

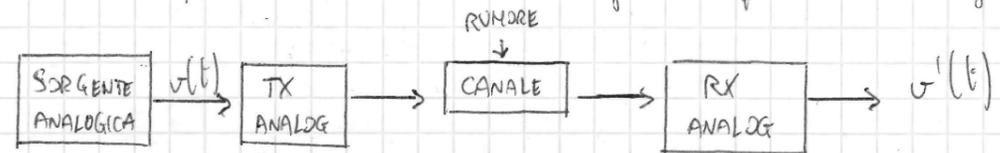
## Elementi di comunicazioni elettriche

Questo corso è incentrato sullo studio dei sistemi di trasmissione, sotto un punto di vista "fisco" (ingegneristico): ciò che non avremo, sarà l'analisi di sistemi di trasmissione sotto il punto di vista retistico, privilegiando dunque lo studio dei mezzi, dei sistemi di trasmissione, come "veicoli" per l'informazione, per i segnali. Incominciando dunque da una fondamentale classificazione, possiamo iniziare a intraprendere il nostro studio: sistemi analogici, e sistemi digitali.

### X Sistemi di trasmissione analogici

I sistemi di trasmissione analogici sono quelli in cui i segnali trasmessi hanno, nel dominio del tempo, una andamento continuo. Esempio pratico di ciò è la voce umana: per quanto sia complesso studiarla, essa è trattabile come segnale analogico.

Come è fatto un sistema analogico? Proponiamo il seguente schema:

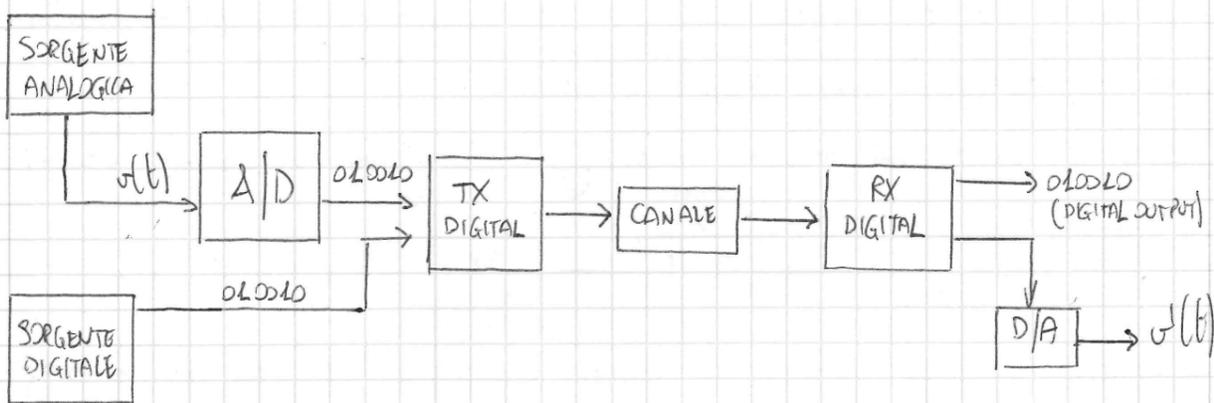


A partire da una sorgente di segnali analogici, come la voce umana, essa si può modellizzare come un segnale  $v(t)$ . Questa entra nel nostro sistema di trasmissione, incontrando per primo il trasmettitore analogico (TX ANALOG), ossia un dispositivo in grado di abilitare il segnale  $v(t)$  al canale. A seconda del canale utilizzato (doppino telefonico, canale, cavo in fibra ottica) si avrà un TX diverso (in grado di trasformare  $v(t)$  in segnale elettrico piuttosto che luminoso...). Il canale è il mezzo attraverso cui scorrono le

informazioni. Il canale è soggetto ad un fenomeno di disturbo, che degrada le comunicazioni: il rumore. Esempio sicuro di rumore è, in un aula, il vocare degli studenti, che copre le parole dei docenti.

Fuori dal canale, vi sarà il ricevitore (RX ANALOG): esso è un dispositivo duale al TX: traduce il segnale ricevuto dal canale, in un formato interpretabile al ricevente della comunicazione, fornendo  $v'(t)$ . La qualità del canale si determina, studiando quanto  $v(t)$  e  $v'(t)$  sono simili; se  $v(t) \approx v'(t)$ , allora il sistema di trasmissione è di buona qualità.

### Sistemi di trasmissione digitali



Un sistema digitale è in grado di trasmettere segnali analogici o digitali. Per i segnali digitali il passaggio è banale: una sorgente di "0" e "1" entra nel TX, mentre per i segnali analogici serve un convertitore analogico/digitale (A/D), ossia un dispositivo in grado di trasformare un segnale analogico in una sequenza di zeri e uni. Vedremo diverse tecniche (la PCM) per realizzare convertitori di questo tipo.

Il canale ha caratteristiche del tutto identiche a prima: esso è solo una "strada" per le informazioni, quindi, che esse passino come pacchetti discreti o come segnale continuo, il canale non ne sarà interessato.

L'uscita può essere numerica (o digitale), o analogica, mediante un convertitore D/A in uscita dal RX.

### 5 decibel (dB)

In telecomunicazioni vengono molto utilizzati i dB. Essi sono la minima variazione percepibile dall'occhio umano. Essi furono introdotti da Bell nell'ambito delle potenze: una minima in dB rappresenta un rapporto di potenze. Si parla dunque di unità di grandezza relative, ergo adimensionate. Una potenza  $P_2$ , in dB, si rappresenta ( $P_2$  rapporto di due potenze  $P_1$  e  $P_2$ ):

$$P_2/dB = 10 \log_{10} \frac{P_2 [W]}{P_1 [W]}$$

Si parla dunque di un rapporto; tutt'altra cosa sono i dBm: essi rappresentano una potenza assoluta, poiché un dBm si definisce come:

$$P/dBm = 10 \log_{10} \frac{P [W]}{1mW}$$

Ossia a 10 volte il logaritmo di base 10 della potenza  $P$ , misurata in watt [W], ed 1 mW.

È possibile rappresentare dunque qualsiasi grandezza in dB, dove [V] è una certa unità di misura. Si noti che se si trattano

ampere, una grandezza lineare, come i volt [V] o gli ampere [A], il log andrà moltiplicato per "20":

Esempio pratico:

$$1 \text{ mV} / \text{dB} = 20 \log_{10} \frac{1 \text{ mV}}{1 \text{ V}}$$

Ultima nota: esistono due conti "facili da fare", a mente:

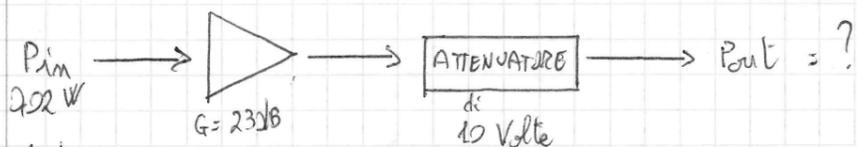
$$\bullet \frac{P_2}{P_1} = 10^n \rightarrow n \cdot 10 \text{ dB} \quad \bullet \frac{P_2}{P_1} = 2^n \rightarrow n \cdot 3 \text{ dB}$$

(N.B.: 3 è approssimato!)

Perché usare unità logaritmiche? Ci son diversi motivi:

- Si possono gestire facilmente unità di grandezza con ordini molto elevati.
- Son facili da usare, nei sistemi
- Si eliminano le "distorsioni", le differenze, tra unità lineari, quadratiche, rapporti o unità assolute: dB e dBm si possono sommare o sottrarre tranquillamente, qualsiasi sia la loro "provenienza".

Esempio Pratico



$$\frac{1}{10} / \text{dB} = -10 \text{ dB}$$

$$202 \text{ W} = 20 \text{ mW} / \text{dB} = 10 \cdot 2 \text{ mW} / \text{dB} = (10 + 3) \text{ dBm} = 13 \text{ dBm}$$

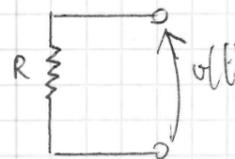
$$13 + 23 - 10 = 26 \text{ dBm} = P_{\text{out}} \approx 400 \text{ mW}$$

Mediante semplici somme, abbiamo ottenuto la  $P_{\text{out}}$  (potenza assoluta, non relativa), e risulterà semplicemente.

Rumore termico.

Come già accennato, il maggior degradatore di qualità delle comunicazioni in un sistema trasmissivo è il rumore. Nella fattispecie, il modello di rumore che usiamo maggiormente è il rumore termico.

Cerchiamo di capire cosa sia: dato un resistore,  $R$ , vediamo ciò:



$v(t)$  non è identicamente nulla, anche se il resistore non è alimentato da un generatore. Questo avviene perché il moto termico degli elettroni genera una tensione di rumore variabile nel tempo,  $v(t)$ , e valore medio nullo. Alla base di questo tipo di rumore si fondano tutte le telecomunicazioni.

Esiste solo una condizione (termica) tale per cui il rumore termico è nullo: lo zero assoluto (0 K,  $-273,16^\circ \text{C}$ ). Per questo, una maniera di ridurre il rumore termico è proprio quello di far lavorare i sistemi di trasmissione a temperature basse. Si può dimostrare che la densità spettrale di potenza del processo  $v(t)$ ,  $P_v(f)$ , valga:

$$P_v(f) = 2R \left[ \frac{h|f|}{2} + \frac{h|f|}{e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1} \right]$$

Dove:  $h$  è la costante di Planck:

$$h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$$

$$k = \text{costante di Boltzmann} \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$T$  = temperatura, in kelvin [K].

Il primo termine è semplicemente dovuto al principio di indeterminazione di Heisenberg, e di solito sarà da considerare

influenza solo in comunicazioni ottiche.

Soltanto, per temperature standard,  $\theta \approx 30^\circ \text{C}$ , e frequenze di ordini inferiori ai  $\frac{h\nu}{kT}$  THz,  $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ ; possiamo dunque sviluppare con Taylor, e quindi  $e^{-x} \approx 1 - x$ .

$$\Rightarrow P_s(f) \approx 2RkT$$

Il rumore ~~termico~~ <sup>termico</sup> è distribuito secondo una statistica gaussiana, a valore medio nullo.

Vogliamo calcolare dunque il valore efficace di  $v(t)$ . Ricordiamo che la tensione ha valore efficace definito come la media delle tensioni quadratiche, ossia

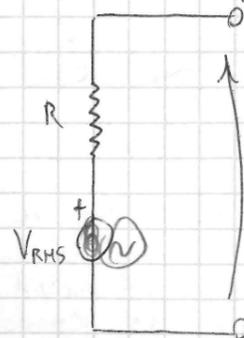
$$V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$$

RMS indica il valore efficace: Root Mean Square.

$$V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\int_{-B}^B P_s(f) df} = \sqrt{2RkT \int_{-B}^B df} = \sqrt{4RkTB} \quad [V]$$

Si noti che, poiché la densità spettrale di potenza  $P_s(f)$  è in realtà indipendente da  $f$ , ossia dalla frequenza, possiamo definire "bianco" questo tipo di processo casuale, poiché esso è uguale per qualsiasi frequenza, fissate le altre variabili.

Possiamo dunque modellare questo fatto in questo modo:



→ Possiamo dunque modellizzare  $R$  come un resistore ideale, alimentato da un segnale il cui valore efficace è quello appena misurato.

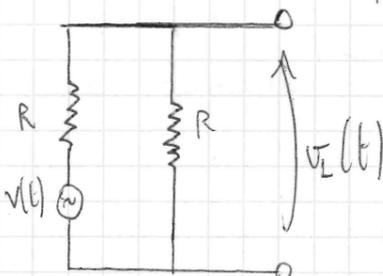
Analogamente, è possibile fare lo stesso discorso studiando una corrente  $i(t)$ ; usando una corrente, si arriva a determinare  $P_s(f)$ .

$$P_s(f) = \frac{2kT}{R}$$

Alcune osservazioni

Quella che si usa sempre in telecomunicazioni, è la densità spettrale di potenza; a meno che non si dica l'opposto, per potenza consideriamo sempre una potenza disponibile, ossia studiata su circuiti adattati (impedenza di carico complessa coniugata dell'impedenza del generatore).

Considerando un esempio circuitale:



Vediamo, dall'elettrotecnica, che  $v_L(t) = \frac{v(t)}{2}$

da potenza dunque sarà:

$$P_L(t) = \frac{v_L(t)^2}{R} = \frac{\left(\frac{v(t)}{2}\right)^2}{R} = \frac{v_{eff}^2}{4R} = P_s$$

Dove  $P_s$  è dunque la "potenza disponibile".

