

Trasf. tripla di Fourier: [NOTA: Dopo la prima volta, specificato cosa significa (per es.) \underline{k} , E , \tilde{f} , poss OMELPIRE
 $\tilde{f}(\underline{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \exp(j k_x x) dx \exp(j k_y y) dy \exp(j k_z z) dz$ gli operatori
[specificare rotazione \underline{k} (24B, contro (r, θ, φ)].

Definisco $\underline{k} \triangleq [k_x, k_y, k_z]$; $\Rightarrow \tilde{f}(\underline{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\underline{r}) \exp(j \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{r}$
l'anti-trasf. è:

$$f(\underline{r}) \triangleq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{K}} \tilde{f}(\underline{k}) \exp(-j \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{k} \quad "1": \text{"applicare operatore"}$$

$$\hookrightarrow \nabla \perp f(\underline{r}) = \frac{L}{8\pi^3} \nabla \perp \int_{\mathbb{K}} \tilde{f}(\underline{k}) \exp(-j \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{k}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{V agisce sullo} \\ \text{sopra } \underline{r} \end{array}}$

commuto: (gradiente)

$$\rightarrow \nabla f(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{K}} [\nabla \exp(-j \underline{k} \cdot \underline{r})] \tilde{f}(\underline{k}) d\underline{k} \Rightarrow \underline{k}: \text{"dominio spettrale"}$$

le parentesi è:

$$\Rightarrow \nabla \exp(-j \underline{k} \cdot \underline{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \exp(-j (k_x x + k_y y + k_z z)) =$$

$$= \exp(-j k_x x - j k_y y - j k_z z) [-j k_x \hat{x} - j k_y \hat{y} - j k_z \hat{z}] = -j \underline{k} \exp(-j \underline{k} \cdot \underline{r})$$

$$\hookrightarrow \nabla f(\underline{r}) = \frac{L}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{K}} -j \underline{k} \exp(-j \underline{k} \cdot \underline{r}) \tilde{f}(\underline{k}) d\underline{k}$$

Questo si può pensare come (è ri-scivere la definizione, dir meglio):
notà: \underline{k} è un reale $| \underline{k} |$.

$$\hookrightarrow \nabla f(\underline{r}) = \int_{\mathbb{K}} \mathcal{F}_3 \{ \nabla f(\underline{r}) \} \exp(-j \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{k}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Scrivendo da questo} \\ \text{parte! (con } r = |\underline{r}| \text{)} \end{array}}$

\Rightarrow uguali i due integrandi!

$$\hookrightarrow \mathcal{F}_3 \{ \nabla f(\underline{r}) \} = -j \underline{k} \tilde{f}(\underline{k}) - j \underline{k} \mathcal{F}_3 \{ f(\underline{r}) \}$$

(12)

Questa dimostrazione vale per il gradiente \underline{m} , iterando in modo simile le dimostrazioni delle tesi. Domica di Fourier, non può vedere da cosa è NOTTO GRADIENTE!

$$\nabla \underline{f}(\underline{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}_3} -j\underline{k} \perp \tilde{f}(\underline{k})$$

e:

$$\mathcal{L}\{\nabla\} \perp f(\underline{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}_3} \mathcal{L}(-j\underline{k}) \perp \tilde{f}(\underline{k})$$

dove \mathcal{L} è un generico operatore lineare.

Esempio utile:

$$-\mathcal{F}_3\{\nabla^2 \perp f(\underline{r})\} = \mathcal{F}_3\{\nabla \cdot \nabla f(\underline{r})\} = (-j\underline{k}) \cdot (-j\underline{k}) \tilde{f}(\underline{k}) = -k^2 \tilde{f}(\underline{k}).$$

prodotto due

$$-\nabla \nabla : \quad \mathcal{F}_3\{\nabla \nabla \perp f(\underline{r})\} = \underbrace{(-j\underline{k})(-j\underline{k})}_{\text{ACCOSTANNO IN SENSO ORARIO}} \perp \tilde{f}(\underline{k}) = -\underbrace{\underline{k} \underline{k}}_{\text{ACCOSTANNO IN SENSO ORARIO}} \perp \tilde{f}(\underline{k})$$

Eq. di Maxwell

Considerare le equazioni di rotore:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{B}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r},t) - \underline{M} \\ \nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r},t) + \underline{J} \end{cases}$$

Passo alla Fourier nel tempo:

$$\xrightarrow{\text{Passa alla } \mathcal{F}_3} \begin{cases} \nabla \times \underline{B}(\underline{r},\omega) = -j\omega \mu \underline{H}(\underline{r},t) - \underline{M} \\ \nabla \times \underline{H}(\underline{r},\omega) = +j\omega \epsilon \underline{E}(\underline{r},t) + \underline{J} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Passa alla } \mathcal{F}_3} \begin{cases} -j\underline{k} \times \tilde{\underline{E}}(\underline{k},\omega) = -j\omega \mu \tilde{\underline{H}}(\omega,t) - \underline{M} \\ -j\underline{k} \times \tilde{\underline{H}}(\underline{k},\omega) = +j\omega \epsilon \tilde{\underline{E}}(\underline{k},t) + \underline{J} \end{cases} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -j\omega \epsilon \tilde{\underline{E}} \\ j\underline{k} \times \tilde{\underline{E}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -j\underline{k} \times \tilde{\underline{H}} \\ -j\omega \mu \tilde{\underline{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{J}} \\ \tilde{\underline{M}} \end{bmatrix}}$$

Ricordando che:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

NOTA! $\tilde{\underline{G}}^{-1}$ è la diadice unitaria nello spazio \underline{k} . Sono solo per tenerne conto nel calcolo di riferimento! (k_x, k_y, k_z)

13

Definisco $\tilde{\underline{G}}^{-1}$, il determinante della matrice:

$$\tilde{\underline{G}}^{-1} = -K_0^2 \underline{\underline{\Sigma}} - (\underline{k} \times \underline{\underline{\Sigma}}) \underline{\underline{\Sigma}} (\underline{k} \times \underline{\underline{\Sigma}})^T = -K_0^2 \underline{\underline{\Sigma}} - (\underline{k} \underline{k} - K^2 \underline{\underline{\Sigma}})$$

prodotto
diadico

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{E}(\underline{k}) \\ \tilde{H}(\underline{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\omega \mu_0 \tilde{\underline{G}}(\underline{k}) & j\underline{k} \times \tilde{\underline{G}}(\underline{k}) \\ -j\underline{k} \times \tilde{\underline{G}}(\underline{k}) & -j\omega \epsilon_0 \tilde{\underline{G}}(\underline{k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Sigma}} \\ \underline{M} \end{bmatrix}$$

Questa è la soluzione del problema dell'induzione nello spazio \underline{k} .

Equazioni d'onda

Si ricava (vedi onde plane) il segnale set di eq:

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \underline{E} - K_0^2 \underline{E} = -j\omega \mu_0 \underline{J}' & \underline{J}' = \underline{J} - \frac{1}{j\omega \mu_0} \nabla \times \underline{H} \\ \nabla \times \nabla \times \underline{H} - K_0^2 \underline{H} = -j\omega \epsilon_0 \underline{M}' & \underline{M}' = \underline{H} - \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \nabla \times \underline{J} \end{cases}$$

Considero la I^a: passo alla \mathcal{F}_3 :

$$\hookrightarrow (-j\underline{k}) \times (-j\underline{k}) \times \tilde{\underline{E}}(\underline{k}) - K_0^2 \tilde{\underline{E}}(\underline{k}) = -j\omega \mu_0 \tilde{\underline{J}}'(\underline{k})$$

Ricordo che:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$$

Occhio ai prodotti
diadici | scalare!!!

da qui:

$$\rightarrow \underline{k} \cdot \underline{k} = K^2; \quad \underline{k} \underline{k} \text{ è l'auto. USO } \underline{c} = \tilde{\underline{E}}(\underline{k}), \text{ e ho:}$$

$$\hookrightarrow \tilde{\underline{E}}(\underline{k}) = -j\omega \mu_0 \left[-\underline{k} \underline{k} + (K^2 - K_0^2) \underline{\underline{\Sigma}} \right]^{-1} \tilde{\underline{J}}(\underline{k}) \triangleq \tilde{\underline{G}}(\underline{k}) \tilde{\underline{J}}(\underline{k})$$

Definisco un sistema di riferimento sfeno per il problema (ordine I₄)
 si sceglie che alla fine le soluzioni siano sfere; modulo K,
 azimuthal α , zenith β . Ho che, in questo sistema di riferimento,
 $\underline{\underline{K}} \underline{\underline{K}} = K^2 \hat{\underline{\underline{K}}} \hat{\underline{\underline{K}}} ; \hat{\underline{\underline{S}}} = \hat{\underline{\underline{K}}} \hat{\underline{\underline{K}}} + \hat{\underline{\underline{L}}} \hat{\underline{\underline{L}}} + \hat{\underline{\underline{B}}} \hat{\underline{\underline{B}}}$

da qui

$$\hat{\underline{\underline{G}}}(\underline{\underline{K}}) = \left[-K^2 \hat{\underline{\underline{K}}} \hat{\underline{\underline{K}}} + (K^2 - K_\phi^2) \left[\hat{\underline{\underline{K}}} \hat{\underline{\underline{K}}} + \hat{\underline{\underline{L}}} \hat{\underline{\underline{L}}} + \hat{\underline{\underline{B}}} \hat{\underline{\underline{B}}} \right] \right]^{-1}$$

$$= \left[-K_\phi^2 \hat{\underline{\underline{K}}} \hat{\underline{\underline{K}}} + (K^2 - K_\phi^2) \left[\hat{\underline{\underline{L}}} \hat{\underline{\underline{L}}} + \hat{\underline{\underline{B}}} \hat{\underline{\underline{B}}} \right] \right]^{-1}$$

