostrazione: $\int_0^{+\infty} e^{at}x(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-(s-a)t}\,dt = X(s-a)$.

• Derivazione rispetto a t: date come ipotesi $x(t), x'(t) \in \mathcal{L}(0,+\infty)$, $x(t)$ continua in $(0,+\infty)$, allora

$$\mathcal{L}[x'(t)](s) = sX(s) - x(0^+)$$

$$X(0^+) = \lim_{t \to 0^+} x(t)$$

La trasformata della derivata della $x(t)$ è dunque la trasformata della $x(t)$, moltiplicata per la variabile della trasformata, e sottraendo la funzione valutata nel limite destro di 0, 0^+.

La cosa più interessante di questa formula, è che è reiterabile: migliorando le ipotesi, posso calcolare la derivata successiva, e ottenere una forma del tipo: [esempio per la derivata seconda]

$$\mathcal{L}[x''(t)](s) = s\left(sX(s) - X(0^+)\right) - x'(0^+) = s^2X(s) - sX(0^+) - x'(0^+)$$

Da equazioni differenziali, mediante trasformate, ottenere equazioni algebriche, ben più facili da gestire.

La cosa in determinati casi può pure tornare utile per calcolare facilmente la trasformata di Laplace di una funzione.

Esempio pratico:

$x(t) = Sin(at)$;

Facciamo due volte la derivata, ottenendo:

$x'(t) = a\,Cos(at)$; $\quad x''(t) = -a^2 Sin(at)$; $\quad x''(t) = -a^2 x(t)$

Noi dalla proprietà sappiamo anche che

$$\mathcal{L}[x''(t)](s) = \mathcal{L}[-a^2 x(t)](s) = -a^2 X(s)$$

Ma anche che:

$$\mathcal{L}[x''(t)](s) = s^2 X(s) - s\,x(0^+) - x'(0^+)$$

Vediamo che:

$$-a^2 \mathcal{L}[Sin(at)](s) = \mathcal{L}[-a^2 Sin(at)](s) = \mathcal{L}[Sin''(at)](s) = s^2 \mathcal{L}[Sin(at)](s) - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a^2 X(s) = s^2 X(s) - a; \qquad -X(s)(a^2 + s^2) = -a; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

• Derivazione rispetto a s: data $x(t) \in \mathcal{L}(0,+\infty)$, allora

$$X'(s) = -\mathcal{L}[t \cdot x(t)](s)$$

Dimostrazione:

$$X'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Si dimostra che è lecito "scambiare il simbolo di integrale e di derivata", ottenendo che

$$X'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(x(t)e^{-st}\right)dt \Rightarrow$$

Ma $x(t)$ è costante rispetto a una variazione ds:

$$\Rightarrow = \int_0^{+\infty} -t\,x(t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}[t \cdot x(t)](s)$$

Moltiplicare per la variabile la funzione trasformanda, $x(t)$, equivale a derivare la trasformata.

La trasformata di Laplace ammette proprietà nuove rispetto a quella di Fourier: due proprietà "simmetriche" rispetto a quelle di derivazione. Analizziamole:

• Integrale della trasformata di Laplace: data funzione $\frac{x(t)}{t} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$, allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{x(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} X(z)\,dz$$

Se moltiplicare per t la funzione $x(t)$ ci produce la derivata della funzione, dividere per $x(t)$ ci produce l'integrale della funzione (per funzione intendiamo funzione trasformata secondo Laplace).

Dunque,

$$\mathcal{L}\left[\frac{x(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} X(z)\,dz$$

Se poniamo $s=0$, l'estremo superiore va comunque a $+\infty$, e quindi l'integrale può partire da 0. Non sempre ha senso fare ciò, a seconda del dominio di $X(s)$

Altra osservazione: abbiamo una primitiva del tipo

$\int_s^{+\infty} X(z)\,dz$: La variabile della funzione integrale è all'estremo inferiore, caso mai visto prima!

Usando la proprietà dell'integrale definito,

$$\int_s^{+\infty} X(z)\,dz = -\int_{+\infty}^{s} X(z)\,dz.$$

Da analisi 1, l'estremo inferiore di integrazione è il punto in cui la primitiva (l'integrale definito, in realtà) della funzione si annulla.

In questo caso abbiamo come estremo inferiore $+\infty$. Ciò implica che la nostra primitiva "si annullerà all'infinito", cioè per $s \to +\infty$.

Esempio pratico:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin(t)}{t}\right](s)$$

Al posto di $\frac{\sin(t)}{t}$, inseriamo la trasformata di $\sin(t)$, e, poiché è moltiplicata per $\frac{1}{t}$, ne facciamo l'integrale:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \left[\mathrm{Arctg}(z)\right]_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}(s) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{s}\right)$$

(per un teorema di Analisi Matematica I: derivando $f(x) = \mathrm{Arctg}(x) + \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ si scopre che $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$; dunque costante, di valore $\frac{\pi}{2}$ $x>0$, $-\frac{\pi}{2}$ $x<0$.)