Usando le relazioni prima individuate, vediamo che:

$$P_s(f) = \frac{P_L(f)}{4R} = \frac{2RkT}{4R} = \frac{kT}{2}$$

PIU' SEMPLICE  
BASTA COSI'

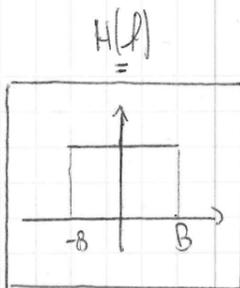
Questo è un risultato fondamentale, che ci permette di fare alcune osservazioni:

- 1) la potenza disponibile non dipende né dalla resistenza, né dalla frequenza
- 2) si tratta di una densità di potenza assoluta, poiché si misura in  $\left[\frac{W}{Hz}\right]$ ; possiamo dunque dire che essa abbia un forte significato fisico.

RIVEDERE

3) Il risultato non dipende dalla resistenza

4) Se consideriamo un filtro passa basso con frequenza di cut-off  $B$ , l'uscita sarà data da:

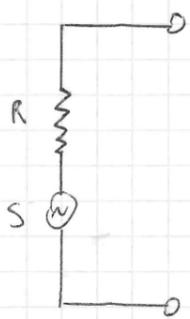


$$P = \int P_g(f) |H(f)|^2 df = \int P_o(f) |H(f)|^2 df = \frac{kT}{2} \cdot 2B = kTB \quad \left[ \text{poiché } P_o(f) = P_o, \text{ ma non dipende da } f \right]$$

Questa è la potenza di rumore disponibile. Come vediamo, è molto facile da calcolare.

Mediante la definizione di potenza disponibile, e le conoscenze sui sistemi LTI, è stato dunque possibile caratterizzare il rumore termico dei mezzi di comunicazione, o meglio di una semplice resistenza. Il passaggio "generalizzante" sarà affrontato in seguito.

Abbiamo finora caratterizzato i rumori termici, studiando una resistenza non alimentata. È possibile avere sorgenti di segnale, alimentanti il nostro canale, la nostra resistenza.



La sorgente  $S$  potrà apportare un contributo di rumore anche di natura non termica al sistema.

Dal punto di vista sistemistico, si introduce  $T_{eq}$ , o sia la temperatura equivalente di rumore, come:

$$T_{eq} \triangleq \frac{P(f_0)}{kB} \quad f_0 \in B$$

$P_d(f)$  è la potenza disponibile ad una certa  $f_0$ , o comunque ad un certo range di frequenze,  $B$ .

Finora abbiamo studiato una resistenza non alimentata: in questo caso,  $T_{eq}$  è la temperatura della suddetta resistenza in questione.

Se invece, oltre a  $R$ , una sorgente  $S$ ,  $T_{eq}$  sarà senza dubbio superiore alla sola  $T_r$ . Questo anche se la temperatura del sistema non varia.

$T_{eq}$  è un parametro fittizio da noi introdotto al fine di quantificare il rumore del sistema: non è generalmente possibile misurare  $T_{eq}$ , poiché essa è priva di significato fisico.

$T_{eq}$  permette dunque di modellizzare un qualunque sistema di trasmissione come influenzato da solo rumore termico: infatti, se consideriamo la formula:

$$P_d(f) = \frac{kT_{eq}}{2} \quad [T_{eq} \text{ temperatura equivalente di rumore}]$$

Siamo dunque riusciti a caratterizzare una sorgente, oltre ad una resistenza, sotto il punto di vista del rumore, riconducendo tutto al rumore termico, mediante l'introduzione di  $T_{eq}$ . Ora, estendiamo ulteriormente ciò.

Caratterizzazione dei doppi bipoli.

Un sistema di trasmissione è costituito da un certo numero di dispositivi, di blocchi, rappresentabili come doppi bipoli. Un doppio bipolo, dal punto di vista sistemistico, viene identificato mediante il guadagno,  $G_d(f)$ :

$$G_d(f) \triangleq \frac{P_{out}(f)}{P_{in}(f)} \quad \left[ \text{Considerando tutto adattato} \right]$$

in out

[in impedenza]

Di fatto,  $G_d(f)$  rappresenta il modulo quadro della funzione di trasferimento:  $G_d(f) = |H(f)|^2$

Come si sa da teoria dei segnali, è possibile caratterizzare dunque un doppio bipolo sotto il punto di vista spettrale come:

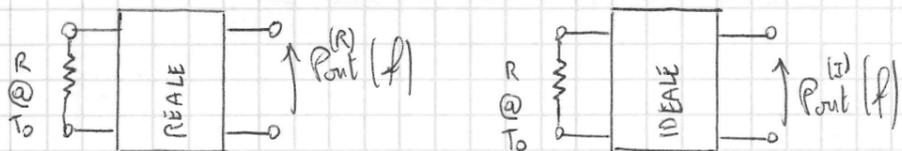
$$P_{out}(f) = G_d(f) P_{in}(f)$$

Vogliamo ora capire come si può caratterizzare un doppio bipolo sotto il punto di vista del rumore da esso prodotto. Per far ciò, useremo un piccolo stratagemma. Consideriamo di trovarci in una certa banda tale per cui il guadagno è costante,  $G_d$ .

Consideriamo il doppio bipolo, chiuso al suo ingresso con una resistenza nota  $R$ , a temperatura  $T_0$ . Questo è un doppio bipolo reale, ma guadagna  $G_d$  rispetto all'ingresso e produce un rumore interno.

$$P_{out}^{(R)}(f) = \frac{kT_0}{2} \cdot G_d + P_{int}(f) \quad [P_{int}(f) = \text{densità spettrale di potenza del rumore interno}]$$

Si ha cioè un'amplificazione di  $G_d(f) = G_d$  volte del rumore termico del solo resistore  $R$ , caratterizzato da  $T_0$ , più un rumore interno, generato indipendentemente dall'ingresso.



Consideriamo poi un doppio bipolo ideale, chiuso (sulla stessa frequenza) sulla stessa resistenza alla stessa temperatura, ma che quindi non produce rumore interno.

$$P_{out}^{(I)}(f) = \frac{kT_0}{2} G_d$$

L'uscita di questo blocco ha cioè solo l'amplificazione del rumore termico di  $R$ , ma non rumori interni.

Si definisce la cifra di rumore  $F(f)$  come:

$$F(f) = \frac{P_{out}^{(R)}(f)}{P_{out}^{(I)}(f)} = \frac{\frac{kT_0}{2} \cdot G_d + P_{int}(f)}{\frac{kT_0}{2} \cdot G_d}$$

$$F(f) \geq 1 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{N.B.: spesso } F(f) \text{ non varia con la frequenza: per questo} \\ \text{si usa indicarla solo come numero, ossia } F \end{array} \right]$$

Si noti che tutto ciò è vero a due condizioni, che vogliamo ricordare:

- 1) Sistema adattato in impedenza [per usare la potenza disponibile  $P_d$ ]
- 2)  $T_0 \approx 290 \text{ K}$  [per usare la formula approssimata di  $P_v$ ]

5 conti sono "facili" da fare, solo a queste condizioni.

Esiste un altro modo, già "visto", per caratterizzare i doppi bipoli sotto il punto di vista del rumore: la temperatura equivalente di rumore,  $T_{eq}$ .

Vediamo banalmente che:

$$P_{out}^{(R)}(f) = G_d(f) \cdot \frac{k}{2} \cdot [T_0 + T_{eq}(f)]$$

Questa  $T_{eq}(f)$  è una temperatura fittizia (come il solito), rappresentante il solo contributo di rumore introdotto dal doppio bipolo. Considerando  $G_d(f) = G_d$ , dunque:

$$P_{out}^{(R)}(f) = \underbrace{\frac{kT_0}{2} G_d}_{\text{RUMORE TERMICO DEL RESISTORE}} + \underbrace{\frac{kT_{eq}}{2} G_d}_{\text{RUMORE INTERNO DEL DOPIO BIPLO}} G_d$$

$$\text{Spesso, } T_{eq}(f) = T_{eq}$$

Esistono formule di conversione, per passare da cifra di rumore a temperatura. Vediamo come ricavare:

abbiamo visto che:

$$P_{out} = G_d \frac{k}{2} (T_0 + T_{eq}) \quad \text{oppure} \quad P_{out} = G_d \frac{k T_0}{2} F(f)$$

Dalla prima ricaviamo:

$$P_{out} = G_d \frac{k T_0}{2} \left( 1 + \frac{T_{eq}}{T_0} \right) = G_d \frac{k T_0}{2} F(f)$$

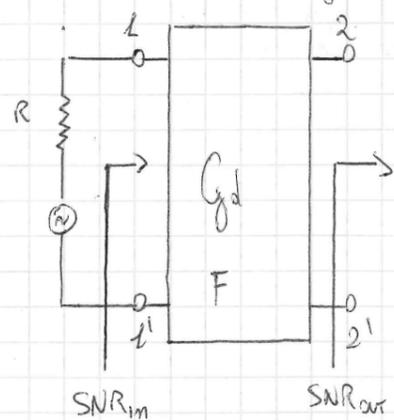
$$F = 1 + \frac{T_{eq}}{T_0} \iff T_{eq} = T_0 (F - 1)$$

Utilizzando queste definizioni, è possibile caratterizzare un doppio bipolo.

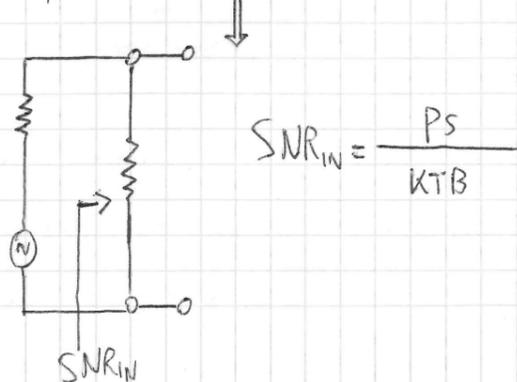
Si introduce un'ulteriore grandezza, il SNR (Signal to Noise Ratio), ossia una grandezza esprime il rapporto tra potenza disponibile,  $P_S$ , e potenza di rumore,  $P_N = kTB$  (come già calcolato).

Consideriamo ora un esempio molto significativo, al fine di legare, almeno per quanto riguarda (per ora) un caso particolare, il rapporto segnale/rumore con la cifra di rumore.

Consideriamo il seguente sistema:



Per calcolare  $SNR_{in}$ , dovremo considerare solo ciò che sta a sinistra dei morsetti 1 e 1', chiudendo in una resistenza  $R$  ai fini di adattare il carico.



$$SNR_{in} = \frac{P_S}{kTB}$$

Per calcolare  $SNR_{out}$ , dovremo calcolare la potenza in uscita, rapportata con il rumore, anch'esso amplificato da  $G_d$ :

$$SNR_{out} = \frac{P_S \cdot G_d}{kTB \cdot F \cdot G_d} = \frac{P_S}{kTB \cdot F}$$

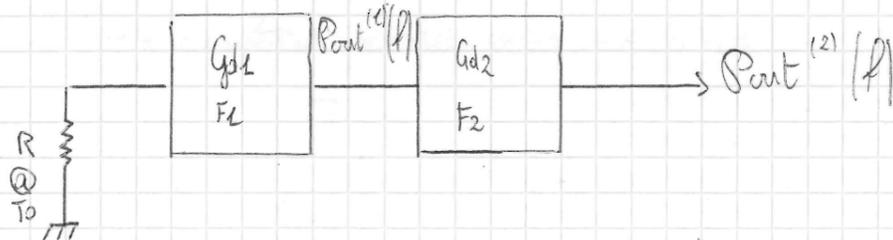
Osserviamo una cosa: se facciamo il rapporto tra  $SNR_{in}$  e  $SNR_{out}$ , vediamo che:

$$\frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = F \quad \left[ \text{poiché si semplifica tutto} \right]$$

Partendo dal rapporto segnale/rumore per un doppio bipolo, possiamo ulteriormente estendere le nostre conoscenze.