Ciò può esser espresso in forma diagonale come:

$$\hat{\underline{\underline{G}}}(\underline{\underline{K}}) = \begin{bmatrix} -K_\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & K^2 - K_\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & K^2 - K_\phi^2 \end{bmatrix}^{-1} = \text{dopo lunghe
calcoli matriciali (Geometria)}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{K_\phi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K^2 - K_\phi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K^2 - K_\phi^2} \end{bmatrix}$$

da qua:

$$\hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{K}}) = -j\omega \mu_0 \hat{\underline{\underline{G}}}(\underline{\underline{K}}) \cdot \hat{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{K}})$$

usando la Maxwell:

$$\hat{\underline{\underline{H}}}(\underline{\underline{K}}) = -j \frac{\underline{\underline{K}} \times \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{K}})}{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$= -j \underline{\underline{K}} \times \hat{\underline{\underline{G}}}(\underline{\underline{K}}) \cdot \hat{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{K}})$$

Procedendo in maniera analogo a quanto fatto con la II^a eq. d'ordine

$$\hat{\underline{\underline{H}}}(\underline{\underline{K}}) = -j\omega \epsilon_0 \hat{\underline{\underline{G}}}(\underline{\underline{K}}) \cdot \hat{\underline{\underline{M}}}'; \quad \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{K}}) = \underline{\underline{K}} \times \hat{\underline{\underline{G}}}(\underline{\underline{K}}) \cdot \hat{\underline{\underline{H}}}.$$

Il sistema è lineare; considerando l'eq per volta abbiamo fatto una
 sovrapposizione. Applichiamo la parte lineare delle sovrapp. effetti, e
 ottengono la matrice di prima II^a

Ora due parole:

- 1) Problema dell'inviluppo: dati sono ingressi, come sorgenti, \underline{J} e \underline{M} , trovare le espressioni nello spazio \underline{r} di $E \underline{\rho} H$.

- 2) Il problema si riduce a un problema di inversione di un operatore lineare:

$$\underline{L} \triangleq \left[-\underline{\nabla} \underline{\nabla} + (\kappa^2 - \kappa_0^2) \underline{\underline{I}} \right] \rightarrow \underline{\underline{G}} \triangleq \underline{L}^{-1}$$

- 3) $\underline{\underline{G}}$ è la funzione diodica di Green: essa serve per trovare la soluzione del problema monogeneo, il cui termine di disomogeneità sono le sorgenti. Per fare un confronto, $\underline{\underline{G}}$ è come la f.d.t. $H(\underline{s})$ ma nel dominio dello spazio (\rightarrow nel dom. spaziale!): il sistema è modellato dalle eq. dinamiche, in questo caso Maxwell; facendo un'analisi secondo Fourier, dunque trascurando il transitorio, quello che è grande è $E\{\underline{J}\}$, ormai il campo elettro portato (non la risposta libera del sistema legata a transitori, quanto quelle fornite dal termine di sorgente). [idee di automatica!]

Ora, cerchiamo di capire com'è fatta questa benedetta funzione di Green: nel dominio diretto in frequenza,

$$\underline{\underline{G}}(\underline{k}) = \underline{\underline{S}}_3^{-1} \left\{ \underline{\underline{\tilde{G}}}(\underline{k}) \right\} \quad \text{dove ricordiamo che: dalla forma diodica, esplicitando,}$$

$$\therefore \underline{\underline{G}}(\underline{k}) = \left\{ \underline{\underline{\tilde{G}}} - \frac{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\nabla}}}{\kappa_0^2} \right\} \frac{1}{\kappa^2 - \kappa_0^2} = \left\{ \left(\underline{\underline{\tilde{G}}} + \left[(-i\underline{k})(-i\underline{k}) \right] \frac{1}{\kappa_0^2} \right) \frac{1}{\kappa^2 - \kappa_0^2} \right\}$$

Antitrasformo: $\underline{\underline{S}}_3^{-1}$:

$$\therefore \underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \left[\frac{\nabla \nabla}{\kappa_0^2} + \underline{\underline{\tilde{G}}} \right] \underline{\underline{S}}_3^{-1} \left\{ \frac{1}{\kappa^2 - \kappa_0^2} \right\}$$

La funzione scalare di Green.

Abbiamo una scelta arbitraria ogni volta che decidiamo un problema: il sistema di riferimento. In questo caso la scelta è: avere il versore \hat{k}_z parallelo e coincidente con \hat{r} , ossia con la direzione del raggio del sistema di riferimento nello spazio diretto $(\underline{r}, \phi, \theta)$ [controllare che questo sia l'ordine!]

Questa scelta è scelta dal fatto che dobbiamo risolvere l'equazione integrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{k^2 - k_0^2} \exp(-jk \cdot \underline{r}) dk$$

Faccendo in modo manuale proiettando \underline{k} su \underline{r} , mantengo solo le componenti di (\underline{k}_z) :

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = k_z r_z = k \cos(\beta) r [\text{Si veda la definizione, capitolo "sistema di riferimento"}]$$

Dal calcolo del Jacobiano (appuntarsi anche qui di togliere le cosi),

$$\hookrightarrow d\underline{k} = k^2 \sin(\beta) dk d\phi d\beta$$

L'integrale sarà: (limitando il dominio a quello della tensione):

$$\frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 \sin \beta}{k^2 - k_0^2} \exp(-jk r \cos(\beta))$$

Si è immediato: (2π) ; β è "semplice": integrabile dell'esp; si arriva:
[prendi un n da k^2 , moltiplica e divide per $j^2 r$] XXX

$$\hookrightarrow \int_0^{2\pi} dk = 2\pi \left[\frac{1}{j\pi} \int_{jkr}^{jr} \exp(-jk r \cos(\beta)) \sin(\beta) d\beta \right]_0^\pi = \exp(-jk r) \Big|_0^\pi =$$

$$= \exp(jkr) - \exp(-jkr)$$

L'integrale iniziale si è ridotto a:

$$\hookrightarrow \frac{-j}{4\pi^2 r} \int_0^{+\infty} \frac{k}{k^2 - k_0^2} \left[\exp(jkr) - \exp(-jkr) \right] dk = \frac{j}{4\pi^2 r} \left[\int_0^{+\infty} \frac{K}{k^2 - k_0^2} \exp(-jk r) dk \right] \Big|_{jkr}^{jr} =$$

Nel II°, considero il cambio di variabili $h = -k$:

$$- \frac{j}{4\pi^2 r} \int_0^{+\infty} \frac{-h}{h^2 - k_0^2} \exp(-jh r) (-dh) = + \frac{j}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{h}{h^2 - k_0^2} \exp(-jh r) dh$$

Riscrivendo tutto le funzioni in K (kinomino II° integrato): la senna dunque: (1)

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \left[\int_0^{+\infty} \frac{K}{k^2 - k_0^2} \exp(-jkr) dk + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K}{k^2 - k_0^2} \exp(-jkr) dk \right] = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K}{k^2 - k_0^2} \exp(-jkr) dk$$

Questa ora va risolta mediante il metodo dei residui:

per fare ciò, calcolo i due poli della funzione:

$$K = \pm k_0$$

Ricordando la teoria, K in

generale è una quantità complessa, a causa

della presenza di perdite: $K = R - j\alpha$ (Ottico)

R e α non sono gli angoli del sistema di riferimento

relativo al dominio spettrale!!!. Per comodità, indico $K = K_R - jK_I$.

Dovrò scegliere il cammino di integrazione: questo può essere o quello in grassetto, o l'altro. Come mai scelgo quello in cui la chiusura è in $\text{Im}\{K\} \subset \phi$? Beh: R è una quantità positiva (non ha senso parlare di raggi negativi), mentre K_I , in presenza di perdite, può essere una quantità complessa: $K = K_R - jK_I$. Nell'ultimo caso l'esponente:

$$\exp(-jkr) = \exp[-jr(K_R - jK_I)] = \underbrace{\exp[-jrK_R]}_{\text{Termine proporzionale}} + \underbrace{\exp[-jrK_I]}_{\text{Termine di perdita}}$$

Termine proporzionale
Termine di perdita

Noi abbiamo bisogno che K_I sia minore di zero: se non fosse così, per r grandi, l'esponente esplode e la funzione non è tecnicamente integrabile.

Se il cammino scelto, ho che il polo $-K_I$ (dove $-K_I = -K_R + jK_\alpha$) ha

lavorante da perdite (caso di non ci piaci come vedremo)

accrescere il peso della parte immaginaria, lasciando "salire" Ψ via verso ∞

$K_\alpha = K_R - jK_I$, in cui la presenza di perdite fa abbassare il polo, lasciando

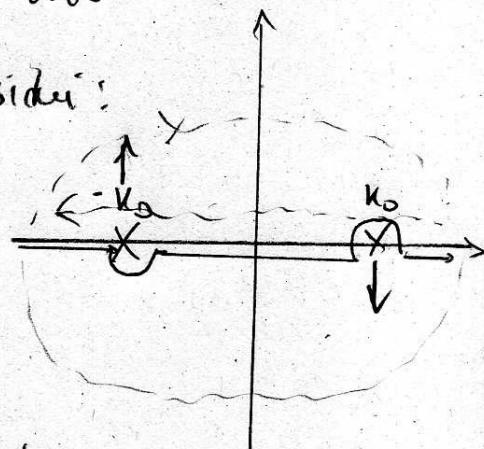
comunque convergere l'esp. Due poli: quale prendiamo? Quello positivo:

se infatti prendiamo quelli negativi, la presenza di perdite potrebbe sbucare il

polo ottenendo roba sul II^\rightarrow quadrante, che significa "esponente che esplode".

$$R\{+k_0\} = \frac{1}{2} \exp(-jk_0 r) \Rightarrow \phi = \frac{\exp(-jk_0 r)}{4\pi r}$$

[Riscrivete la formula da An. Complesso (11)]