Quindi,

$$\int X(z)\,dz = \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{s}\right), \quad s>0.$$

Se sono dunque in grado di calcolare uno dei due integrali, mediante la proprietà di integrazione della trasformata di Laplace, posso determinare anche l'altro.

N.B.: ovviamente la relazione vale se e solo se entrambi gli integrali convergono. Negli estremi di integrazione non è possibile determinare "a priori" il comportamento.

Esempio pratico

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2}\,dz \;; \quad s_0 = 0.$$

Si dimostra che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ e $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2}$ convergono entrambi.

Come già calcolato, il secondo è:

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}(0) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

• Trasformata di Laplace dell'integrale di una funzione: data una funzione $x(t)$, definita come "derivata di $G(t)$"

$$G(t) = \int_0^t x(z)\,dz;$$

$$\mathcal{L}[G(t)](s) = \frac{X(s)}{s} \;; \quad s > \max\{0; \alpha_x\}$$

Dimostrazione: citeremo ora per dimostrare, la proprietà di convoluzione, che vale per la trasformata di Laplace. Essa afferma che

$$\mathcal{L}[(x * y)(t)](s) = X(s) \cdot Y(s)$$

Consideriamo ora la nostra $G(t)$ "limitata" come il prodotto:

$G(t) \cdot u(t)$, dove $u(t)$ è la funzione gradino di Heaviside.

Applicando la convoluzione, otteniamo
$$\mathcal{L}[G(t)](s) = \mathcal{L}[(u * x)(t)](s) = \frac{X(s)}{s}$$
Ossia al prodotto algebrico delle trasformate. Poiché $u(t)$ ha come trasformata di Laplace $\frac{1}{s}$, $s>0$, e $x(t)$ ha $X(s)$ con il suo dominio, dunque con un dx,
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)\, d\tau\right](s) = \frac{X(s)}{s}$$

- Trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione: date due funzioni $x(t)$ e $y(t)$,
$$\mathcal{L}[(x*y)(t)](s) = X(s) \cdot Y(s)$$
Dove il prodotto di convoluzione è:
$$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau.$$
Nella trasformata di Laplace consideriamo però un dominio di integrazione diverso: trasformiamo secondo Laplace il prodotto di convoluzione:
$$\mathcal{L}[(x*y)(t)](s) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right) e^{-st}\, dt =$$
$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau\right) e^{-st}\, dt$$ [poiché la trasformata di Laplace parte da 0, limitiamo il dominio di anche il prodotto di convoluzione]

Dal momento che $x(t), y(t) \in \mathcal{L}[0, +\infty)$, possiamo scambiare l'ordine di integrazione:
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} y(\tau) \cdot \left(\int_0^{+\infty} x(t-\tau)\, e^{-st}\, dt\right) d\tau \quad \left[\text{SOSTITUIAMO } t-\tau = u,\ t = u+\tau\right]$$
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} y(\tau)\left(\int_0^{+\infty} x(u)\, e^{-s(u+\tau)}\, dt\right) d\tau = \int_0^{+\infty} y(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \cdot \int_0^{+\infty} x(u)\, e^{-su}\, du =$$
$$= X(s)\, Y(s)$$

Facciamo alcune considerazioni sul dominio: per ipotesi abbiamo
$$\begin{cases} x(\tau) = 0 & \tau < 0 \\ y(\tau) = 0 & \tau < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Avremo poi } x(\tau),\ y(t-\tau) \Rightarrow \begin{cases} x(\tau) = 0; & \tau < 0 \\ y(t-\tau) = 0; & t-\tau < 0;\ \tau > t \end{cases}$$
Dunque, per $\tau < 0$, ed $\tau > t$, non avrà senso calcolare il prodotto di convoluzione, in quanto avremo una delle due funzioni almeno nulla. Conviene dunque fare:
$$\mathcal{L}[(x*y)(t)](s) = \int_0^t x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$
N.B: il "t" estremo superiore di integrazione, e il t che trasla la $y(\tau)$, coincidono. Non si era mai vista prima una cosa del genere, che comunque è da considerarsi assolutamente corretta.