Interconnessioni di doppi bipoli

Estendiamo ciò che abbiamo finora studiato per un singolo doppio bipolo, ad una cascata di doppi bipoli. Cerchiamo di studiare, da un esempio semplice, una teoria generale sulle interconnessioni. Vediamo:



Ragioniamo per gradi: calcoliamo  $P_{out}^{(1)}(f)$ , semplicemente come:

$$P_{out}^{(1)}(f) = \frac{k}{2} \cdot G_{d1} \cdot (T_0 + T_{eq1})$$

Per quanto riguarda il secondo sistema, avremo due contributi: quello dell'ingresso  $P_{out}^{(1)}(f)$  amplificato di  $G_{d2}$ , ed il contributo interno di rumore, rappresentabile come  $T_{eq2}$ .

$$P_{out}^{(2)}(f) = P_{out}^{(1)}(f) \cdot G_{d2} + \frac{kT_{eq2}}{2} G_{d2} =$$

$$= \frac{k}{2} \left[ G_{d1} G_{d2} T_0 + G_{d1} G_{d2} T_{eq1} + G_{d2} T_{eq2} \right] = \frac{k}{2} G_{d1} G_{d2} \left[ T_0 + T_{eq1} + \frac{T_{eq2}}{G_{d1}} \right]$$

Da ciò si evince che, volendo modellare il blocco di due sistemi  $G_{d1}$  e  $G_{d2}$  come unico, vediamo che esso avrebbe:

$$G_{deq} = G_{d1} \cdot G_{d2}$$

$$T_{eqTOT} = T_{eq1} + \frac{T_{eq2}}{G_{d1}}$$

Generalizziamo ciò per una cascata di  $M$  doppi lipoli:

$$G_{deq} = \prod_{i=1}^M G_{di} \quad T_{eqTOT} = \sum_{i=1}^M \frac{T_{eqi}}{\prod_{j=1}^{i-1} G_{dj}}$$

Da queste formule, o meglio dalla seconda, si evince un fatto di notevole rilevanza: ai fini di avere buona qualità di trasmissione,  $T_{eqTOT}$ , rappresentante la temperatura equivalente di rumore del sistema, deve essere bassa. Per questo motivo, serve che i primi blocchi del sistema, che il segnale incontra partendo dalla sorgente, abbiano una  $T_{eq}$  bassa, e cioè producano poco rumore interno, siano di buona qualità.

Per questo motivo, un buon sistema di amplificazione deve avere un preamp molto fedele: i primi doppi lipoli sono i più influenti, poiché negli altri la  $T_{eq}$  viene divisa per il prodotto dei guadagni di tutti i blocchi precedenti.

Esiste una formula, facilmente ricavabile, per la cifra di rumore equivalente:

$$F_{eq} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{d1} \cdot G_{d2}} + \dots$$

Anch'essa estendibile, come:

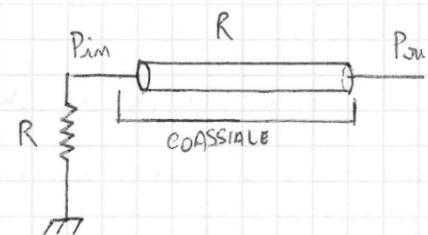
Proponiamo a questo punto un esempio pratico, prima di passare al prossimo argomento

Esempio Pratico: cifra di rumore di un attenuatore passivo

Un tipico attenuatore passivo è un pezzo di cavo coassiale. Spesso, parlando di attenuatori, si utilizza, anziché il guadagno  $G_d$ , l'attenuazione  $L$  definita come:

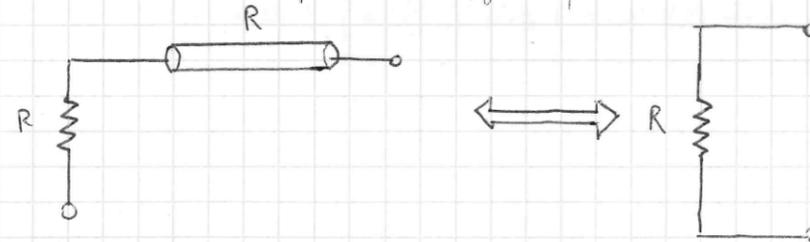
$$L = \frac{1}{G_d} = \frac{P_{in}}{P_{out}}$$

A meno a se fare con un sistema di questo tipo:



Se il coassiale ha impedenza  $R$ , quindi tutto è adattato; consideriamo di trovarci a  $T_0 \sim 290$  K.

Studiando Campi Elettromagnetici, si vede che:



Possiamo dunque studiare il tutto come un unico resistore,

e quindi:

$$P_{out}(f) = \frac{kT_0}{2}$$

Studiando il circuito intero, non il semplice equivalente, vediamo che:

$$P_{out} = \frac{KT_0}{2} \cdot \frac{L}{L} \cdot F_{att} \quad \left[ F_{att} \text{ è la cifra di rumore introdotta dall'attenuatore} \right]$$

Equagliando le due  $P_{out}$  trovate:

$$\frac{KT_0}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot F_{att} = \frac{KT_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{L} \cdot F_{att} = 1 \Rightarrow F_{att} = L$$

Quando abbiamo a che fare con un attenuatore passivo di questo tipo, la cifra di rumore dell'attenuatore è pari all'attenuazione.

Veniamo alle equazioni di propagazione

I sistemi di trasmissione, sotto il punto di vista del canale trasmittente utilizzato, si possono dividere in due categorie:

- Via cavo: l'attenuazione è data da un fattore  $e^{-\gamma z}$ , dove  $z$  è la lunghezza del cavo, e  $\gamma$  è un parametro variante con il tipo di cavo (coassiale, ottico...)
- Via etere: l'attenuazione è data da  $\frac{K}{z^2}$ , dove  $z$  è la distanza tra trasmettitore e ricevitore.

Sistemi via cavo

Nei sistemi via cavo si avrà una certa potenza di uscita, rispetto ad una di entrata, legate da una funzione esponenziale:

$$P_{out} = P_{in} e^{-\gamma z}$$

$\gamma$  dipende dal tipo di cavo, ma anche dalla frequenza di trasmissione (generalmente). Consideriamo ciò in dBm:

$$P_{out}|_{dBm} = P_{in}|_{dBm} + 10 \log_{10} [e^{-\gamma z}]$$

Effettuando un cambio di base, con le proprietà dei logaritmi, vediamo che:

$$10 \log_{10} e^{-\gamma z} = \frac{10 \ln e^{-\gamma z}}{\ln(10)} = 10 \cdot \frac{-\gamma z}{\ln(10)} = -\frac{10}{\ln(10)} \gamma z$$

Solitamente i costruttori non dichiarano  $\gamma$ , ma un  $d$  definito come:

$$d = \frac{10}{\ln(10)} \gamma \quad \left[ \frac{dB}{m} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$P_{out}|_{dBm} = P_{in}|_{dBm} - dz$$

Nota: l'attenuazione in dB è lineare rispetto al cavo. Nei datasheet dei cavi, si può trovare  $d$  misurato in  $\frac{dB}{100m}$ ,  $\frac{dB}{m}$ ,  $\frac{dB}{piedi}$ ,  $\frac{dB}{km}$  (quest'ultima, nelle fibre ottiche, a bassissima attenuazione).

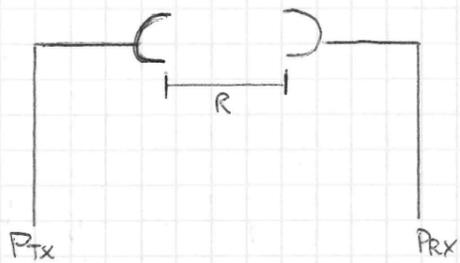
Proporiamo ora una porzione di datasheet di due cavi UTP categoria 5 (coassiale) e fibra ottica.

CAVO	$d$ @ 1 MHz	$d$ @ 16 MHz	$d$ @ 100 MHz	$d$ @ 1 GHz	$d$ @ 10 GHz	$\left[ \frac{dB}{km} \right]$
UTP CATEGORIA 5	21,9	77	215,7			
RG62A	8,2	27,9	88,6			
RG402	0,92	2,83	10,06	35	140	

La fibra ottica ha  $d \approx 0,2$  dB/km su qualsiasi frequenza, fino a parlare di THz. Per questo, parlando di chilometri, si usa sempre calcolare in fibra ottica.

## Sistemi via etere

Per quanto riguarda i sistemi via etere, per trasmettere si utilizzano antenne: la potenza al ricevitore,  $P_{RX}$ , dipende da:



- $P_{TX}$
- $R$
- Dalle caratteristiche delle antenne

Viene creato un modello ideale, alla base del quale si studiano tutti gli altri tipi di antenne: le antenne isotropiche.

Si definiscono "antenne isotropiche" quelle che idealmente emettono in tutte le direzioni allo stesso modo.

La densità spettrale di potenza dell'antenna isotropica è pari a:

$$P_{out} = \frac{P_{in}}{4\pi R^2} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

Allo stesso modo si definisce il guadagno rispetto al radiatore isotropico, "G": esso sarà un riferimento per ogni altra antenna.

Per un'antenna qualunque, caratterizzata da G, la densità di potenza spettrale sarà data da:

$$P_{out} = G \cdot \frac{P_{in}}{4\pi R^2}$$

Altro parametro da definire è l'area ricevente:  $A_{RX}$ . Essa dipende dalla dimensione dell'antenna, dalla sua forma, e dall'allineamento delle antenne

$$P_{RX} = \frac{G_{TX}}{4\pi R^2} A_{RX} \quad \left[ \text{Questa è l'equazione fondamentale della propagazione via etere} \right]$$

Un'antenna si può utilizzare in realtà sia come ricevitore che come

trasmettitore. A tal proposito, esiste una condizione, detta "di reciprocità", che afferma che:

$$\frac{A_{eq}}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad c = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Possiamo dunque scrivere l'equazione di propagazione come:

$$P_{RX} = P_{TX} \cdot \frac{G_{TX} \cdot G_{RX}}{\left[ \frac{4\pi R}{\lambda} \right]^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ATT. MAX} \\ \text{POT. MIN} \end{array} \right\}$$

$$P_{RX} = P_{TX} \frac{A_{TX} A_{RX}}{(\lambda R)^2}$$

Consideriamo, prima di terminare questi concetti, velocemente, tre esempi pratici, che ci permetteranno di capire come vari l'attenuazione in diverse situazioni. Consideriamo sempre una distanza  $R = 10 \text{ km}$ , ma tre canali diversi:

1) cavo coassiale RG62A, frequenza  $f = 100 \text{ MHz}$

Dal datasheet,  $\alpha @ 100 \text{ MHz} \approx 88,6 \text{ dB/km}$   
 $\Rightarrow 10 \text{ km} \cdot 88,6 \frac{\text{dB}}{\text{km}} = 886 \text{ dB}$

Abbiamo un'attenuazione enorme del segnale: in unità lineari,  
 $L \sim 10^{88}$

2) Fibra ottica, trasmissione a  $100 \text{ GHz}$ .

Supponiamo che  $\alpha \approx 0,2 \text{ dB/km}$ , quindi abbiamo:  
 $L = 0,2 \text{ dB/km} \cdot 10 \text{ km} = 2 \text{ dB}$  [molto bassa]

3) Dato un sistema via etere formato da due antenne con  $A_{TX} = A_{RX} = 1 \text{ m}^2$ ,  $f = 1 \text{ GHz}$ , dovremo usare l'eq. di propagazione:

$$\frac{P_{RX}}{P_{TX}} = \frac{A_{TX} \cdot A_{RX}}{(\lambda R)^2}; \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^9 \text{ Hz}} = 0,3 \text{ m}$$

$$\frac{P_{RX}}{P_{TX}} = \frac{1 \cdot 1}{(0,3 \cdot 10 \cdot 10^3)^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^6} \Big|_{dB} = 69,5 \text{ dB}$$

Oltre al km, l'unico canale in grado di non subire troppa attenuazione è la fibra ottica.

Il segnale analitico

Al fine di disporre di un buon formalismo matematico in grado di studiare e modellizzare le modulazioni analogiche, introduciamo la notazione del segnale analitico.

Sia  $v(t)$  un segnale reale che intendiamo studiare. Esso si può scrivere come:

$$v(t) = \text{Re} [g(t) e^{j2\pi f_c t}] = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Noi trattiamo solo segnali reali; al fine di semplificare notevolmente i conti, conviene utilizzare i numeri complessi, come stiamo scegliendo di fare. Alcune nomenclature sono a questo punto d'obbligo, prima di addentrarsi negli studi:

- $g(t)$  è detto "inviluppo complesso" del segnale  $v(t)$ : esso è un segnale in banda base, ossia il cui spettro in frequenza è centrato sulla frequenza nulla,  $f=0$ .  $g(t)$  è in genere una funzione complessa, che si può esprimere come:

$$g(t) = x(t) + j y(t);$$

- $x(t)$  è detta "componente in fase",  $y(t)$  "componente in quadratura";
- $g(t) e^{j2\pi f_c t}$  è il segnale analitico (di cui noi consideriamo la parte reale)

- $e^{j2\pi f_c t}$  è detta "portante" del segnale analitico.

Studiamo, a questo punto, le proprietà legate a questa notazione.