Un paio di note:

- Seguendo il nostro risultato trova una fase ostentare $\phi_1 = \omega t - K_F r$

(le solite). Seguendo l'altro cammino, si trova $\phi_2 = \omega t + K_F r$

- Verduci pp. 305 e segnali: il problema più è esser posto meglio (magari
poco ma basta):

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - i \frac{X}{\omega} \quad (\text{si ricava da Maxwell})$$

$$\text{L} \rightarrow K_F = \omega \sqrt{\mu_0 \tilde{\epsilon}} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon (1 - i \frac{X}{\omega \epsilon})}$$

ϵ è puramente reale perche'
 $\frac{X}{\omega \epsilon}$ LLL! $K_F \rightarrow K_F$

Quella che calcolate è la funzione scalare di Green, ossia
un "perp" della funz. le funz. D'indepen. di Green.
Questa deve essere ricavata moltiplicando l'operatore $\nabla \cdot \nabla$, che
significa "applicazione dell'operazione "gradiente" al gradiente delle
funzioni d'onda. solo (nel nostro caso)". Questo è un gesto
diabolico, dal momento che "accoppia vettori", causando la perdita

Ci sono molti altri modi per operare:

- Equazioni integro-differenziali

- Calcolo differenziale; più oneroso ma meno teorico.

$$G(r) = \left(\underline{\underline{I}} + \frac{\nabla \nabla}{r^2} \right) \phi(r), \text{ problema: } \nabla \nabla \phi(r) = (?) \quad [\text{DIADICA DI GREEN}]$$

definisco $\underline{\underline{g}} = \nabla \phi(r)$; $\underline{\underline{g}} = \nabla g = \nabla \nabla \phi(r)$. ϕ è sob funzione di r ;

dunque:

$$\hookrightarrow \underline{\underline{g}} = \nabla \phi = \hat{r} \frac{d\phi}{dr} ; \quad \nabla \underline{\underline{g}} = \sum_{i=1}^3 \hat{u}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\hat{r} \frac{d\phi}{dr} \right)$$

usando il teorema della rimozione composta (den h comp):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\hat{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = \hat{r} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{d\phi}{dr} \right) + \frac{d\hat{r}}{\partial \xi_i} \frac{d\phi}{dr}$$

Note: (questo trattamento è di Vachin); ξ_i , h etc. indicano il fatto che non ho ancora scritto un sistema di riferimenti. Questo sarà, lo vedremo, quello sfondo: (dall'indirizzo).

$$\begin{aligned} \nabla \underline{\underline{g}} &= \hat{r} \left[\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} \frac{d\phi}{dr} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{d\phi}{dr} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{\hat{r}} \left[\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \frac{d\phi}{dr} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\phi}{dr} \right) \right] + \\ &+ \hat{\phi} \frac{1}{\hat{r} \sin \theta} \left[\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dr} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{d\phi}{dr} \right) \right] \end{aligned}$$

A questo punto passo in cartesiane: $\hat{r} = (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) + \hat{z} \cos \theta$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = \phi ; \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{x} \cos \varphi \cos \theta + \hat{y} \sin \varphi \cos \theta - \hat{z} \sin \theta ;$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = (-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi) \sin \theta$$

Ricordo che $\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi \cos \theta + \hat{y} \sin \varphi \cos \theta - \hat{z} \sin \theta$;

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = \phi ; \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta} ; \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \hat{\phi} \sin \theta$$

Poi:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{4\pi r} \exp(-jk_0 r) \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) = \phi(r) \left[-jk_0 - \frac{1}{r} \right]$$

Ora: rispetto a θ e ϕ , cosa è tutto costante, dunque le domande sono (1)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\phi(r) \left(-j k_\theta - \frac{e}{r} \right) \right] = \phi(r) \left(-j k_\theta - \frac{1}{r} \right) \left(-j k_\theta - \frac{e}{r} \right) + \phi(r) \frac{e}{r} = \phi(r) \left(-k_\theta^2 + \frac{2}{r^2} + \frac{j k_\theta e}{r} \right)$$

Abbiamo trovato prima l'espressione di $\nabla \phi$; sostituiamo:

$$\nabla \nabla \phi(r) = \left[\hat{r} \hat{r} \left(j \frac{2 k_\theta}{r} + \frac{2}{r^2} k_\theta^2 \mu \right) \hat{r} + \left(\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi} \right) \hat{r} \left(-j k_\theta - \frac{1}{r} \right) \frac{e}{k_\theta^2 r} \right] \phi(r)$$

Da qui:

$$\begin{aligned} G(\underline{r}) &= \nabla \nabla \phi(r) + (\hat{r} \hat{r} + \hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \phi(r) \\ &= \left\{ \hat{r} \hat{r} \left[2 \left(\frac{1}{k_\theta r} + \frac{1}{(k_\theta r)^2} \right) \phi(r) + (\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \left[1 - \frac{1}{k_\theta r} - \frac{1}{(k_\theta r)^2} \right] \right] \phi(r) \right\} \\ &\triangleq \left\{ A(k_\theta r) \hat{r} \hat{r} + B(k_\theta r) (\hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) \right\} \phi(r) \end{aligned}$$

$$A(k_\theta r) = 2 \left(\frac{1}{k_\theta r} + \frac{1}{(k_\theta r)^2} \right); \quad B(k_\theta r) = \left(1 - \frac{1}{k_\theta r} - \frac{1}{(k_\theta r)^2} \right) = 1 - \frac{A}{2}.$$

Calcolo il rotore di questa:

$$\nabla \times \underline{G}(\underline{r}) = \nabla \phi(r) \times \underline{\underline{\epsilon}} \quad \xrightarrow{\text{veder perché:}} \quad \text{mici appari, p. (1)} \quad \text{Gradiente campo rotazionale!}$$

$$\implies \nabla \phi(r) = \hat{r} \frac{d\phi}{dr} = \hat{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{k_\theta r} \exp(-j k_\theta r) \right) = \frac{1}{k_\theta r} f(r) \hat{r}$$

$$\text{dove } f(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \exp(-j k_\theta r) \right) = -\frac{1}{r^2} \exp(-j k_\theta r) + \frac{1}{r} (-j k_\theta) \exp(-j k_\theta r) =$$

$$-\frac{\exp(-j k_\theta r)}{r} \left| \frac{1}{r} = j k_\theta \right\} \implies \nabla \phi(r) = -\phi(r) j k_\theta r \left(\frac{1}{k_\theta r} - 1 \right) \stackrel{D}{=} C(k_\theta r)$$

$$\text{Poi: } \hat{r} \times \underline{\underline{\epsilon}} = \hat{r} \times (\hat{r} \hat{r} + \hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{\phi} \hat{\phi}) = (\text{matrici}) = \hat{\phi} \hat{\theta} - \hat{\theta} \hat{\phi}$$

$$\therefore \underline{G}'(\underline{r}) = \nabla \times \underline{G}(\underline{r}) = -j k_\theta C(k_\theta r) \phi(r) [\hat{\phi} \hat{\theta} - \hat{\theta} \hat{\phi}]$$

Qualche nota ancora:

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-j\kappa_0 r) = \phi(r) : \text{ funzione del solo} \underline{\text{modulo}} \text{ del vettore } \underline{r}$$

Di $\tilde{\phi}(\underline{k})$ (trasformata tripla di Fourier della $\phi(\underline{r})$, base di Helmholtz o funzione scalare di Green) si sa che esse ha una forma del tipo $\frac{1}{k^2 - \kappa_0^2}$ (per $\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2$ si ha un polo: questa è (Vedi anche prima) la relazione di dispersione di un'onda piana).

Dato lo spazio \mathbb{R}^3 i poli sono su di una superficie sferica di Raggio κ_0 . $\kappa_0 \in \mathbb{C}$ (e se $\in \mathbb{R}$, si fa i conti considerando il limite per perdite infinitesime).

Abbiamo che:

$$\begin{cases} \phi(\underline{r}) = \kappa_0 r \Rightarrow \text{per } \underline{r} \text{ costante, la fase è costante;} \\ |\phi(\underline{r})| = \frac{1}{4\pi r} \Rightarrow \text{a.a.a il modulo è costante.} \end{cases}$$

Questo porta a pensare che ϕ sia un'onda sferica; verifichiamo che sia davvero così:

$$\tilde{\phi}(\underline{k}) : \frac{1}{k^2 - \kappa_0^2} = \frac{1}{\underline{k} \cdot \underline{k} - \omega^2 \epsilon \mu} \Rightarrow (\underline{k} \cdot \underline{k} - \omega^2 \epsilon \mu) \tilde{\phi}(k) = 1$$

$$\hookrightarrow -[(-j\underline{k}) \cdot (-j\underline{k}) + \omega^2 \epsilon \mu] \tilde{\phi}(k) = 1$$

$$\stackrel{\mathcal{F}_3^{-1}}{\hookrightarrow} (\nabla^2 + \omega^2 \epsilon \mu) \phi(\underline{r}, \omega) = S(\underline{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \left(\nabla^2 - \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\underline{r}, t) = S(\underline{r}) S(t)$$

Questa è l'eq. di d'Alembert: un'equazione d'onda. È, in effetti, un'onda sferica. (p. 27 Vecchi, puoi pure fare $2.78 \div 2.83$).

Dalle esplosioni trovate, di G, si vede che ci ha una forte dipendenza dal termine $K_{\Phi} r$: (IK)

$$K_{\Phi} r = \frac{2\pi}{\lambda_0} r = \frac{f}{c} r$$

Proprietà di riscaldamento: variando "f" si varia la "distanza"; per esempio passando da 100 MHz in un modello in scala 1:100 a 10 GHz, ha lo stesso risultato.

2 possibilità:

campo vicino: $\frac{rf}{c} \ll 1$

Ne parlavano.

Campo lontano, $\frac{rf}{c} \gg 1$.
(antenne / tlc)

Integrale di irradiazione.