Trasformata di una funzione periodica secondo Laplace

Data $x(t)$ periodica di periodo T,
$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt =$$
Ma poiché $x(t)$ ha periodo T, posso calcolare l'integrale su di un singolo periodo, e sommarli, ottenendo una serie di integrali
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} x(t)\, e^{-st}\, dt$$
Supponiamo di dover integrare tra 0 e T, poi da T a 2T, e via. Per ricondurmi sempre a tal caso, posso fare il cambio di variabili, $\tau = t - T$; $t = \tau + T$.
Da $\int_T^{2T} x(t)\, e^{-st}\, dt$, ottengo quindi $\int_0^T x(\tau+T)\, e^{-s(\tau+T)}\, d\tau$;
mi sono così ricondotto al caso precedente! Poiché $x(\tau+T) = x(\tau)$, $\Rightarrow$
$$\Rightarrow e^{-sT}\int_0^T x(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \quad [e^{-sT} \text{ è costante rispetto a } \tau].$$

Facciamo dunque la serie di questi integrali, considerando

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT}\int_0^{T} x(t)e^{-st}\,dt$$

L'integrale va infatti sommato n volte. Posso leggere e^{-nsT} come $(e^{-sT})^n$.

Questa è riconducibile a una serie geometrica.

Poiché $s>0$, $T>0$, $(e^{-sT})^n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Valutando la somma della serie, $x^n = \frac{1}{1-x}$,

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \cdot \int_0^{T} x(t)e^{-st}\,dt.$$

Teorema del valor iniziale - Teorema del valor finale

Questi due teoremi hanno l'utilità di mettere in relazione il comportamento di $x(t)$ per $t \to 0^+$, con $X(s)$ $x \to \infty$, e "viceversa".

Teorema del valor iniziale:

data $x(t)$ funzione definita in $(0,+\infty)$,

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to +\infty} sX(s)$$

In parole povere, studiando il comportamento di uno dei due limiti, studiamo anche l'altro.

Teorema del valor finale:

data $x(t) \in \mathcal{L}(0,+\infty)$, se esiste finito $\lim_{t\to\infty} x(t)$, allora

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0^+} sX(s)$$

Facciamo ora alcune applicazioni pratiche in cui è possibile o meno calcolare il limite e usare il teorema, e faremo alcune considerazioni al riguardo.

Esempi pratici:

- $x(t) = e^{t}$; $X(s) = \frac{1}{s-1}$

Per il V.I.

$$\lim_{t\to 0^+} e^{t} = \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{s-1} \quad ? \text{ Sì!}$$

Per il V.F.

$\lim_{t\to\infty} e^{t} = +\infty$: il limite non esiste finito.

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{s}{s-1} = 0.$$

Ma calcolare in 0 il limite di questa trasformata NON HA SENSO!

Il dominio è infatti $s-1>0$, $s>1$. È sempre necessario fare attenzione al dominio di trasformazione.

- $x(t) = e^{-t}$ $X(s) = \frac{-1}{s+1}$

V.I.: $\lim_{t\to 0^+} e^{-t} = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+1}$? Sì!

V.F.: $\lim_{t\to +\infty} e^{-t} = \lim_{s\to 0^+} \frac{s}{s+1}$? Sì!

Trasformata di Laplace nei modelli differenziali

Mediante le proprietà di derivazione, la trasformata di Laplace si presta ottimamente come metodo risolutivo per equazioni differenziali lineari, o meglio, per problemi ai valori iniziali, avendo la condizione iniziale in 0 (per la proprietà di derivazione).

Data un'equazione differenziale, si trasforma ogni singolo termine mediante trasformata di Fourier, si sostituiscono le condizioni

iniziali nell'equazione, che sarà divenuta, da differenziale, algebrica.
Per esplicare l'argomento, si farà spesso uso di esempi pratici.
Esempio pratico:
dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x' + ax = 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
Applichiamo la trasformata di Laplace:
$s \cdot X(s) - x(0) + aX(s) = 0$;
$x(0) = x_0$;
$\Rightarrow sX(s) - x_0 + aX(s) = 0$;
$X(s)(s+a) = x_0$;
$X(s) = \dfrac{x_0}{s+a}$;
Abbiamo così ottenuto la trasformata di una certa funzione. Per ricavare la soluzione dell'equazione differenziale, è sufficiente antitrasformare questa funzione.
Esiste un elenco di regole (deducibili da quelle di trasformazione) per effettuare l'antitrasformazione di Laplace. Spesso è comunque sufficiente ricorrere ad una tavola di trasformate.
Ad esempio, per $X(s) = \dfrac{x_0}{s+a}$, $x(t) = x_0 \cdot e^{-at}$, $a > 0$.
Spesso, ad ogni modo, comunque, si tratta di esponenziali o sinusoidi.
Si ribadisce che condizione fondamentale per le equazioni è la linearità: l'applicazione della trasformata è permessa soprattutto dalla linearità dell'operatore trasformata di Laplace.