Proprietà del segnale analitico

1) Lo spettro in frequenza di  $v(t)$ , ossia  $V(f)$ , la trasformata di

Fourier di  $v(t)$ , è pari a:

$$V(f) = \frac{1}{2} [G(f-f_c) + G^*(-f-f_c)]$$

Dimostrazione: abbiamo detto che

$$v(t) = \text{Re} [g(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

Dalla teoria dei numeri complessi, sappiamo che:

$$\text{Re} [z] = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} z^*$$

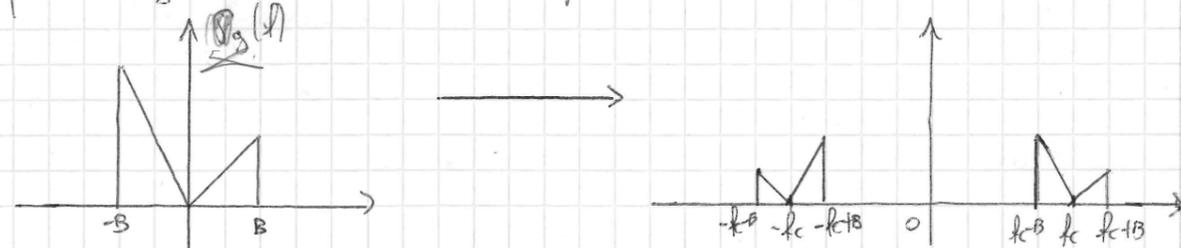
$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2} g(t) e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} g^*(t) e^{-j2\pi f_c t}$$

Come sappiamo da teoria dei Segnali, la trasformata di Fourier di ciò vale:

$$\frac{1}{2} G(f) * \delta(f-f_c) + \frac{1}{2} G^*(-f) * \delta(f+f_c) =$$

$$= \frac{1}{2} [G(f-f_c) + G^*(-f-f_c)]$$

Quindi, la trasformata di Fourier di  $v(t)$  prende lo spettro dell'inviluppo complesso  $g(t)$ ,  $G(f)$ , di esso ne fa due repliche di ampiezza dimezzata, le trasla alla frequenza  $f_c$ , e quella nelle frequenze negative verrà ribaltata rispetto all'asse delle ordinate.



Si noti che l'ampiezza di banda occupata dalle repliche coincide con quella occupata da  $G(f)$ .

2) Questa proprietà, che noi usiamo largamente, è una diretta conseguenza della prima proprietà: la densità spettrale di potenza del segnale  $v(t)$ ,  $P_v(f)$ , vale:

$$P_v(f) = \frac{1}{4} [P_g(f-f_c) + P_g(-f-f_c)]$$

Dimostrazione: sappiamo che la potenza di un segnale si definisce come suo momento secondo:

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle$$

Usando Parseval, vediamo dunque che:

$$\langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_v(f) df = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} P_g(f-f_c) df + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} P_g(-f-f_c) df$$

La potenza totale del segnale sarà dunque, inoltre:

$$P_v = \frac{1}{4} P_g + \frac{1}{4} P_g = \frac{1}{2} P_g$$

Si noti che ciò rappresenta la naturale generalizzazione del famoso teorema di Elettrotecnica, che dice che

$$P[A \cos(2\pi f_c t)] = \frac{A^2}{2}$$

I sistemi che studieremo saranno quasi esclusivamente studiati partendo dalle potenze; per questo, la seconda proprietà è fondamentale.

Spessissimo dovremo studiare sistemi di trasmissione in banda traslata, o sia "non in banda base": per questo, dovremo usare nozioni sui filtri passa-banda, e appesantire notevolmente i conti da svolgere.

Una cosa intelligente da fare, è considerare il solo involucro

complesso,  $g(t)$ , facendo i conti in di esso, situato in banda base. Trattando quindi tutto in banda base, è possibile ignorare la portante, e facilitare i conti.

Caratterizzazione del rumore con il segnale analitico

Finora, mediante il formalismo del segnale analitico, abbiamo caratterizzato solo segnali reali; occupiamoci ora della caratterizzazione del rumore, in termini di segnale analitico.

Il rumore per noi sarà sempre un processo casuale gaussiano bianco. Consideriamo dunque il segnale di rumore  $n(t)$  come:

$$n(t) = \text{Re} [\tilde{n}(t) e^{j2\pi f_c t}] \quad [\tilde{n}(t) \text{ è l'involucro complesso}]$$

$\tilde{n}(t)$  sarà in banda base, e si potrà scrivere come:

$$\tilde{n}(t) = n_1(t) + j n_2(t)$$

Poiché  $\tilde{n}(t)$  è un processo casuale, anche  $n_1(t)$  e  $n_2(t)$  lo saranno.

Scrivere il rumore come segnale analitico ci permette di distinguere

le componenti spettrali presenti

nel filtro  
Fallo la densità,

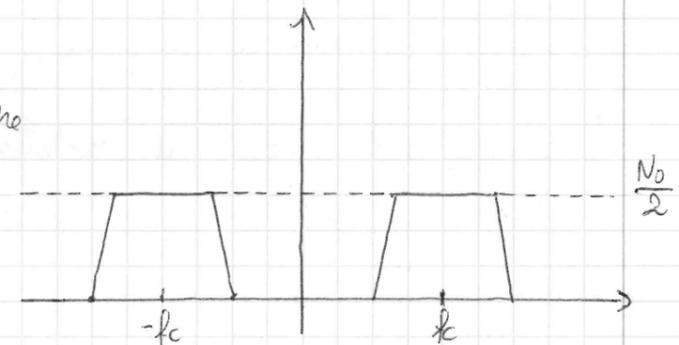
↓  
Possiamo scrivere:

$$n(t) = \text{Re} [\tilde{n}(t) e^{j2\pi f_c t}] = n_1(t) \cos(2\pi f_c t) - n_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Dove  $n_1, n_2$  sono processi reali gaussiani scorrenti. Inoltre,

---

---



(Hilbert)

## Modulazione di ampiezza

La modulazione di ampiezza è la più semplice delle modulazioni analogiche esistenti, e fu inventata da Guglielmo Marconi nel 1895.

Da lì fu un susseguirsi di passi avanti: nel 1901 si fece il primo messaggio transatlantico, nel 1906 le prime AM Broadcast vennero proposte, e nel 1920 venne prodotta la prima radio commerciale.

Parliamo di modulazione ma, più precisamente, cosa si intende per "modulazione"? Dato un segnale  $m(t)$  in banda base, lo si modifica in modo da traslare lo spettro attorno ad una certa frequenza  $f_c$ , detta "portante", per poi essere in grado, in fase di ricezione, di ricostruire  $m(t)$ . Si parla dunque in sostanza di segnali in banda traslata: le nostre conoscenze sul segnale analitico ci verranno in aiuto, al fine di semplificarci i conti.

Parliamo nel dettaglio di modulazione di ampiezza: il segnale  $m(t)$  viene di solito chiamato "segnale modulante", ed è il "contenitore" delle informazioni che intendiamo trasmettere.

L'involuppo complesso di una modulazione AM sarà:

$$g(t) = A_c [1 + m(t)]$$

$A_c$  regola la potenza dell'involuppo complesso usato nella trasmissione.

L'involuppo complesso permetterà la definizione del segnale analitico come:

$$g(t) e^{j2\pi f_c t} = A_c [1 + m(t)] e^{j2\pi f_c t}$$

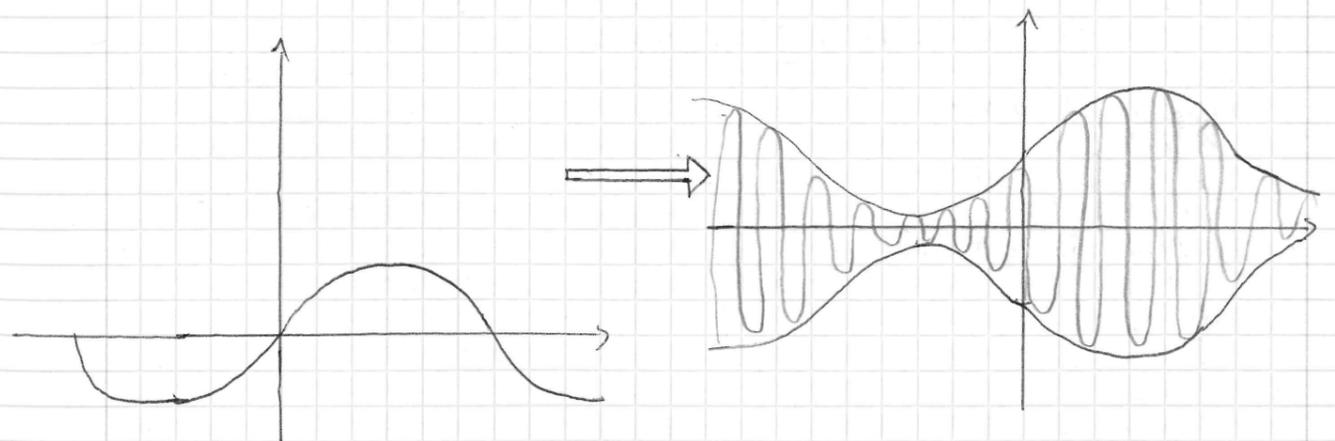
Consideriamo ora tre ipotesi fondamentali:

- $A_c$  è reale (regola solo il modulo della potenza del segnale da trasmettere)
- $m(t)$  è un segnale reale, a media nulla, ergodico (ovvero in cui le medie di insieme sono uguali alle medie nel tempo:  $E[\cdot] \equiv \langle \cdot \rangle$ ), stazionario.
- $m(t) \in [-1; 1]$  (ipotesi tipicamente verificata nelle modulazioni AM, ma più avanti cercheremo di modificarla mediante alcune varianti).

Date le suddette ipotesi, il segnale modulato,  $s(t)$ , si definisce come parte reale del segnale analitico; poiché il blocco  $A_c [1 + m(t)]$  è reale per ipotesi, avremo:

$$s(t) = \operatorname{Re} [A_c [1 + m(t)] e^{j2\pi f_c t}] = A_c [1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Ordiniamo di interpretare tutto ciò: si prende il segnale modulante  $m(t)$ , lo si trasla di "1" verso l'alto, si considera assieme ad esso il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse, e si considera ciò come involucro di un coseno di frequenza  $f_c$ :



Si noti che il segnale  $m(t)$  dovrebbe variare molto più lentamente della portante.

Senza le nostre conoscenze, calcoliamo la densità spettrale di potenza del segnale modulato  $s(t)$ : partiamo dallo spettro del solo segnale  $g(t)$ :

$$P_g(f) = \frac{1}{4} P_g(f-f_c) + \frac{1}{4} P_g(-f-f_c)$$

$$\text{Ha } g(t) = A_c [1+m(t)]$$

Usando la stazionarietà abbiamo garanzia che le medie siano costanti, e l'ergodicità ci permette di calcolare i valori attesi come medie nel tempo. Usando la definizione di funzione di autocorrelazione per un segnale stazionario,

$$R_g(\tau) = \mathbb{E}[g(t)g^*(t+\tau)]$$

Usando la linearità del valore atteso e, come anticipato, l'ergodicità, si ottiene:

$$R_g(\tau) = A_c^2 \mathbb{E}[(1+m(t))(1+m(t+\tau))] = A_c^2 \mathbb{E}[1 + m(t+\tau) + m(t) + m(t+\tau)m(t)]$$

$$= A_c^2 [1 + \mathbb{E}[m(t+\tau)] + \mathbb{E}[m(t)] + \mathbb{E}[m(t+\tau)m(t)]] = [\text{per ergodicità}]$$

$$= A_c^2 [1 + \langle m(t+\tau) \rangle + \langle m(t) \rangle + \langle m(t+\tau)m(t) \rangle]$$

Poiché il processo  $m(t)$  è per ipotesi a media nulla,  $\langle m(t) \rangle = 0$ ,

e anche  $\langle m(t+\tau) \rangle = 0$

Si noti che, inoltre,

$$\langle m(t+\tau)m(t) \rangle = R_m(\tau)$$

Quindi:

$$R_g(\tau) = A_c^2 [1 + R_m(\tau)]$$

Trovata l'autocorrelazione, possiamo calcolare semplicemente la potenza dell'involuppo complesso  $g(t)$ :

$$P_g(f) = \mathcal{F}\{R_g(\tau)\} = A_c^2 [\delta(f) + P_m(f)]$$

Essendo  $A_c$  e  $m(t)$  reali, lo spettro di potenza sarà una funzione pari.



Lo spettro di potenza sarà composto dallo spettro di  $m(t)$ , più una  $\delta$ , rappresentante la portante del segnale analitico. L'occupazione in banda di questo segnale, di questo spettro, è pari a  $B$ .