È noto da prima che nel dominio spettrale,

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{H} \end{bmatrix} = \tilde{G}(k) \begin{bmatrix} \tilde{J} \\ \tilde{H} \end{bmatrix}$$

Considero una sola componente:

$$\tilde{E}_x = \tilde{G}_{11}(k_{xx}) \tilde{J}(k_x) + \tilde{G}_{12}(k_{xx}) \tilde{H}(k_x)$$

\uparrow
componente xx
della funzione di
Green spettrale

\uparrow
campo
x della J
spettrale

Scegliendo per \tilde{J}_3 questa
forma, ottengo:

questi sono degli scalar.

\tilde{J}_3

$$E_x = G_{11}(r_{xx}) * J(r_{xx}) + G_{12}(r_{xx}) * H(r_{xx})$$

"*" indica una convoluzione nello spazio:

$$a(x) * b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) b(\xi - x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi - x) b(k) dx$$

Usando la linearità del sistema e dell'operatore di integrazione si ottiene: (IB)

$$\hookrightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\underline{G}}_{11}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' + \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\underline{G}}_{21}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{M}(\underline{r}') d\underline{r}'$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\underline{G}}_{21}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' + \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\underline{G}}_{22}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{M}(\underline{r}') d\underline{r}'$$

Ricordando la forma della matrice (mettere in ordine), e

$$\hookrightarrow \underline{E}(\underline{r}) = -j\omega \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\underline{G}}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - \int_{\mathbb{R}^3} \overset{\text{G}'!!}{\nabla \times \underline{\underline{G}}}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{M}(\underline{r}') d\underline{r}'$$

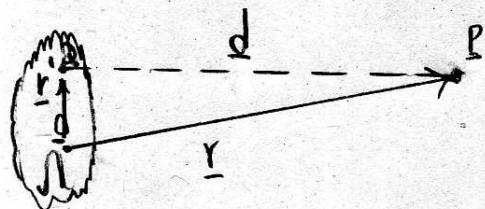
$$\underline{H}(\underline{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \underline{\underline{G}}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - j\omega \epsilon \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\underline{G}}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{M}(\underline{r}') d\underline{r}'$$

Questa è la formulazione che di solito si trova e si usa per gli integrali di irradiazione.

[Pagg. 29÷35, considerazioni di campo vicino.]

Approssimazioni di far field.

Si consideri una regione \mathcal{V} nella quale sono definite le distribuzioni di densità di corrente elettrica \underline{J} e magnetica \underline{M} ; h è la "dimensione caratteristica"



ossia il diametro della sfera minima in grado di racchiudere tutte le sorgenti, centrata su $\underline{0}$: $\frac{h}{2} = \max_{\underline{r}' \in \mathcal{V}} |\underline{r}'|$

Vogliamo valutare il campo elettrico nel punto P . Dall'integrale di irradiazione si ha:

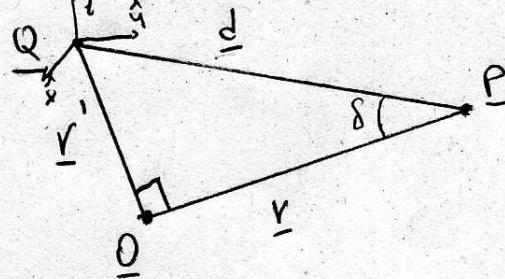
$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega \mu_0 \int_{\mathcal{V}} \underline{\underline{G}}(\underline{r}-\underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - \int_{\mathcal{V}} \underline{\underline{G}}'(\underline{r}-\underline{r}') \underline{M}(\underline{r}') d\underline{r}'$$

Fin qui, l'espressione è esatta: non abbiamo introdotto alcuna approssimazione. Ciò che abbiamo, però, è il fatto che $|d| = |\underline{r} - \underline{r}'|$ è molto maggiore di h , essendo in poteri di campo lontano. Ciò ci permette di approssimare l'elemento critico del sistema: la funzione di Green, molto complicata.

Il problema è: ho un osservatore in \underline{Q} , dove $\underline{Q} = \underline{Q} + \underline{r}'$: questo è detto "punto di sorgente". $\underline{P} = \underline{Q} + \underline{r}$ è detto "punto di osservazione" (potenziale).

Dunque, dato $\underline{d} \triangleq \underline{r} - \underline{r}'$, ho che \underline{G} è $\underline{G}(d)$. Avremo:

$$\underline{G}(d) = \begin{bmatrix} A(K_0 d) & 0 & 0 \\ 0 & B(K_0 d) & 0 \\ 0 & 0 & B(K_0 d) \end{bmatrix} \phi(d)$$



Introduciamo geometricamente le approssimazioni:

$$\underline{d} = \underline{r} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{r}\right)$$

Se $r \gg h$, ho che $\underline{d} \approx \underline{r}$, e dunque

posso scambiare i versori \underline{d} , \underline{r} e \underline{r}' con i versori $\hat{\underline{r}}$, $\hat{\underline{r}}'$ e $\hat{\underline{d}}$; partire da ciò, posso approssimare la funzione radice di Green. L'obiettivo è cercare di eliminare la dipendenza da \underline{r}' , ossia dalla distanza tra \underline{Q} o \underline{Q} .

Tenendo conto che $\underline{r} \perp \underline{r}'$, ho che:

$$d \triangleq |\underline{d}| = |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(\underline{r} - \underline{r}')(\underline{r} - \underline{r}')} = r \left| \hat{\underline{r}} - \frac{\underline{r}'}{r} \right| = r(1 + \varepsilon)$$

È l'errore, lo scrivo tra d e r ; ho che:

$\varepsilon \leq \frac{L}{r} \max_{r' \in \mathbb{R}} = \frac{h}{2r}$ (al peggio, l'errore è il raggio della minima crf). Dopo:

$$d = r + \mathcal{O}\left(\frac{h}{2r}\right) \quad \text{[volendo non ridurre } \frac{h}{K_0 r} \text{ per } L, \frac{h}{K_0 r} = \frac{2\lambda_0}{2\pi r} \text{ e } \frac{1}{10} \rightarrow r \geq \frac{2\pi h}{2\pi} \lambda_0 \approx 3\lambda_0]$$

A questo punto, lavoriamo separatamente su termine di base e ampiare;

$$(\text{si ricordi che } \phi(r) \approx \frac{1}{r} \exp(-jK_0 r)) \Big|_d = \frac{1}{d} \exp(-jK_0 d)$$

- Termino di ampiezza:

$$\frac{l}{d} = \frac{l}{r(1+\varepsilon)} = \frac{l}{r} \left(1 - \varepsilon + \dots\right) = \frac{l}{r} + O\left(\frac{h}{r}\right)$$

Ossia, imponendo $r \gg h$, l'errore può esser ridotto a piccino;

$$A(K_\phi d) \approx A(K_\phi r) ; \quad B(K_\phi d) \approx B(K_\phi r)$$

- Termino di fase:

$$d = r \cdot \xi ; \quad |\xi| \leq \frac{h}{2} \rightarrow K_\phi d = K_\phi r + K_\phi \varepsilon$$

$$\hookrightarrow K_\phi \varepsilon \leq K_\phi \frac{h}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_\phi} \frac{h}{2} \quad \begin{array}{l} \text{maggiorazione proposta da noi per} \\ \text{l'errore di fase} \end{array}$$

Questa maggiorazione è problematica: la fase non è fortunata come il modulo del momento che, variando r , non vediamo miglioramenti in questa espressione. Ciò che è capitato è che "salti" il fatto che $\underline{r}' \perp \underline{r}$, per questo termine; dovremo dunque ripartire da $|d|$:

$$d \triangleq |d| = \sqrt{(r-r') \cdot (\underline{r}-\underline{r}')} = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2r\underline{r}'} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} =$$

$$= r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}}$$

Ricordando che $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, sviluppo al II° ordine:

$$\hookrightarrow d \approx r + \frac{1}{2}r \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \left(\underline{r} \cdot \underline{r}'\right) \frac{r'}{r} \right] - \frac{r}{8} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \left(\underline{r} \cdot \underline{r}'\right) \frac{r'}{r} \right]^2 =$$

$$= r + \frac{1}{2}r \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - r \left(\underline{r} \cdot \underline{r}' \right) - \frac{r}{8} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^4 + 4 \left(\underline{r} \cdot \underline{r}'\right)^2 \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 4 \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\underline{r} \cdot \underline{r}'\right) \right] =$$

$$= r - r' \cdot \underline{r}' + \frac{1}{2}r \left[1 - \left(\underline{r} \cdot \underline{r}'\right)^2 \right] \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + O\left(\frac{h}{r}\right)^3$$

definisco ora:

$$\Delta r \triangleq r \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left[1 - \left(\underline{r} \cdot \underline{r}' \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow K_\phi d = K_\phi r - K_\phi \hat{r} \cdot \hat{r} + K_\phi \Delta r + O\left(\frac{h}{r}\right)^3$$

Arrostando al termine lineare,

$$d \approx r - \hat{r} \cdot \hat{r}$$

Questa è l'approssimazione che si può fare per la fase; al fine di controllare l'errore, facciamo la seguente magnificazione nel termine di errore Δr :

$K_\phi \Delta r \leq S\pi$, S numero piccolo;

$$D \stackrel{def}{=} |\phi(r)| = K_\phi \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda_\phi} \frac{1}{2} r \left(\frac{r'}{r}\right)^2 [t - (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2] \leq S\pi$$

Altre magnificazioni: r' , distanza tra \odot e il punto posteriore sarà minore o uguale dell'raggio della sfera minima, mentre $\hat{r} \cdot \hat{r}'$ sarà certamente minore o uguale a 1; allo stesso modo, $[t - (\hat{r} \cdot \hat{r}')^2]$ sarà minore o uguale a t : Magisso!

$$\rightarrow D \leq \frac{2\pi}{\lambda_\phi} \frac{1}{2} r \left(\frac{\frac{h}{2}}{r}\right)^2 \leq S\pi \Rightarrow \text{di solito, come } S \text{ si usa } \frac{1}{8},$$

in modo da aver un errore di fase massimo di $\frac{\pi}{8}$ ($22,5^\circ$)

$$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_\phi} \frac{1}{2} \frac{h^2}{4r} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow r \geq \frac{2h^2}{\lambda_\phi}$$

Questo è il valore minimo di $|r|$ per cui si rende accettabile l'errore di fase.