Equazioni lineari di ordine n
Un'equazione differenziale lineare di ordine n è un'equazione nella forma:
$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_n x = b(t)$
Introduciamo un concetto visto nel corso di Geometria: dipendenza lineare. Estendiamolo alle funzioni: date n funzioni, $x_1(t), x_2(t), \ldots$ $\ldots x_n(t)$, dire che sono linearmente indipendenti equivale a dire che, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \ldots + \lambda_n x_n(t) = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$ $\ldots = \lambda_n = 0$.
Per qualsiasi punto (tempo) t in $\mathbb{R}$ le funzioni devono annullarsi, con coefficienti λ_i diversi da 0. Solo in questo caso le funzioni sono linearmente dipendenti. Ma se per annullarsi l'unica possibilità è che λ_i siano sempre 0, allora le n funzioni sono linearmente indipendenti tra loro.
Prendiamo un esempio pratico generico per capire una proprietà importante:
Esempio pratico
data l'equazione differenziale
$x'' - 3x' + x = 0$, e due soluzioni x_1, x_2, prendiamo le combinazioni lineari delle soluzioni:
$(\alpha x_1 + \beta x_2)'' - 3(\alpha x_1 + \beta x_2)' + (\alpha x_1 + \beta x_2) = 0.$
Raccogliamo α e β,
$\alpha(x_1'' - 3x_1' + x_1) + \beta(x_2'' - 3x_2' + x_2) = 0.$
Ma x_1 è soluzione, quindi $(x_1'' - 3x_1' + x_1) = 0$, e anche $(x_2'' - 3x_2' + x_2) = 0$.
Da ciò, si deducono due importanti proprietà:

Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti formano uno spazio vettoriale; lo spazio vettoriale così generato, inoltre, ha dimensione pari all'ordine dell'equazione differenziale.

Questa affermazione non è banale: gli spazi generati da funzioni non sono semplici come vettoriali: talvolta possono avere dimensione infinita: possono infatti essere necessarie infinite funzioni per formare una base dello spazio che intendiamo studiare.

Come determino la base dello spazio di funzioni?

Data $x(t) = e^{\sigma t}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma = \lambda + i\mu$.

$$e^{\sigma t} = e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t} + e^{i\mu t} = e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t).$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione differenziale, ottengo σ, e soluzioni del tipo $e^{\sigma t}$; se le soluzioni hanno molteplicità n, adottiamo un trucco: moltiplichiamo la soluzione per "t", otteniamo $e^{\sigma t}$, $te^{\sigma t}$, $t^2 e^{\sigma t}$, ... $t^{n-1} e^{\sigma t}$ (spazi affini).

La trasformata di Laplace è applicabile a un ristretto numero di casi: dati problemi ai valori iniziali di ordine n, ed $(n-1)$ condizioni iniziali, in $t_0 = 0$, posso applicare la trasformata di Laplace.

Esempio pratico

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

[CIÒ RAPPRESENTA L'EQUAZIONE DI UN OSCILLATORE ARMONICO CHE PARTE DA $t=0$ CON $x_0=1$, E $x'(0)=0$, OSSIA VELOCITÀ INIZIALE NULLA]

Applichiamo come al solito la trasformata di Laplace:

$s^2 X(s) - s x(0) - x'(0) + \omega^2 X(s) = 0$;

Applicando le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

$s^2 X(s) - s - 0 + \omega^2 X(s) = 0$;

$(s^2 + \omega^2) X(s) = s$;

$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Applicando $\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right](t)$ otteniamo $x(t) = \cos(\omega t)$.

N.B.: il metodo della trasformata di Laplace è applicabile solo se $t_0 = 0$, se abbiamo tutte le condizioni iniziali, e in 0 dunque.

È innaturale risolvere mediante la trasformata di Laplace equazioni con valori iniziali diversi, o addirittura cercare l'integrale generale, anche se possibile mediante artifici.

Esempio pratico

Risolvere il sistema differenziale del I ordine

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Trasformiamo mediante Laplace il sistema:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 2X(s) - 3Y(s) \\ sY(s) - y(0) = Y(s) - 2X(s) \end{cases}$$

Applichiamo le condizioni iniziali, portiamo al primo membro $X(s)$ e $Y(s)$, li incolonniamo, e a secondo membro i termini numerici:

$$\begin{cases} (s-2)X(s) + 3Y(s) = 8 \\ 2X(s) + (s-1)Y(s) = 3 \end{cases}$$

Conviene ora applicare Cramer, per determinare le soluzioni del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & (s-1) \end{pmatrix} \qquad \det(A) = (s-2)(s-1) - 6$$

$$\det(A) = s^2 - 3s - 4$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & (s-1) \end{pmatrix} \qquad \det(A_x) = 8(s-1) - 9 = 8s - 17$$

$$A_y = \begin{pmatrix} (s-2) & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A_y) = 3(s-2) - 16 = 3s - 22$$

$$X(s) = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} \quad ; \quad Y(s) = \frac{3s-22}{s^2-3s-4}$$

Per antitrasformare le due funzioni si deve procedere per fratti semplici:

X

$(s-4)$
$(s+1)$

$$X(s) = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+1} =$$