Possiamo a questo punto calcolare la densità di ~~potenza~~ <sup>potenza</sup> del segnale modulato,  $s(t)$ , come:

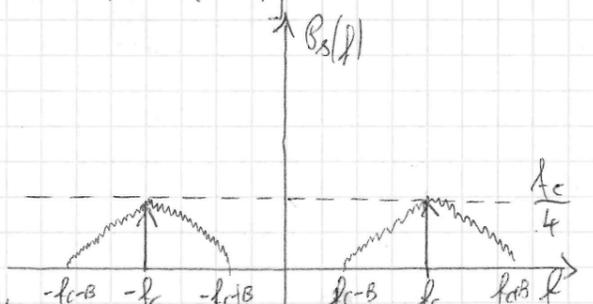
$$P_s(f) = \frac{1}{4} [A_c^2 [\delta(f-f_c) + P_m(f-f_c)] + A_c^2 [\delta(-f-f_c) + P_m(-f-f_c)]]$$

Ma la delta di Dirac che  $P_m$  sono funzioni pari: per questo, possiamo scrivere ciò togliendo i '-' negli argomenti della seconda parentesi:

$$P_s(f) = \frac{1}{4} [A_c^2 [\delta(f-f_c) + P_m(f-f_c)] + A_c^2 [\delta(f+f_c) + P_m(f+f_c)]] =$$

$$= \frac{1}{4} A_c^2 [\delta(f-f_c) + P_m(f-f_c) + \delta(f+f_c) + P_m(f+f_c)]$$

Si avrà dunque una cosa di questo tipo: il segnale modulato ha occupazione spettrale



doppia rispetto al segnale modulante,  $-f_c-B$   $-f_c$   $-f_c+B$   $f_c-B$   $f_c$   $f_c+B$  ed è traslato intorno alla frequenza  $f_c$ . Si noti che  $\delta(f-f_c) = \delta(f+f_c)$  non contengono informazioni: sono di fatto inutili sotto il punto di vista dell'informazione, ma sono il risultato delle traslazioni di  $m(t)$  di alto pari a  $\pm f_c$ .

Potenza del segnale s(t)

Sappiamo, dalla teoria, che

$$P_s = \frac{1}{2} P_g$$

Dove  $g(t) = A_c [1 + m(t)]$ , la potenza di  $g(t)$  si può facilmente calcolare,

come:

$$P_g = \langle g^2(t) \rangle = \langle A_c^2 [1 + m(t)]^2 \rangle = A_c^2 \langle 1 + m^2(t) + 2m(t) \rangle = [\text{per linearità}]$$

$$= A_c^2 [1 + \langle m^2(t) \rangle + 2 \langle m(t) \rangle] = A_c^2 [1 + \langle m^2(t) \rangle] = A_c^2 [1 + pm]$$

m(t) è a media nulla per il potenza

Sarebbe ovviamente possibile arrivare allo stesso risultato calcolando

$P_s$  come potenza del segnale modulato mediante la definizione, ossia:

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(f) df$$

È tuttavia molto più complicato di ciò che noi abbiamo fatto.

Percentuali di modulazione

Si introduce il concetto di percentuale di modulazione, legato a come (in un certo senso, "quanto") il <sup>segnale</sup> modulante è stato modulato,

e viene sintetizzato in 3 definizioni fondamentali:

1) Percentuale di modulazione totale (% modulazione)

Detti  $A_{MAX}$  il valore massimo dell'inviluppo traslato verso l'alto, e  $A_{MIN}$  il valore minimo, legati rispettivamente ad un certo  $m_{MAX}$  e

$m_{MIN}$ , dunque:

$$A_{MAX} = A_c [1 + m_{MAX}] ; A_{MIN} = A_c [1 + m_{MIN}] ; \begin{cases} m_{MAX} = \max[m(t)] \\ m_{MIN} = \min[m(t)] \end{cases}$$

$$\% \text{ MODULAZIONE} \triangleq \frac{A_{MAX} - A_{MIN}}{2 A_c} \cdot 100$$

svolgendo i calcoli:

$$\Rightarrow = \frac{A_c [1 + m_{MAX}] - A_c [1 + m_{MIN}]}{2 A_c} \cdot 100 = \frac{m_{MAX} - m_{MIN}}{2} \cdot 100$$

2) Percentuale di modulazione negativa: partendo dagli stessi valori prima definiti, definiamo:

$$\% \text{ MOD. NEGATIVA} \triangleq \frac{A_c - A_{MIN}}{A_c} \cdot 100 = -\min[m(t)] \cdot 100$$

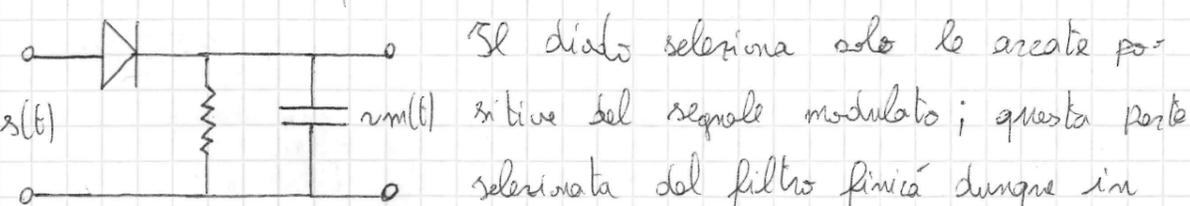
3) Percentuale di modulazione positiva:

$$\% \text{ MOD. POSITIVA} \triangleq \frac{A_{MAX} - A_c}{A_c} \cdot 100 = \max[m(t)] \cdot 100$$

max  $\rightarrow$  sup.?

Se il massimo di  $m(t)$  fosse +1, ed il minimo -1, la percentuale di modulazione totale, negativa, e positiva, sarebbero tutte pari al 100%, come si vede facilmente dalle espressioni.

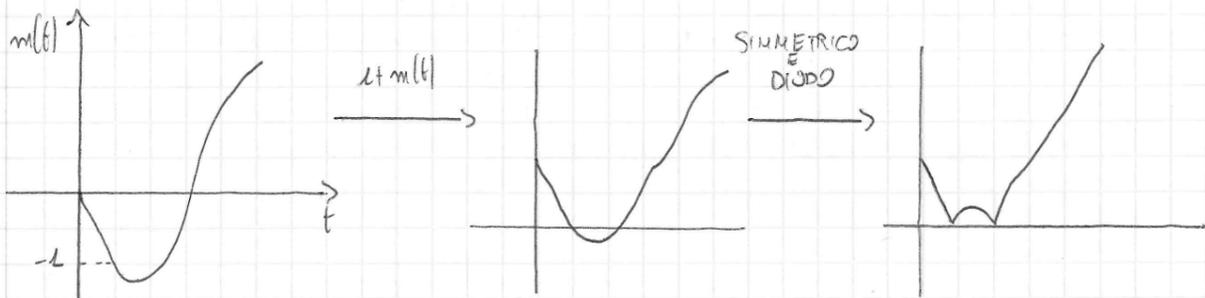
Solitamente, nelle modulazioni AM standard, si vuole che  $|m(t)| \leq 1 \forall t$ , e quindi  $m(t) \geq -1$ : se quest'ipotesi è verificata, per demodulare il segnale, basta utilizzare un particolare circuito (che tra poco vedremo), detto "rilevatore di inviluppo"; ciò non è possibile invece, quando si ha a che fare con sovramodulazioni: se alcune percentuali di modulazione (specie la negativa) sono superiori al 100%, non si può usare questo dispositivo.



RILEVATORE DI INVILUPPO. Il diodo seleziona solo le aree positive del segnale modulato; questa parte selezionata dal filtro finirà dunque in un filtro passa-basso, che produrrà un segnale in uscita "vicino" a  $m(t)$ .

li poniamo un ulteriore quesito: perché "non ci piace" la

soramodulazione? Vediamo graficamente:



Il segnale ricostruito è sensibilmente diverso da quello di partenza, poiché la sovrasmodulazione ha provocato un effetto di distorsione. Se vogliamo usare dunque il rivelatore di inviluppo, le percentuali dovranno essere al più pari al 100%.

Efficienza di modulazione

Introduciamo una seconda definizione utile ai fini dello studio della modulazione AM: l'efficienza di modulazione. Mentre le percentuali si riferiscono alle ampiezze, le efficienze studiano le energie trasmesse (o le potenze).

Ricordando che:

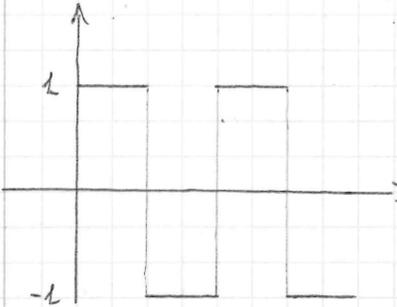
$$P_s = \frac{1}{2} P_g = \frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle$$

Dove il primo termine è riferito alla potenza "sprecata" nel trasmettere la portante, e il secondo alla "potenza utile", spesa per trasmettere informazioni. Definiamo l'efficienza di modulazione come il rapporto tra la potenza utile  $P_u$  e la potenza totale  $P_s$ :

$$E_o\% = \frac{P_u}{P_s} = \frac{\frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle}{\frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle + \frac{1}{2} A_c^2} \cdot 100 = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{1 + \langle m^2(t) \rangle} \cdot 100$$

Vediamo quanto c'è di utile rispetto alla potenza totale.

Possiamo intuitivamente dire che il segnale da trasmettere più potenza utile sarà la costante, 1 (per non avere sovrasmodulazione): perché sia rispettata l'ipotesi di media nulla, e per avere efficienza massima, trattiamo un'onda quadra di duty cycle 50%:



$$E_o\% = \frac{2}{2+1} \cdot 100 = \frac{2}{3} \cdot 100 = 66.67\%$$

La massima efficienza ottenibile da una modulazione AM standard è pari al 50%; poiché però sicuramente  $m(t)$  sarà nella realtà minore di 1,  $E_o\% < 50\%$ : ciò è tutto dovuto allo spreco di potenza causato dalla trasmissione delle portanti, cioè delle  $S$ .

Si noti che di solito ai trasmettitori precisi canali, non segnali de-terministici, che son comodi per i nostri esempi.

Esempio pratico:

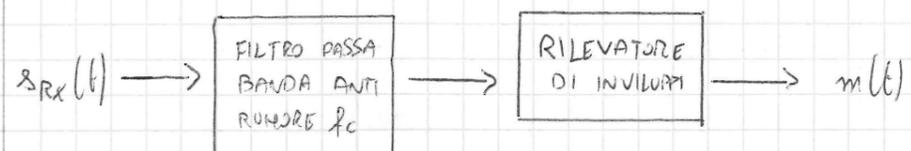
$$m(t) = 1 \cdot \cos(2\pi f_m t)$$

$$\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$E_o\% = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \cdot 100 = 33.33\%$$

Questo è un valore tipico per segnali modulanti, ad esempio musicali:

Riassumendo in uno schema a blocchi:

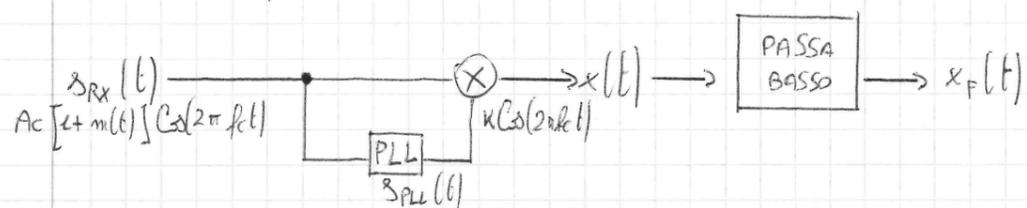


Bisogna cioè rumore mediante un passa banda, e con il rivelatore di inviluppo demoduliamo il segnale. Usando dunque blocchi semplici come questi, avremo un ricevitore semplice, ma con un rendimento piuttosto scarso, come questo.

Utilizzando dispositivi e tecniche più complesse, è possibile superare il limite teorico del 50%, modificando però la tecnica di modulazione.

### Demodulazione coerente

Consideriamo di ricostruire un segnale modulante a partire dal modulato ricevuto dal RX, sinusoidale, moltiplicandolo per un'alteriore coseno con la stessa frequenza della portante, ricavata da un dispositivo detto PLL:



$$x(t) = s_{RX}(t) \cdot s_{PLL}(t) = K A_c [1 + m(t)] \cos^2(2\pi f_c t) = [\text{usando bisezione}]$$

$$= K A_c [1 + m(t)] \frac{\cos(4\pi f_c t) + 1}{2}$$

Questo è il segnale in ingresso nel filtro passa-basso; il passa basso a questo punto taglierà il coseno a frequenza  $2f_c$ , lasciando solo, nel segnale filtrato  $x_F(t)$ ,

$$x_F(t) = \frac{K A_c}{2} [1 + m(t)]$$

Si noti che non abbiamo usato rivelatori di inviluppo, quindi non abbiamo vincoli sull'ampiezza di  $m(t)$ , che può anche essere  $\pm 1$ .

Questo sistema ammette dunque sovramodulazione.