Questa viene detta "distanza di Fraunhofer", e per $r > r_{\min}$ si intende la "regione di Fraunhofer".

RASSUMO FINALE
 Tiriamo le somme: mediante gli integrali di irradiazione, senza approssimazioni, so che: [copiare int. irr. congrati, p. 113]; se valgono le approssimazioni sul termine di ampiezza, $d \Rightarrow r$, dunque $G(r)$ può esser portata fuori degli integrali di irradiazione; in questo primo step, ossia la sola approssimazione del termine di ampiezza, non posso toccare il termine di fase, per il quale l'approssimazione è più sofisticata; suppondo che:

$$G(r) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \frac{\exp[-jk_0 r]}{4\pi r}, \quad G(d) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \frac{\exp[-jk_0 d]}{4\pi r}, \quad d = r - r'$$

posso dire che:

$$\underline{\underline{G}}(\underline{d}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \frac{\exp(-j\kappa_0 r)}{4\pi r} \exp(-j\kappa_0 |\underline{d}-\underline{r}|)$$

[17]

$\underline{\underline{G}}(\underline{r})$: le matrici possono essere confuse, (di $\underline{\underline{G}}(\underline{r})$ e $\underline{\underline{G}}(\underline{d})$)
grazie alle approssimazioni introdotte

Sostituendo nell'integrale di irradiazione (I13):

$$\underline{E}(\underline{r}) \approx -j\omega \mu \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \int_{\mathcal{N}} \underline{\underline{J}}(\underline{r}') \exp(-j\kappa_0 |\underline{d}-\underline{r}'|) d\underline{r}' - \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \int_{\mathcal{N}} \underline{\underline{H}}(\underline{r}') \exp(-j\kappa_0 |\underline{d}-\underline{r}'|) d\underline{r}'$$

idem per $\underline{\underline{H}}$ [non sto li a forza, solo in bello].

Il pezzo mancante è l'esponenziale: come detto, però, vale l'approssimazione
per la fase,

$$|\underline{d}| \approx |\underline{r} - \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}'| \rightarrow |\underline{d} - \underline{r}| = |\hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}'|$$

Posso riscrivere ora gli integrali di irradiazione come:

$$\underline{E}(\underline{r}) \approx -j\omega \mu \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \int_{\mathcal{N}} \underline{\underline{J}}(\underline{r}') \exp(j\kappa_0 \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}') d\underline{r}' - \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \int_{\mathcal{N}} \underline{\underline{H}}(\underline{r}') \exp(j\kappa_0 \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}') d\underline{r}'$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{r}) \approx \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \int_{\mathcal{N}} \underline{\underline{J}}(\underline{r}') \exp(j\kappa_0 \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}') d\underline{r}' - j\omega \epsilon \int_{\mathcal{N}} \underline{\underline{H}}(\underline{r}') \exp(j\kappa_0 \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}') d\underline{r}'$$

Si noti che questi integrali sono simili alle definizioni di \tilde{J}_3 : questo vuol dire che, conoscendo $\tilde{\underline{\underline{J}}}(\kappa_0 \hat{\underline{r}})$, $\tilde{\underline{\underline{H}}}(\kappa_0 \hat{\underline{r}})$, di fatto, si conoscono molte proprietà dei campi irradiati dalle sorgenti continue al limite.

Si può dunque scrivere:

$$\underline{E}(\underline{r}) \approx -j\omega \mu \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \tilde{\underline{\underline{J}}}(\kappa_0 \hat{\underline{r}}) - \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \tilde{\underline{\underline{H}}}(\kappa_0 \hat{\underline{r}}) ;$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{r}) \approx -j\omega \epsilon \underline{\underline{G}}(\underline{r}) \tilde{\underline{\underline{H}}}(\kappa_0 \hat{\underline{r}}) + \underline{\underline{G}}'(\underline{r}) \tilde{\underline{\underline{J}}}(\kappa_0 \hat{\underline{r}}) ;$$

Queste espressioni sono ancora semplificabili: se consideriamo il far field, abbiamo che i termini $\propto \frac{1}{r}$ diventano infinitesimi; $A \rightarrow \phi$, $B \rightarrow E$; ciò che avremo saranno delle $\underline{\underline{G}}_a(r)$ al posto delle $\underline{\underline{G}}$: $C \rightarrow -jK\hat{r}$

$$\underline{\underline{G}}_a(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \phi(r) = \underline{\underline{G}}_a \phi(r); \quad \underline{\underline{G}}_a'(r) = -jK\hat{r} \times \underline{\underline{G}}_a \phi(r)$$

I campi di far field dunque diventano:

$$E(r) \approx -j\omega \mu \underline{\underline{G}}_a(r) \tilde{J}(K\hat{r}) - \underline{\underline{G}}_a'(r) \tilde{H}(K\hat{r});$$

$$H(r) \approx -j\omega \epsilon \underline{\underline{G}}_a(r) \tilde{H}(K\hat{r}) - \underline{\underline{G}}_a'(r) \tilde{J}(K\hat{r});$$

Delta di Dirac e sorgenti: delta di punto

Finora, in ambito di irradiazione, ci siamo preoccupati di esprimere E e H ("uscite del sistema") in maniera comoda da valutare rispetto alle sorgenti. Sto intendo proporre qualche appunto sulla "matematica delle sorgenti". La cosa più facile da integrare, nondi' la cosa più "semplice", è il punto. Essa, nello spazio, può essere espresso mediante funzioni impulsive dello spazio: la S di Dirac. L'utilità della S (senza entrare in una descrizione formale), è dovuta da

ciò:

$$\int_I f(t) \delta(t-t') dt = \begin{cases} f(t'), & t' \in I \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

ciò permette di scomporre gli elementi in vari contributi, elaborarli, e sovrapporli gli effetti, dato la linearità del "sistema".

I nostri problemi vi sono spostati nel dominio spaziale / spettrale; $f(t)$ verrà una $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\underline{r})$, dove $\underline{r} = (x, y, z)$. Si avrà:

$$\int_V f(\underline{r}) \delta(\underline{r}-\underline{r}') d\underline{r}$$

Si deve "costruire" una $S(\underline{r})$ tale da poter esser integrata, con risultati analoghi a prima su un volume V .

Obiettivo: determinare $S(\underline{r})$ tale per cui:

$$\int_V f(\underline{r}) \delta(\underline{r}-\underline{r}') d\underline{r} = f(\underline{r}')$$

sviluppo l'integrale usando queste 8:

$$\int_{\Sigma} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \delta(x - x') dx \delta(y - y') dy \delta(z - z') dz = r' \in V$$

(119)

Ma, ormai abbiamo chiuso il problema vediamo le:

$$\int_x f(x, y, z) \delta(x - x') dx = f(x', y, z)$$

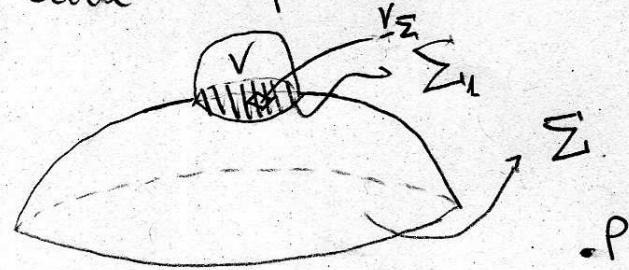
Facendo in questo modo, si ottiene:

$$\delta(r) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \rightarrow \text{delta di punto}$$

Delta di linea, delta di superficie

Con la delta di punto posso esprimere agevolmente sorgenti puntiformi (esempi in seguito); nella realtà, però, le sorgenti non sono fisse, bensì distribuite, su una linea (sorgenti filiformi), o su di una superficie (sorgenti distribuite su di una superficie).

- delta di superficie:



Si definisce la $\delta_{\Sigma}(r)$ (delta di superficie) come:

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma}(r) &\stackrel{\Delta}{=} \int_V f(r) \delta_{\Sigma}(r - r_{\Sigma}) dv = \\ &= \int_{\Sigma_1} f(r_{\Sigma}) d\Sigma \end{aligned}$$

Spieghiamo: dato il volume V , Σ_1 è la porzione di superficie Σ che appartiene, che si INTERSECA con esso: $\Sigma_1 = \Sigma \cap V$. Σ_1 è una superficie su cui si ha la concentrazione di sorgenti. La δ_{Σ} permette di ricondurre l'integrale di volume a un semplice integrale di superficie valutato sulla superficie intersezione.

Esempio: $\Sigma = \{P(x, y, z) | z = z_0\}$: usando la df., $\int_V f(x, y, z) \delta_{\Sigma}(r - r_{\Sigma}) dx dy dz =$
[dir. all'n] $\delta_{\Sigma}(r - r_{\Sigma}) = \delta(z - z_0)$; $[\delta(z - b)] = m^{-1}$. $\int_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy$

-delta di linea: data una sorgente su di un cammino γ (un "filo"), voglio poter ricordare tutto l'integrale tridimensionale dei contributi della parte di sorgente filiforme contenuta in V volume; definito $\delta_{\gamma} = \gamma \cap V$, la δ_{γ} (delta di linea) sarà da definire come:

$$\delta_{\gamma}(r - r_{\gamma}) : \int_V f(r) \delta_{\gamma}(r - r_{\gamma}) dV = \int_{\gamma} f(r_{\gamma}) \delta_{\gamma}$$

ossia in modo tale da ricordare l'integrale di volume è un integrale di linea. Il vettore r_{γ} identifica la linea (come anche r_{Σ}), ed è funzione di un parmetro γ . La δ di linea è ovunque nulla tranne che nei punti in cui l'integrale viene ridotto a integrale sulla linea.