Aumentando  $m(t)$ , è possibile aumentare  $L_m^2(t)$ , e quindi l'efficienza, lo potrà tranquillamente superare il 50%.

È possibile avere un'efficienza pari al 100%? La risposta è sì: se  $\langle m^2(t) \rangle \gg 1$ ,  $E_{qs} \rightarrow 100\%$ .

La cosa veramente interessante di questo tipo di modulazione è la seguente: se utilizziamo questa variante della AM, possiamo scegliere di non trasmettere il "1" dell'inviluppo complesso, ossia il termine che trasporta  $m(t)$  verso l'alto. Non usando più il rivelatore di inviluppo, il problema della sovramodulazione non sussiste più. Potremo dunque trasmettere un segnale modulato privo dell' "1":

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Eliminando il "1", eliminiamo le due portanti dallo spettro di potenza, e quindi potremo trasmettere le stesse informazioni, con un consumo di potenza molto minore; vediamo che ora, senza il fastidioso "1", l'efficienza vale:

$$E_{qs} = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{L_m^2(t)} \cdot 100 = 100\%$$

Questo perché, eliminando le portanti, abbiamo drasticamente tagliato gli sprechi di energia.

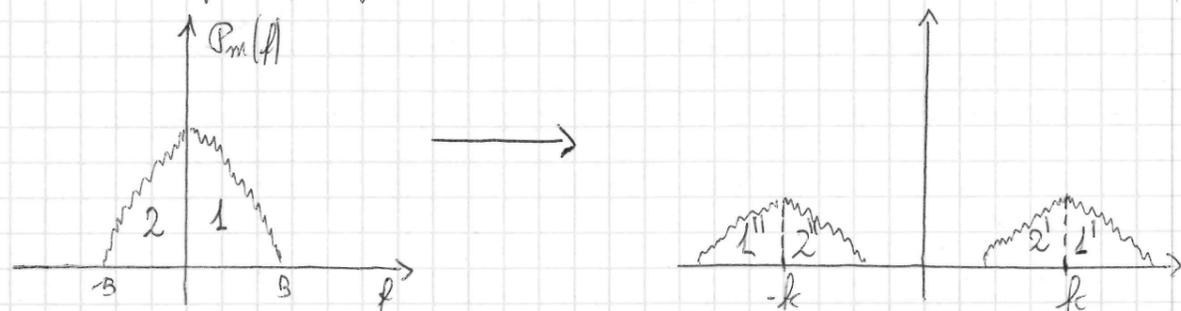
Il dispositivo alla base di ciò è il PLL: esso, da  $s(t)$ , riesce a rilevare frequenza e fase del coseno, e a non farci usare il rivelatore di inviluppo. Si tratta tuttavia di un dispositivo molto più complicato del rivelatore di inviluppo, per questo lo standard delle modulazioni AM è rimasto la AM-DSB (Amplitude Modulation

Double SideBand). La variante alla AM-DSB appena introdotta è la AM-DSB-SC, ossia Amplitude Modulation Double SideBand Suppressed Carrier, ossia a soppressione di portante.

Le broadcast AM si usano a frequenze di circa 1MHz; oggi tutta via la modulazione che va per la maggiore è la FM, modulazione in frequenza.

Ultima introduzione, c'è ancora un dettaglio da migliorare: abbiamo finora parlato di modulazioni AM a doppio occupamento di banda; dalla teoria delle trasformate di Fourier, sappiamo che lo spettro di segnali reali è pari.

L'idea potrebbe essere quella di cercar di trasmettere solo una parte dello spettro: in effetti, trasmettendo metà dello spettro, siamo comunque in grado di ricostruire l'intera informazione.



Le modulazioni che trasmettono solo una porzione dello spettro, si dicono "Single SideBand", o SSB. Ve ne sono di due tipologie, ossia le USB (Upper SideBand), che sceglie di trasmettere la porzione di spettro a frequenza più elevata (1' e 1''), e le LSB (Lower SideBand), dove si trasmette la porzione a frequenza inferiore (2' e 2'').

L'occupazione spettrale, con le SSB, sarà "B" anziché "2B", in modo da avere, a parità di banda disponibile, più "canali" in cui poter

trasmettere.

Oggigiorno, modulazioni del genere non si usano più, se non tra i radioamatori (CB), o in alcuni sistemi radio per la navigazione. Il motivo per cui non han preso piede, è l'impossibilità di usare il rivelatore di involucro.

Per arrivare anche a quest'ultima pecca, sono state introdotte (e talvolta si usano ancora) le AM-VSB, ossia Amplitude Modulation Vestigial SideBand: si trasmette un'intera semi-porzione di spettro, più una piccola parte dell'altro spettro, e della portante. Pur occupando più banda e consumando più energia (a causa del peso di portante trasmessa), la possibilità di usare il rivelatore di involucro, la rende molto appetibile.

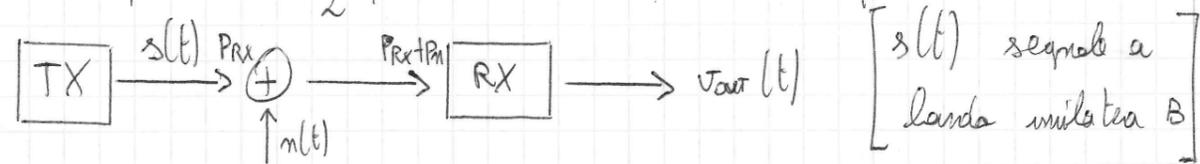
Calcolo delle prestazioni di sistemi AM

Abbiamo introdotto un certo numero di formati, di metodi per modulare segnali mediante modulazioni AM; vorremmo però ora determinare un modo di calcolarne le prestazioni, per poter confrontare tra loro i diversi metodi.

Consideriamo dunque, al fine di effettuare confronti, una strategia di questo tipo: consideriamo un unico sistema di riferimento, che confronteremo con tutti gli altri. Come parametro per caratterizzare le prestazioni di un sistema, consideriamo il rapporto segnale/rumore, SNR, sull'uscita del ricevitore RX.

Definiamo dunque un sistema di riferimento semplice, per renderlo come riferimento: consideriamo a tale scopo un sistema in banda

base. Come ricevitore consideriamo solo un filtro passa basso ideale, a banda unilatera  $B$ . Supponendo dunque di trasmettere un segnale modulato a partire da un modulante  $m(t)$ , e di aver un segnale di rumore  $n(t)$  con densità spettrale di potenza pari a  $\frac{N_0}{2}$ , avremo un sistema di questo tipo:



RX è, come già detto, costituito da un filtro passa-basso, che noi chiameremo anche "filtro di ricezione".

Per calcolare le prestazioni di questo sistema, ci riferiamo all'uscita dal ricevitore,  $v_{out}(t)$ : essa si può pensare come:

$$v_{out}(t) = [v_s(t) + n(t)] \Big|_{\text{FILTRATI}} \sim v_s(t) + n_f(t)$$

Perché l'ultima eguaglianza? Il segnale  $s(t)$  è, come prima sculto, a banda unilatera  $B$ , come anche il filtro passa basso costituente il ricevitore RX. Il  $v_s(t)$ , ossia la porzione di segnale in uscita da RX contenente informazioni, la "parte utile", non verrà toccata dal filtro, poiché  $v_s(t) \sim s(t)$  (ma il segnale utile in uscita dal RX è simile al segnale modulato).

Potremmo pensare dunque che la potenza utile,  $P_{RX}$ , coincida con la potenza  $P_S$ , ossia la potenza del segnale modulato.

Al fine di definire il rapporto segnale/rumore ci serve ancora la  $P_n$  ossia la potenza di rumore in uscita dal filtro. Si tratta della potenza del rumore  $n(t)$ , filtrata attraverso il passa basso ideale, con funzione di trasferimento  $H(f) = P_B(f)$ .

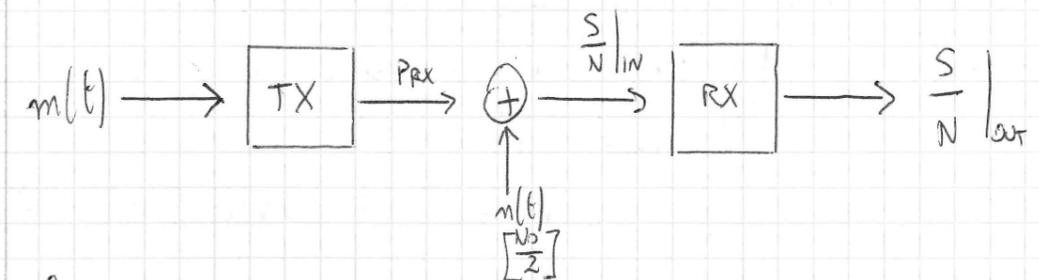
$$P_{n_{out}} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{n_{out}}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = \int_{-B}^B 1 \cdot \frac{N_0}{2} df = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 B.$$

Calcolare la potenza mediante calcolo della varianza del processo casuale  $n(t)$  è stato possibile sfruttando l'ergodicità del processo, ipotesi che consideriamo (anche sarà detto in modo esplicito) sempre verificata, come anche il fatto che  $n(t)$  sia a media nulla. Il rapporto segnale/rumore del sistema in banda base è dunque esprimibile come:

$$\frac{S}{N} \Big|_{BB} = \frac{P_S}{P_n} = \frac{P_{RX}}{N_0 B}$$

Questo risultato sarà il punto di riferimento a partire dal quale effettueremo le operazioni di confronto.

Passiamo al vivo dell'argomento: consideriamo lo schema delle modulazioni di ampiezza, di un tipico sistema AM, ai fini di considerare delle varianti per studiare le prestazioni di diverse costellazioni.



Consideriamo un segnale  $m(t)$ , in ingresso ad un trasmettitore. Da esso ne uscirà  $s(t)$ , il segnale modulato, dotato di potenza  $P_{RX}$ ; nel canale (qua modellato con un sommatore) ad essa si somma la potenza legata a  $n(t)$ , segnale di rumore a media nulla.

Per semplificare i nostri studi, calcoleremo due rapporti segnale/rumore:

$\frac{S}{N}|_{IN}$ , ossia quello in ingresso a RX, e  $\frac{S}{N}|_{OUT}$ , il più significativo,

in uscita al ~~segno~~ <sup>sistema</sup> di trasmissione, dal ricevitore.

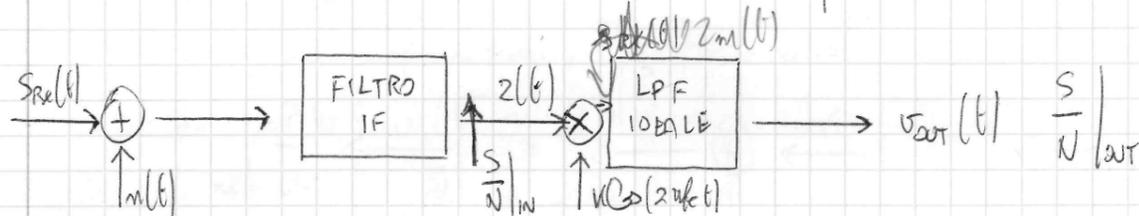
Il segnale  $m(t)$  sta su di una banda  $B$ , mentre  $s(t)$  su di una banda  $B_T = 2B$ , traslata su di una frequenza  $f_c$  ( $= 2f_c$ , vedremo).

Il ricevitore porta il segnale da banda traslata a banda base, e lo farà uscire dal sistema RX.

Come già visto, esistono sostanzialmente due filosofie per la realizzazione di un ricevitore (e demodulatore): si parla di ricevitori coerenti (mediante PLL), o incoerenti (basati su rivelatore di involuppi); a seconda della realizzazione del ricevitore, cambierà lo standard di modulazione tipo AM. Analizziamo dunque le prestazioni, studiando i casi principali.

Ricevitore coerente

Un ricevitore coerente è strutturato in questo modo:



Dal trasmettitore arriva il segnale modulato  $s_{Rx}(t)$ , che in somma, nel canale (modellato come modo sommatorio), al segnale di rumore  $n(t)$ ; da qui si entra nel ricevitore vero e proprio: il filtro IF è un filtro passa-banda, che serve a selezionare il canale dal quale vogliamo ricevere; in una radio arrivano tutte le frequenze (almeno, quelle che l'elettronica in essa contenuta può gestire); di tutti i

range di frequenze possibili, ossia di tutti i canali, ne selezioneremo uno particolare, ben preciso. Dal filtro IF uscirà  $z(t)$ , dotato di potenza  $P_{RX}$ ; esso verrà moltiplicato per  $1/Cos(2\pi f_c t)$ , ossia per il coseno a frequenza, pari a quella della portante, ricavata dal dispositivo PLL;  $z(t) \cdot 1/Cos(2\pi f_c t)$  entrerà nel blocco LPF (low-pass filter), ossia un passa basso ideale, a frequenza di banda unilatera pari a  $B$  come il segnale modulante  $m(t)$ . In uscita,  $s_{OUT}(t)$ .

Passiamo alla formalizzazione di tutto ciò: il segnale modulato  $s_{Rx}(t)$  sarà il solito segnale modulato AM:

$$s_{Rx}(t) = A_{cRX} [1 + m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$m(t)$ , ossia il segnale di rumore, si può esprimere, come segnale analitico, in termini in fase ed in quadratura:

$$m(t) = X_m(t) \cos(2\pi f_c t) - Y_m(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Il filtro passa-basso non modificherà  $s_{Rx}(t)$ ; torcherà invece il rumore  $n(t)$ , e la sua densità spettrale di potenza in uscita:

$$n(t) \rightarrow P_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

Dalla teoria del segnale analitico,  $X_m(t)$  e  $Y_m(t)$ , essendo moltiplicati per il coseno e il seno, sono segnali in banda base; la loro densità spettrale sarà la doppia di quella di  $m(t)$ :

$$P_{X_m}(f) = P_{Y_m}(f) = N_0$$

Calcoliamo ora  $\frac{S}{N}|_{IN}$ , ossia il rapporto segnale/rumore in uscita da filtro IF:

$$\frac{S}{N}|_{IN} = \frac{P_{RX}}{\frac{N_0}{2} \cdot 2B_T} = \frac{P_{RX}}{B_T N_0} = \frac{P_{RX}}{2B N_0}$$

Calcoliamo ora il rapporto SNR in uscita dal ricevitore, fuori dal filtro passa basso; prima di ciò, però, discutiamo il segnale  $z_m(t)$ , ossia il segnale in uscita dal modo moltiplicatore, in ingresso al passa basso:

$$z_m(t) = z(t) \cdot k \cos(2\pi f_c t) = \left[ A_{CRX} [1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t) + x_n(t) \cos(2\pi f_c t) - y_n \sin(2\pi f_c t) \right] \cdot k \cos(2\pi f_c t) =$$

$$= k \left\{ A_{CRX} [1 + m(t)] + x_n(t) \right\} \cos^2(2\pi f_c t) - k y_n(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t)$$

Utilizzando due relazioni trigonometriche:

$$= \frac{k}{2} \left\{ A_{CRX} [1 + m(t)] + x_n(t) \right\} \left[ 1 + \cos(4\pi f_c t) \right] - y_n \sin(4\pi f_c t)$$

Notiamo che il termine " $A_{CRX} [1 + m(t)] + x_n(t)$ " è in banda base; esso verrà moltiplicato, nella parentesi seguente, per "1" e per " $\cos(4\pi f_c t)$ "; dovremmo svolgere i conti per intero, ma pensiamo fare una cosa molto più astuta: in uscita vi ha un filtro passa basso in grado di filtrare con banda di taglio unilatera pari a B, tagliando dunque le componenti traslate dal zero e dal centro a  $2f_c$ . Possiamo dunque dire che il segnale "utile" da studiare, comprensivo di informazioni e parte rumorosa, sarà:

$$z_m(t) = \frac{k}{2} \left[ A_{CRX} [1 + m(t)] + x_n(t) \right]$$

Il filtro di ricezione ha dunque solito i seguenti effetti:

- Rimozione delle componenti spettrali traslate presso la frequenza  $2f_c$ ;
- Invarianza del segnale  $m(t)$ : il filtro non lo ha in alcun modo distorto;
- Limitazione del rumore  $x_n$ , ad una banda equivalente di rumore pari a B.

Possiamo al solito dividere il segnale in due componenti: la parte "utile", che contiene informazioni, e la parte rumorosa; calcolano dunque la potenza utile, e la potenza rumorosa:

$$P_{UTILE} = \frac{k^2}{4} A_{CRX}^2 \langle m^2(t) \rangle = \frac{k^2}{4} A_{CRX}^2 p_m$$

Per quanto riguarda la potenza rumorosa, ricordando che  $x_n$  ha densità spettrale pari a  $\frac{2 \cdot N_0}{2} = N_0$ ,

$$P_{Xn} = \frac{k^2}{4} \cdot N_0 \cdot 2B = \frac{k^2 N_0 B}{2}$$

Il rapporto segnale/rumore in uscita dal ricevitore coerente sarà dunque:

$$\frac{S}{N}_{OUT} = \frac{P_{UTILE}}{P_{RUMORE}} = \frac{\frac{k^2}{4} \cdot A_{CRX}^2 \cdot p_m}{\frac{k^2}{2} \cdot N_0 \cdot B} = \frac{A_{CRX}^2 \cdot p_m}{2 N_0 B}$$

Interpretiamo questo risultato, considerandolo in funzione della potenza del segnale modulato, della potenza ricevuta  $P_{RX}$ ; essa, ricordiamo, si definisce come:

$$P_{RX} = \frac{A_{CRX}^2}{2} \langle 1 + m^2(t) \rangle \iff A_{CRX}^2 = \frac{2 P_{RX}}{1 + \langle m^2(t) \rangle}$$

$$\implies \frac{S}{N}_{OUT} = \frac{2 P_{RX}}{1 + \langle m^2(t) \rangle} \cdot \frac{1}{2 N_0 B} = \frac{P_{RX}}{N_0 B} \cdot \frac{\langle m^2(t) \rangle}{1 + \langle m^2(t) \rangle}$$

Ricordiamo a questo punto che il primo fattore ricorda  $\frac{S}{N}_{BS}$ , ossia il rapporto segnale/rumore del sistema di riferimento in banda base, ed il secondo fattore l'efficienza:

$$\frac{S}{N}_{OUT} = \frac{S}{N}_{BS} \cdot E$$

Abbiamo capito che la modulazione AM-DSB, con demodulatore coerente,

ha prestazioni inferiori al nostro sistema di riferimento: l'efficienza  $E$ , è un numero compreso tra 0 e 1:

$$E \in [0, 1]$$

Facendo gli stessi conti con  $\frac{S}{N}|_W$ , vediamo che esso vale:

$$\frac{S}{N}|_W = \frac{S}{N}|_{BS} \cdot \frac{1}{2}$$

Stiamo usando demodulazione coerente, quindi sappiamo che possiamo fare di meglio, come la AM-DSB-SC, oia sopprimere la portante, eliminando il "1" dell'involuppo complesso. L'efficienza  $E$  vale 1, e quindi:

$$\frac{S}{N}|_{ar} = \frac{S}{N}|_{BS}$$

$S_m$  ingresso, però, le prestazioni non migliorano:

$$\frac{S}{N}|_W = \frac{S}{N}|_{BS} \cdot \frac{1}{2}$$

Considerando un'ultima variante, la AM-SSB: si migliorano anche le prestazioni in ingresso al ricevitore:

$$\frac{S}{N}|_{ar} = \frac{S}{N}|_W = \frac{S}{N}|_{BS}$$

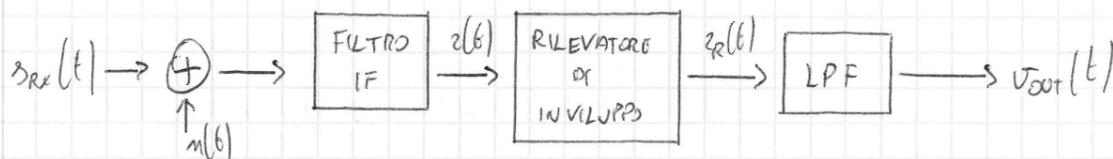
Occupando meno banda, riusciamo dunque ad avere anche un incremento delle prestazioni.

Abbiamo finora studiato le prestazioni utilizzando un ricevitore di tipo coerente (con PLL); studiamo ora la ricezione di tipo incoerente.

Ricezione incoerente

Quando parliamo di ricezione incoerente, parliamo di rivelatore di involucpo; per questo motivo, non sarà possibile avere modulazioni a soppressione di portante.

Lo schema a blocchi di un sistema di ricezione incoerente sarà:



Sostanzialmente molto simile a prima, con però il rivelatore di involucpo al posto del PLL (in posizioni diverse; la differenza è comunque quella).

Componendo il segnale  $m(t)$  (processo canale bianco gaussiano ergodico stazionario come al solito) in parte reale (in fase) ed immaginaria (in quadratura):

$$m(t) = x_m(t) \cos(2\pi f_c t) - y_m(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Il segnale modulato,  $z(t)$ , varia, impiegata dal canale:

$$z(t) = A_{can} [1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t) + x_m(t) \sin(2\pi f_c t) - y_m(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Consideriamo questo segnale  $z(t)$  in uscita dal filtro passa banda

IF: prima di tutto, riscriviamo  $z(t)$  come segnale analitico:

$$z(t) = \text{Re} [\tilde{z}(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

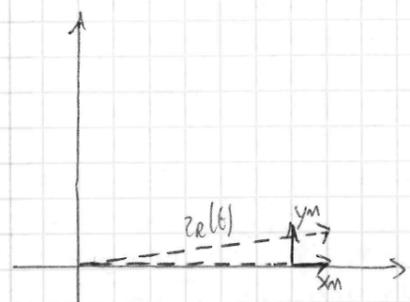
Dove l'involuppo complesso,  $\tilde{z}(t)$ , vale:

$$\tilde{z}(t) = A_{can} [1 + m(t)] + x_m(t) + j y_m(t)$$

Consideriamo a questo punto due casi, considerando rispettivamente prestazioni elevate del sistema ( $\frac{S}{N}|_W$  elevato), e ridotte ( $\frac{S}{N}|_W$  basso).

TUTTO CIÒ È UN PASSEGGIO!

1) Se il rapporto segnale/rumore in ingresso al sistema di ricezione è elevato, si può verificare se il termine in quadratura del rumore,  $y_n(t)$ , sia trascurabile: vediamo geometricamente che cosa succede considerando il piano dei fasori,  $z_R(t)$ , ma il segnale in uscita del rivelatore di inviluppo, sia pari a:



Vediamo che  $x_n(t)$  provoca una variazione non indifferente del vettore  $z_R(t)$ , mentre  $y_n(t)$  ne fa variare di pochi gradi (molto pochi) l'angolo, e quindi l'ampiezza in maniera trascurabile (per angoli minori di  $5^\circ$ ,  $\cos(\theta) \approx 1$ ).

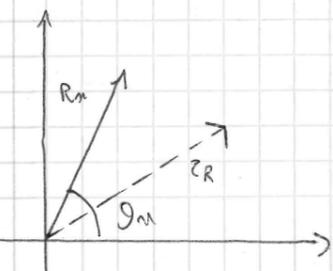
Perché  $\frac{S}{N}|_W$  è molto elevato,  $|s_{RX}(t)| \gg |n(t)|$ , e quindi si può completamente ignorare il termine in quadratura:

$$z_R(t) \approx K [A_{CRX} [1 + m(t)] + x_n(t)]$$

Il fattore moltiplicativo "K" deriva dal rivelatore di inviluppo: esso nella realtà non fornisce infatti un segnale del tutto analogo a quello in ingresso, bensì ne introduce uno ed esso proporzionale, mediante fattore K.

Perché  $z_R(t)$  è uguale al segnale in ingresso al rivelatore coerente, possiamo dire che, per prestazioni elevate, le prestazioni saranno identiche al caso coerente.

2) Se il rapporto segnale-umore è basso, ossia se il rumore è dello stesso ordine di grandezza del segnale utile, capita a volte di poter scrivere  $n(t)$  in coordinate polari, dunque:



$$n(t) = \text{Re} [\tilde{n}(t) e^{j2\pi f_c t}] \quad \text{dove } \tilde{n}(t) = R_m e^{j\theta_m}$$

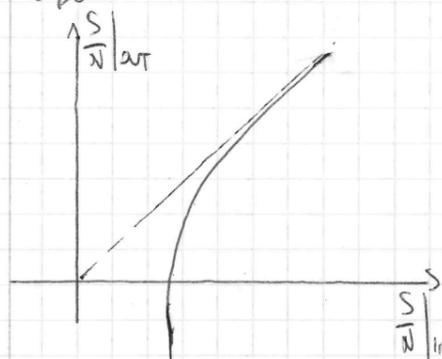
Dove  $R_m$  e  $\theta_m$  sono processi casuali.

Quello da capire è che il segnale complesso dipende fortemente dal rumore, che è un processo casuale, e nella fattispecie della sua fase  $\theta_m$ ; per questo motivo, sarà difficile distinguere  $s_R(t)$  da  $n(t)$ , e dunque impossibile ricostruirlo.

$$\tilde{z}_R(t) = K [A_C [1 + m(t)] \cos(\theta_m) + n(t)]$$

Perché, per i motivi sopra citati, non è possibile filtrare la parte dipendente da  $\cos(\theta_m)$ , e perché essa dipende da un rumore, da un processo casuale, questo modifica in modo aleatorio la componente contenente informazioni  $m(t)$ , e quindi non è possibile ricostruirla.