Esempio: data $\gamma: \{P(x_{10}, z) | x=x_0, y=y_0\}$ [retta parallela a \hat{z}], ho:

$$\int_V f(x_{10}, z) \delta_{\gamma}(r - r_{\gamma}) dV = \int_{\gamma} f(x_0, y_0, z) dz$$

$$\Rightarrow \delta_{\gamma}(r - r_{\gamma}) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad [\delta_{\gamma}] \cdot m^{-2} \quad \begin{array}{l} \text{ricorda integrale} \\ \text{di volume a 1d.} \\ \text{dunque "elimina" due} \\ \text{dimensioni spaziali!} \end{array}$$

Momenti equivalenti N_e e N_m - dipolo elementare

A questo punto, partiamo con l'analisi delle strutture di base per poter parlare di antenne.

Si è parlato di sorgenti di vario tipo; si consideri il caso per cui $h \ll \lambda_{\phi}$. Questo significa che sostanzialmente $h \approx \phi$ e la sorgente è un punto formata esprimibile mediante una δ di punto:

$$J(r) = N_e S(r - r'') \quad [\text{ho usato } \bar{N} \text{ perché non ho di meglio}]$$

Cos'è N_e ? Esso è detto "momento" del "dipolo elementare"; dove esso è il "quantum" delle antenne.

Cos'è questo "momento"? Beh, integrando $J(r)$, si vede: ($r'' \in V$)

$$\int_V J(r) dV = N_e$$

Per quanto idealizzato, cos'è un dipolo elementare? Essendo una S di punto, ciò che si vede è che nel punto in cui si trova la corrente è infinito (S di Dirac, la teoria...). L'infinito a noi non piace dunque cerchiamo di dare un significato un po' più fisico: si consideri, esterno al punto r'' , un cilindretto, V_1 , altezza l , area

A di base, perciò:

$$\underline{J}(r) = \begin{cases} J_0 \hat{l}, & \forall r \in V_1 \\ \neq \text{altrove} & \end{cases}$$

Il momento \underline{N}_e si può calcolare come:

$$\underline{N}_e = \int_{V_1} \underline{J}(r) dr = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{\partial A} J_0 dA dl \hat{l} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I_0 dl \hat{l} = \boxed{l I_0 \hat{l}}$$

Si tratta dunque del prodotto di I_0 , densità di corrente, dell'area A e della lunghezza l . Se A e l degenerano verso ϕ , si ottiene la S punto.

Se le correnti magnetiche \underline{M} sono nulle,

$$\underline{E}(r) \approx -j\omega \mu G(r-r_0) \underline{N}_e$$

$$\underline{H}(r) \approx G'(r-r_0) \underline{N}_e$$

Riprenderemo la cosa.

Direttività, vettori di irradiazione

Si considerino le espressioni dei campi:

$$\underline{E}(r) = \left\{ -j\omega \mu \underline{\underline{G}} \tilde{J}(kr) + jk_0 (\hat{r} \times \underline{\underline{G}}) \tilde{H}(kr) \right\} \frac{\exp(-jk_0 r)}{4\pi r}$$

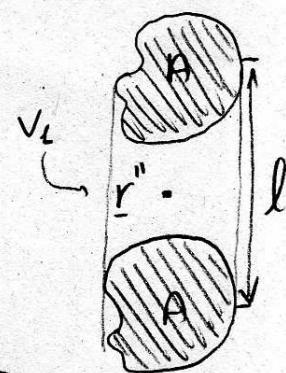
$$\underline{H}(r) = \left\{ -j\omega \mu \underline{\underline{G}} \tilde{H}(kr) - jk_0 (\hat{r} \times \underline{\underline{G}}) \tilde{J}(kr) \right\} \frac{\exp(-jk_0 r)}{4\pi r}$$

Nella $\{\}$ c'è dipendenza da \hat{r} , dunque da θ e ϕ . Ci interessa?

Bene, sì: i moduli di \underline{E} e \underline{H} variano con θ e ϕ , dunque con la rotazione, a parità di distanza dal punto potenziale dell'osservatore.

Dallo onde plane e simili, so che: $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$; $K_0 = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

Introduciamo questi parametri nelle espressioni dei campi:



$$\omega \mu = Z_0 \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow E(\vec{r}) &= -j\omega \mu \left\{ \sum_{\alpha} \tilde{J}(k_{\alpha} \vec{r}) + \frac{j k_{\phi}}{-j\omega \mu} \hat{r} \times \sum \tilde{H}(k_{\phi} \vec{r}) \right\} \phi(\vec{r}) = \\ &= -j Z_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} \phi(\vec{r}) P_e(\vec{r}) = -j \frac{Z_0}{2r \lambda_0} \exp(-jk_{\phi} r) P_e(\vec{r}) \end{aligned}$$

dove

$$P_e(\vec{r}) \triangleq \sum_{\alpha} \tilde{J}(k_{\alpha} \vec{r}) + \underbrace{\frac{j k_{\phi}}{-j\omega \mu} (\hat{r} \times \sum) \tilde{H}(k_{\phi} \vec{r})}_{-\frac{1}{20}}$$

Si può fare lo stesso per H :

$$H(\vec{r}) = -j\omega \epsilon \phi(\vec{r}) P_m(\vec{r}) = -j \frac{Y_0}{2r \lambda_0} \exp(-jk_{\phi} r) P_m(\vec{r})$$

dove:

$$P_m(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \tilde{H}(k_{\alpha} \vec{r}) + \frac{j k_{\phi}}{-j\omega \epsilon} \hat{r} \times \sum \tilde{J}(k_{\alpha} \vec{r})$$

I vettori P_e e P_m contengono l'informazione dell'andamento del campo in funzione di \vec{r} e se i essi sono detti "vettori di irradiazione" o "di Schelkunoff". Si noti che:

$$P_m(\vec{r}) = Z_0 \hat{r} \times P_e(\vec{r}).$$

Relazione di impedenza

Date le formule "generali", proviamo a calcolare $\hat{r} \times E(\vec{r})$:

$$\hat{r} \times E(\vec{r}) = \left\{ -j\omega \mu \hat{r} \times \sum \tilde{J}(k_{\alpha} \vec{r}) + \hat{r} \times [j k_{\phi} \hat{r} \times \sum \tilde{H}(k_{\phi} \vec{r})] \right\} \phi(\vec{r})$$

Ora:

$$\cdot \hat{r} \times \sum \tilde{J} = \hat{r} \times \sum \tilde{J} = \hat{r} \times \tilde{J} ;$$

$$\cdot \hat{r} \times (\hat{r} \times \tilde{H}) = \hat{r} \times (\hat{r} \times \sum) \quad \tilde{H} = [\hat{r} \sum \hat{r} - (\hat{r} \cdot \hat{r}) \sum] \tilde{M} = \\ = [\hat{r} \hat{r} - \sum] \tilde{H}(k_{\phi} \vec{r}) = - \sum \tilde{H}(k_{\phi} \vec{r})$$

Ora, portiamo fuori " $-j\omega \mu$ ", e consideriamo:

$$\frac{L}{Z_0} \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{j\omega \mu}{Z_0} \left\{ (\hat{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{\Sigma}}) \tilde{\underline{\mathbf{J}}}(\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{r}}) + \frac{L}{Z_0} \underline{\underline{\Sigma}} \tilde{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{r}}) \right\} \phi(r)$$

$$\hookrightarrow \underline{\mathbf{y}} \phi \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j \phi(r) \left\{ K_\phi (\hat{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{\Sigma}}) \tilde{\underline{\mathbf{J}}}(\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{r}}) + \frac{K_\phi}{Z_0} \underline{\underline{\Sigma}} \tilde{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{r}}) \right\}$$

$$\hookrightarrow \underline{\mathbf{y}} \phi \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \phi(r) \left\{ -j\omega \epsilon \underline{\underline{\Sigma}} \tilde{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{r}}) - jK_\phi (\hat{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{\Sigma}}) \tilde{\underline{\mathbf{J}}}(\mathbf{k}_0 \hat{\mathbf{r}}) \right\} \xrightarrow{\frac{K_\phi}{Z_0} = \omega \epsilon} \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

Questo significa che, per sorgenti esterne, vale comunque una relazione di impedenza:

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{L}{Z_0} \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$$

Parliamo di vettore di Poynting, ora che abbiamo gli elementi per parlar con più facilità:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \left[-j \frac{Z_0}{2r\lambda_0} \exp(-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \underline{\mathbf{P}}_e(\mathbf{r}) \right] \times \left[-j \frac{Y_0}{2r\lambda_0} \exp(j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \underline{\mathbf{P}}_m(\hat{\mathbf{r}}) \right]^* =$$

$$= \frac{L}{4r^2 \lambda_0^2} \left[\underline{\mathbf{P}}_e(\hat{\mathbf{r}}) \times \underline{\mathbf{P}}_m^*(\hat{\mathbf{r}}) \right]$$

Ma, tra i vettori di irradiazione, vale una relazione di impedenza:

$$\underline{\mathbf{P}}_m(\hat{\mathbf{r}}) = Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{P}}_e(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{Z_0}{4r^2 \lambda_0^2} \left[\underline{\mathbf{P}}_e(\hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{P}}_e^*(\hat{\mathbf{r}}) \right] = \frac{Z_0}{4r^2 \lambda_0^2} \left\{ \left[\underline{\mathbf{P}}_e(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \underline{\mathbf{P}}_e^*(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\mathbf{r}} - \left[\underline{\mathbf{P}}_e(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] \underline{\mathbf{P}}_e^*(\hat{\mathbf{r}}) \right\} =$$

$$= \frac{Z_0}{4r^2 \lambda_0^2} |\underline{\mathbf{P}}_e(\hat{\mathbf{r}})|^2 \hat{\mathbf{r}}$$

Come noto, il vettore di Poynting è legato alla variazione del flusso di energia del campo elettromagnetico; di qui si vedrà che, per campi irradianti, conoscendo $|\underline{\mathbf{P}}_e(\hat{\mathbf{r}})|^2$ lo si calcola.

[noto a p. 45, 46, + dati!!]
47, 48

Dipolo elementare [sarebbe da mettere qua pure la parte sui monali]

Concludo ora il discorso sul dipolo elementare; faccio l'analisi per lontananza, usando le approssimazioni della diodura di Green. Ho che:

$$\underline{G}(\underline{r}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\phi}(\underline{r}) \quad \begin{array}{l} \text{[già fatto come si fa a trovare]} \\ \text{questa approssimazione} \end{array}$$

$$\hookrightarrow \underline{G}(\underline{r}) \approx \underline{G}_d(\underline{r}) = (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}) \underline{\phi}(\underline{r}) = \underline{\Sigma}_d \underline{\phi}(\underline{r})$$

Come già dimostrato (riducendo gli integrali di irradiazione etc.).

$$\begin{cases} \underline{E}(\underline{r}) \approx -j\omega\mu \underline{\Sigma}_d \underline{\phi}(\underline{r}) \\ \underline{H}(\underline{r}) \approx -jK_d \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\Sigma}_d \underline{\phi}(\underline{r}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dove ricordiamo} \\ \text{che} \end{array} \quad \underline{\phi}(\underline{r}) = \underline{\phi}(\underline{r}) = \frac{\exp(-jK_d |\underline{r}|)}{4\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

Cerchiamo di trovare una relazione di impedenza:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \underline{\Sigma}_d \underline{\phi} = \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\Sigma}_d \underline{\Sigma}_d \underline{\phi} = \hat{\mathbf{r}} \times \underline{E}(\underline{r}) \approx -j\omega\mu \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\Sigma}_d \underline{\phi}(\underline{r}) = -j\omega\mu \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\Sigma}_d \underline{\phi}(\underline{r})$$

Cosa significa ciò? Beh, ancora un passaggio: taccogo $-j\omega\mu$ e moltiplico per $-jK_d$:

$$\hookrightarrow -jK_d \left[\frac{1}{j\omega\mu} \right] \hat{\mathbf{r}} \times \underline{E}(\underline{r}) = -jK_d \hat{\mathbf{r}} \times \underline{\Sigma}_d(\underline{r}) \underline{\phi}(\underline{r}) = \underline{H}(\underline{r})$$

$$\text{Ricordando al solito che } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad K_d = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad \frac{K_d}{\omega\mu} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z_0}$$

$$\hookrightarrow H(\underline{r}) \approx \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{r}} \times \underline{E}(\underline{r})$$

Un'altra nota:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \mathcal{O}\left[\frac{1}{(K_d r)^2}\right]; \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \underline{H}(\underline{r}) = \mathcal{O}\left[\frac{1}{(K_d r)^2}\right] \quad \begin{array}{l} \text{sono termini} \\ \text{trascurabili!} \end{array}$$

↪ il campo elettromagnetico tende a sembrare un'onda piana, con $K = K_d \hat{\mathbf{r}}$:

$$\exp(-jK \cdot \underline{r}) = \exp(-jK_d \hat{\mathbf{r}} \cdot \underline{r}) = \exp(-jK_d r) \quad \begin{array}{l} \text{[termine della funzione di Helmholtz]} \\ \text{[scalar di Green]} \end{array}$$

Calcoliamo ora il vettore di Poynting del campo irradiato:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^* = \underline{E} \times \left(\frac{c}{2\pi} \hat{r} \times \underline{E}^* \right) = \frac{c}{2\pi} \left[(\underline{E} \cdot \underline{E}) \hat{r} - (\hat{r} \cdot \underline{E}) \underline{E}^* \right] \approx \hat{r} |\underline{E}|^2 \frac{c}{2\pi}$$

Inoltre, $\hat{r} \cdot \underline{E} \approx \phi$, poiché $\underline{E} \approx \underline{\text{costante}} \phi(r)$

\hat{r} è la direzione dell'onda, in quanto \underline{S} è parallelo a \hat{r} , dunque l'energia tende a propagarsi in quella direzione.

Nella forma più generale, qual è l'andamento dell'onda emessa dal doppio elementare? Beh, alcune premesse: Considero:

$$\underline{N}_e = N \hat{u} \quad [\text{dove } \hat{u} \text{ è la "direzione dell'asse del doppio"}]$$

Usando un sistema di coordinate sferico, ponendo il doppio nella sua origine e orientando l'asse polare secondo l'asse del doppio ($\hat{u} = \hat{z}$), ottengo che (basta vedere le formule dei versori):

$$\underline{N}_e = N \left[\hat{r} (\hat{r} \cdot \hat{z}) + \hat{\theta} (\hat{\theta} \cdot \hat{z}) + \hat{\phi} (\hat{\phi} \cdot \hat{z}) \right]$$

sferiche

Questo, poiché stiamo "proiettando", al fine di effettuare in questo modo il cambio di coordinate verso le sferiche. Dal formikano, sostituendo le espressioni dei versori, si trova:

$$\underline{N}_e = N \left[\hat{r} \cos(\theta) - \hat{\theta} \sin(\theta) + \hat{\phi} \right] \xrightarrow{\text{in forma vettoriale}} N \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \underline{E}(r, \theta, \phi) \approx -j\omega \mu_0 \phi(r) N \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

al far field, $A \rightarrow \phi$, dunque:

$$\underline{E}(r, \theta, \phi) \approx -j\omega \mu_0 \phi(r) (-\sin \theta) \hat{\phi}$$

$\sin \theta$ è detto "fattore di obliquità": è esso lo discriminante nella varia ω l'intensità del campo elettromagnetico.

I25

Diagrammi di irradiazione - esempio (dipolo hertziano).

Introduco a questo punto l'idea di ciò che è il diagramma di irradiazione: ci chiediamo in sostanza quali siano le superfici ad ampiezza costante e a fase costante per il campo (per esempio, $\underline{E}(r)$). Ogni radiatore ha un "solido di irradiazione"; ossia un volume nel quale il campo \underline{E} (o \underline{H}) assume certi valori. I diagrammi di irradiazione descrivono una sezione di questo solido, rispetto ad alcuni piani di interesse. Si pone:

$$|\underline{E}(r)| = K \quad [K \text{ costante}]$$

$$\hookrightarrow \text{si trova: } \frac{1}{r} |\underline{P}_e(\hat{r})| = \frac{1}{r} |\underline{P}_e(\vartheta, \phi)| = K.$$

$$\hookrightarrow S_A : r(\vartheta, \phi) = K |\underline{P}_e(\hat{r})| \quad \text{Sono superfici che vengono poi di seguito in sistemi di coordinate sferiche}$$

questi, sono i diagrammi di irradiazione.

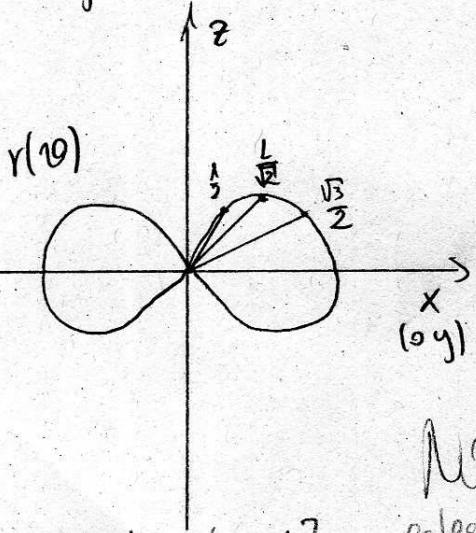
La regione te il massimo assoluto e i primi zero è della "lobo principale"; gli altri sono i "lobi secondari".

Consideriamo un primo diagramma di irradiazione: quello del dipolo hertziano.

Ho:

$$|\underline{E}(r)| = K \Rightarrow \frac{|\sin(\vartheta)|}{r} = K \Rightarrow r = r(\vartheta) = K \sin(\vartheta) \quad \forall \phi$$

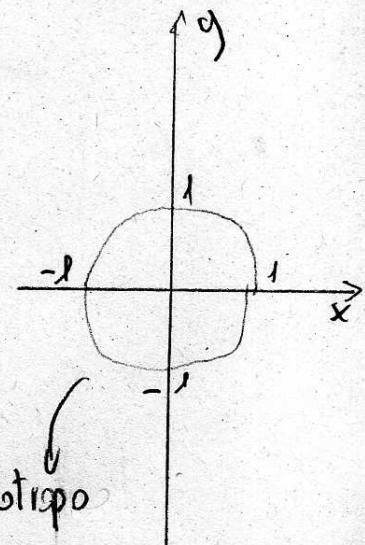
Disegnando sui piani x e y ciò, si vede la seguente figura, al variare dell'angolo ϑ : il luogo dei vari punti di $r(\vartheta)$ è questa specie di toro.



[Piani (x,z) , (y,z)]

Essendo invece costante rispetto a ϕ , il taglio rispetto a ϕ sarà una circonferenza (il luogo dei punti): tutto costante! (diagramma isotropo).

Ma fatto Reglini esteso (p. 55) e tutto ciò che è campo cost.



[Piano equatoriale]

Alcune note da Antenne e Teori lez.

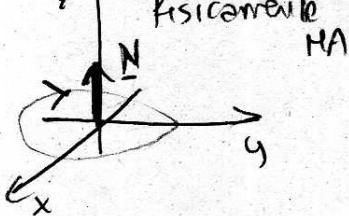
- Antenne: "trasduttore" da la tensione, corrente a campo EM.
- Prima antenna: nel 1884, Hertz, dunque è una scienza "recente".
(dipolo Hertzsiano). Poi Marconi etc.
- EM: sviluppato soprattutto durante la guerra (anni '50).
- Mezzi isotropi: vettori E e H , A e B , paralleli

- \vec{r} descrive i punti di sorgente dall'origine O .

- Vettore di Poynting: densità di energia:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^* = P + jQ \quad \begin{cases} P \text{ ed. attiva} \\ Q \text{ ed. reattiva} \end{cases}$$

- Dipolo magnetico: simulabile mediante una spira, nella quale scorre una corrente elettrica;



$$N_m = j\omega \mu_0 I_a A^2 \quad [\text{si dimostra}]$$

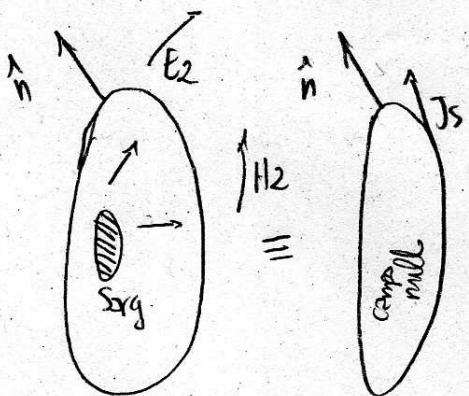
Si scambiano gli orientamenti di campi E e A .

- Teorema di equivalenza

Si ha che fare con integrali di volume, e la cosa è faticosa; ciò che vogliamo fare è trasformare l'int. di volume in un int. di superficie.

È paragonabile con il teorema di Thévenin: vedere una certa struttura semplificata all'esterno dei morsetti. Esso dice che se noi abbiamo una

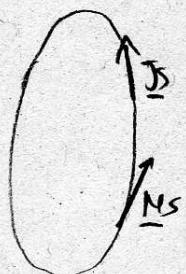
distribuzione di sorgenti in un volume, era generata dal campo E_1 e H_1 all'interno.



E_1 e H_1 all'esterno. Dalle condizioni al contorno nelle discontinuità, è noto che vi deve essere continuità delle componenti tangenziali di E e H .

Se si considera una seconda struttura senza corpo, era non può avere all'esterno E_2 o H_2 di prima; per poterlo avere si deve postulare sulla superficie la presenza di condensatori superficiali, alte a "cavare" la discontinuità: J_S e M_S : (I28)

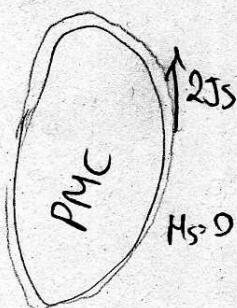
$$\begin{cases} J_S = \hat{n} \times H_2 \\ M_S = E_2 \times \hat{n} \end{cases}$$



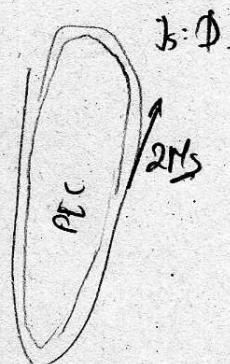
In questo caso le condizioni al confine sono rispettate!

Ora le sorgenti, equivalenti, non sono più in un volume, ma in una superficie, dunque gli integrali di volume già sono stati indotti a integrali di superficie. "I campi non sanno chi è che li genera" ! !! Tutto fa "mistero".

Altrettanto: possiamo inserire, nella superficie, un PEC (Perfect Electric Conductor), immediatamente al di sotto della superficie su cui stanno le onde "di compensazione". Ciò "contacircula" le correnti magnetiche, e "radoppia" quelle elettriche:



La stessa cosa si può fare andando con un PEC, ottenendo solo correnti magnetiche, in solo tipo di domanda! Ciò, a nostra salvo: è un modello!!!



Si dovrebbe conoscere comunque E_2 e H_2 , che andrebbero calcolati con un integrale di volume: non ha senso! Ciò che di fatto si fa è calcolare in maniera tale i corpi elettrici e magnetici sulla superficie, con qualche approssimazione.

Interpretazione fisica: questo è il principio di Huygens-Fresnel: in una pendenza ondosa la grandezza intensitativa in un punto P si calcola come somma di tanti contributi di onde elementari, della superficie d'onda.

Le correnti superficiali vengono fuori dai campi: sostituendo le espressioni con i campi si vede che l'onda, il campo $E(t)$ è data da un integrale di onde che hanno ampiezza proporzionale al campo sulla superficie.

(I29)

- SWR: Standing Wave Ratio $\rightarrow \text{RS} \rightarrow (S)$
- RL_R: Return Loss Ratio (rapporto di perdite di riflessione) $\triangleq 20 \log_{10} |M|$

- Parametri d'antenna

Guadagno (in Tx)

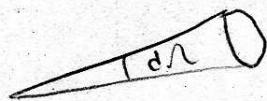
$$G(\vartheta, \phi) = \frac{\frac{dP}{ds}}{\left(\frac{dP}{ds}\right)_i} \rightarrow \begin{array}{l} \text{densità di potenza} \\ \text{generata in un punto dall'antenna nostra} \end{array}$$

\rightarrow come sopra, rispetto al radiatore isotropo.

$$\hookrightarrow \frac{dP/d\Omega}{\frac{P_e}{4\pi}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{densità angolare di potenza} \\ \text{medie} \end{array}$$

$\left(\text{L}_i \pi \text{ steradianti} \right)$

Ricordando infatti che:



$$ds = r^2 d\Omega$$

$$\hookrightarrow \frac{dp}{ds} = \frac{dp}{r^2 d\Omega}$$

la potenza irradiata dal radiatore isotropo è:

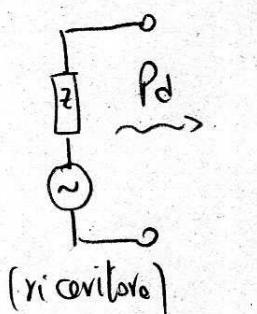
$$\frac{dp}{ds} = \frac{P_e}{4\pi r^2} \implies \text{da qui, la formula di prima.}$$

In ricezione (Ps):

$$G(\vartheta, \phi) = \frac{P(\vartheta, \phi)}{P_i} \rightarrow \begin{array}{l} \text{pot. ricevuta da NOSTRA ANTENNA} \\ \rightarrow n \quad n \quad n \quad \text{radiatore isotropo posto} \\ \text{nella stessa posizione.} \end{array}$$

Area equivalente (R_E)

Si definisce come quella grandezza che, moltiplicata per la potenza incidente sull'antenna, dà la potenza disponibile del bipolo equivalente.

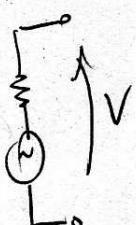


$$P_d = S A_{eq}$$

Permette di trasformare le grandezze elettromagnetiche in grandezze circolari.

Altezza efficace (R_E)

È quell'altezza per cui, se moltiplicata per il campo incidente, la dà tensione a vuoto:



$$V = h_{eff} \cdot E_{incidente}$$

Questi parametri sposso sono legati alla geometria dell'antenna! Nel caso dell'antenna efficace:

- in dipolo orizzontale, $|h_{eff}| = l$;
 - in dipolo corto, $|h_{eff}| = \frac{l}{2}$;
 - in dipolo $\lambda/2$, $|h_{eff}| = \frac{2l}{\pi}$.
- (risonante)

*(NOTA: NIENTE DI RICAVATO!
STUDIA RESISTENZA DI
MATERIALI!
Guarda appunti carillo per
stile volo!!! :-)*

Guadagno e area equivalente sono legati:

$$P_d = A_{eq} S;$$

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eq}$$

si ricava dal teorema di equivalenza!

(dove $A_{eq} = \gamma A$)

γ : efficienza di apertura

(coeff di utilizzazione di bocca).

Per apertura circolare,

$$G = \gamma C_\lambda^2, \quad C_\lambda = \frac{2\pi R}{\lambda}$$

Per una antenne parabolica $V \approx 0,5 \div 0,7$; a tromba $V \approx 0,7 \div 0,8$. (I31)

- Direttività

Si dimostra che il campo elettrico ha una forma del tipo:

$$E(r) = V_0 \frac{\exp(-jk_0 r)}{r} F(\theta, \phi) \hat{p}(\theta, \phi)$$

dove $F(\theta, \phi)$ è la direttività, e \hat{p} è un versore di direzione E .

Sappiamo che:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{|E|^2}{Z_0} \Rightarrow \frac{|V_0|^2}{R^2} |F(\theta, \phi)|^2 \text{ è l'espressione della densità di potenza!}$$

$$\hookrightarrow G(\theta, \phi) = \frac{|V_0|^2}{R^2} \frac{4\pi \sigma}{P_e} |F(\theta, \phi)|^2$$

$$\text{se } \frac{|V_0|^2}{P_e} = 1, \text{ ho che } G(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2$$

G descrive l'intensità del campo irradiato al vario di θ e ϕ :
direttività.

- Polarizzazione

Di solito le antenne si progettano con determinate polarizzazioni, orientate alla applicazione dell'antenna. Di solito: lineare o circolare.

Nel caso per esempio di antenne da varie posizioni si usano polarizzazioni diverse.

Purtroppo si ha, nella antenna reale anche una polarizzazione spaziale detta "incrociata".

$$\xrightarrow{EP} \text{Il rapporto } \frac{EP}{Eq} \triangleq XPD \quad (\text{cross polarization discrimination})$$

↓ dobb

Le pol. può esser un problema grave, per esempio quando faccio il rius di frequenza: l'interferenza delle pol. può dar fastidio!