La rivelazione incoerente ha dunque un comportamento di questo tipo:



Dato  $\frac{S}{N}|_W > 1$ , le demodulazioni coerenti ed incoerenti hanno le stesse prestazioni; al di sotto di "1", c'è un forte degrado delle prestazioni delle rivelazioni a

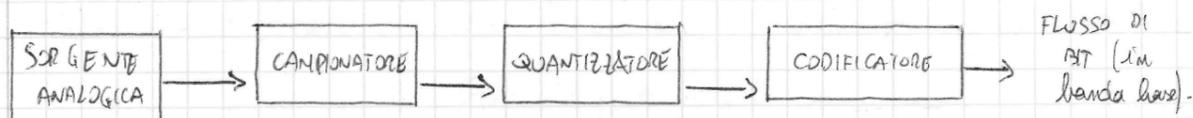
inviluppo. Perché il "giunto" è per  $\frac{S}{N}|_W \approx 1$ , nel caso di trasmissioni broadcast

si considera sempre  $\frac{S}{N}|_W > 1$ .

## Sistemi Pulse Code Modulation

Ora in avanti considereremo sistemi per la trasmissione digitale di segnali (spesso analogici). Alla base di sistemi di questo tipo saranno proprio le conversioni A/D (Analog to Digital) e D/A (Digital to Analog). Il primo tipo di sistemi che studieremo sarà il PCM, Pulse Code Modulation.

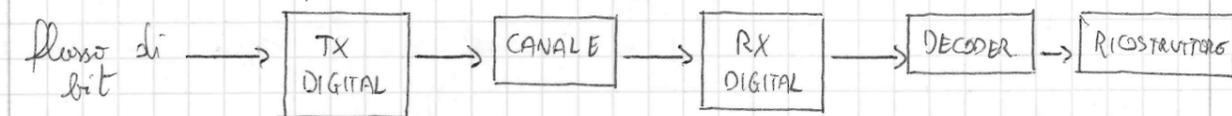
Alla base di questo sistema come già detto è una particolare forma di A/D, così strutturata:



Le operazioni base sono dunque:

- 1) Campionamento del segnale nel tempo
- 2) Quantizzazione delle ampiezze
- 3) Codifica su di un flusso seriale di bit

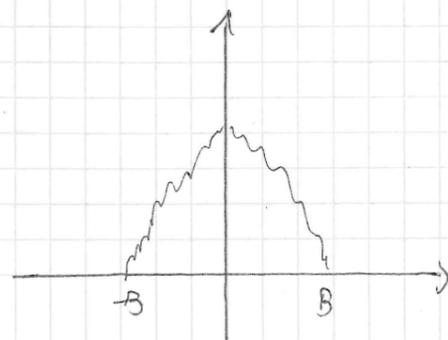
Il flusso di bit in uscita dal codificatore sarà trasmesso per mezzo del trasmettitore; avremo un insieme di blocchi del tipo:



Il segnale trasmesso dal TX nel canale entrerà, verrà ricevuto nel RX; di qui verrà decodificato e ricostruito.

Incominciamo dunque la trattazione dei blocchi del convertitore A/D campionamento

Consideriamo un segnale  $w(t)$  con spettro  $W(f)$  limitato in banda:  
 $W(f) = 0$  per  $|f| > B$



Dove  $B$  è la banda assoluta del segnale. Dalla teoria dei segnali, sappiamo che, al fine di campionare esattamente il segnale, ma per non avere aliasing, la frequenza di campionamento  $f_c$  deve rispettare la condizione di Nyquist:

$$f_c \geq 2B$$

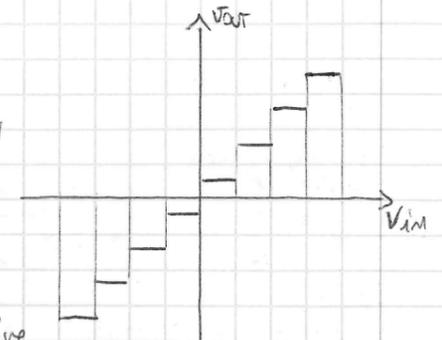
Dato come ipotesi questa condizione:

- 1) Il segnale può sempre essere esattamente ricostruito, senza commettere errori, sulla base dei campioni  $T_c = \frac{1}{f_c}$ .
- 2) Per ricostruire questo segnale, si filtra il segnale  $W_S(f)$  mediante un filtro passa-basso, che elimina tutte le repliche ottenute periodicizzando il segnale:

$$W_S(f) \Big|_{LPF} = W(f) \xrightarrow{T_c} w(t)$$

## Quantizzatore

Il quantizzatore, per ciascun istante di campionamento, deve fare ciò: poiché i segnali  $v_{in}$  in ingresso al quantizzatore, campionati in tempi discreti, appartengono a  $\mathbb{R}$ , è necessario "mapparli", individuandoli, in ampiezza, ad un numero finito di valori discreti,  $v_{out}$ , in uscita dal quantizzatore. Un esempio classico e molto semplice è la quantizzazione uniforme a 8 livelli: supponiamo che  $v_{in}$  sia compreso tra  $-8V$  e  $8V$ : dividiamo in 8 livelli, o 8 sottointervalli,  $v_{out}$ : se  $v_{in}$  è compreso tra  $0$  e  $2V$ , allora verrà attribuito  $v_{out} = 1V$ ; tra  $2V$  e  $4V$   $3V$ , e così via: si attribuisce il valore medio di ogni intervallo; stesso di corso per termini negative.



Si parla di quantizzazione uniforme poiché l'altezza dei gradini è sempre costante; ciascuno degli intervalli tra due gradini è il  $\Delta$ , "intervallo di quantizzazione".

L'operazione di quantizzazione introduce degli errori, detti "errori di quantizzazione"; questi errori vanno calcolati e tenuti sotto controllo, abbassati al minimo.

Definiamo  $e_q$  come la distanza tra ciascun  $v_n$  ed il suo corrispondente  $v_{ar}$ :

$$e_q = v_n - v_{ar}$$

Nell'esempio che abbiamo utilizzato, il massimo errore di quantizzazione,

vale:

$$\max(e_q) = \left\{ 2V, \text{ con } v_{ar} = \pm V \right\}; \text{ quindi, } \max(e_q) = 2V$$

Nella fattispecie, in un generico caso,

$$\max(e_q) = \frac{\Delta}{2}$$

Studiamo in questo ambito due fonti di errore: una è la quantizzazione

l'altra il canale di trasmissione; introduciamo il rapporto segnale/rumore dovuto al solo errore di quantizzazione, per quantizzazione uniforme; a

questo scopo, introduciamo alcune ipotesi preliminari:

- $v_n \in [-V; V]$  con distribuzione uniforme
- la quantizzazione è uniforme, a  $M$  livelli:  $\Delta = \frac{2V_{max}}{M}$

Da queste ipotesi si evince un dato fondamentale:  $e_q = v_n - v_{ar}$  è distribuito uniformemente:  $v_n$  è un processo uniforme,  $v_{ar}$  un numero, ed i vari gradini uniformi. La distribuzione, espressa dalla densità di probabilità

di  $f_{e_q}$ , sarà:

$$f_{e_q} = \frac{1}{\Delta}, \quad f_{e_q} \in \left[-\frac{\Delta}{2}; \frac{\Delta}{2}\right]$$

Essendo un processo, analizzandolo mediante statistica, ossia media e varianza!

$$E[e_q] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{e_q}(x) dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x \cdot \frac{1}{\Delta} dx = 0 \quad \left[ \text{funzione dispari integrata in intervallo simmetrico} \right]$$

$$\sigma^2 = E[e_q^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{e_q}(x) dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} x^2 dx = \frac{2}{\Delta} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{2}{\Delta} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Usando l'ergodicità, calcoliamo ora la potenza del segnale  $v_n$ ; ricordiamo che anch'esso è distribuito uniformemente, dunque:

$$f_{v_n} = \frac{1}{2V}, \quad f_{v_n} \in [-V; V]$$

$$E[v_{in}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{v_n}(x) dx = \int_{-V}^V x^2 \cdot \frac{1}{2V} dx = \frac{2}{2V} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^V = \frac{V^2}{3}$$

Il SNR dovuto alla sola quantizzazione sarà il rapporto delle due potenze:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_q = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{\Delta^2}{12}}; \text{ Ma } \Delta = \frac{2V}{M} \Rightarrow \frac{V^2}{3} \cdot \frac{M^2}{4V^2} = M^2$$

Aumentando il numero di livelli di quantizzazione, quadraticamente si aumenta il rapporto segnale-rumore.

Poiché  $M = 2^n$ , ossia  $M$  è una parola di  $n$  bit,

$$\left. \frac{S}{N} \right|_q = M^2 = 2^{2n} \xrightarrow{\text{dB}} 10 \cdot \log_{10}(2^{2n}) = 10 \cdot 2n \cdot \log_{10}(2) \approx 6n \text{ dB}$$

In dB si ha una variazione lineare rispetto a  $n$ .

Esempi pratici

- Segnale vocale: ha una densità spettrale di potenza che va da un minimo di 300 Hz ad un massimo di 3400 Hz.  $B_{als} = 3,4 \text{ kHz}$ .

Volendo trasmettere con la PCM,  $f_c \geq 2B_{als} = 2 \cdot 3,4 \text{ kHz} = 6,8 \text{ kHz}$

Di solito si considera una  $f_c \approx 8 \text{ kHz}$ . Si usa un quantizzatore a 256 livelli,  $M = 256 = 2^8 \rightarrow n = 8$  (8 bit)

Si definisce "velocità di trasmissione del flusso digitale" il numero di bit al secondo emessi (bitrate,  $R_b = B_2 = R$ )

$$B_2 = f_c \cdot n = [8 \cdot 8 \text{ kHz} = 64 \text{ kB/s}]$$

• Segnale musicale qualità CD:  $B_{\text{aud}} = 20 \text{ kHz}$ , e quindi  $f_c \geq 40 \text{ kHz}$

(si sceglie  $f_c = 44,1 \text{ kHz}$ )

• Il convertitore ha 65536 livelli:

$$n = \lceil \log_2(65536) \rceil = 16 \text{ bit}$$

$$R = n \cdot f_c = 703,6 \text{ kb/s}$$

• Se si hanno due canali, ossia stereo, ciò va moltiplicato per 2:

$$R_{\text{stereo}} = 2 \cdot R$$

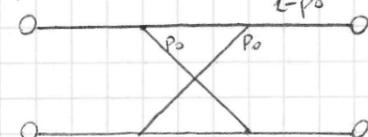
Perché si usa trasmettere in digitale? Studieremo che, trasmettendo un flusso di bit, ossia digitalmente, si ha un risparmio molto superiore a parità di potenza utilizzata.

• Canale binario simmetrico

• Concentriamoci ora sulla trasmissione in contesto digitale; dal punto di vista della progettazione si è soliti modellare il blocco

"TX DIGITAL + CANALE + RX DIGITAL" come un unico blocco: il canale binario simmetrico (BSC: Binary Symmetric Channel): in ingresso ad esso vi è un flusso di bit, e idem in uscita vi è un altro

flusso di bit:



$p_0$  è la "probabilità di transizione" del canale: si tratta della probabilità di ricevere "0" continuata alla trasmissione di "1", e viceversa.

$$p_0 \triangleq \mathbb{P}\{R_x=0 | T_x=1\} = \mathbb{P}\{R_x=1 | T_x=0\}$$

• Il canale è detto "simmetrico" perché le due probabilità coincidono.

Quanto vale la  $p_0$ , ossia la probabilità che vi sia un errore?

$$p_e = \mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{R_x=0 | T_x=1\} \mathbb{P}\{T_x=1\} + \mathbb{P}\{R_x=1 | T_x=0\} \mathbb{P}\{T_x=0\}$$

$$= p_0 \mathbb{P}\{T_x=1\} + p_0 \mathbb{P}\{T_x=0\}$$

Consideriamo ora per ipotesi di avere una sorgente di bit equiprobabile:

$$\mathbb{P}\{T_x=1\} = \mathbb{P}\{T_x=0\} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_e = \frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{2} p_0 = p_0$$

ciò significa che, ai fini dello studio del sistema PCM, è possibile modellare questo blocco con la sola  $p_e = p_0$ . Essa viene detta "BER", ossia "Bit Error Rate".

Calcoliamo ora il rapporto segnale/umore introdotto esclusivamente dal canale di trasmissione:



Consideriamo dal  $Q(x)$  in uscita dal quantizzatore in poi; ad ogni livello quantizzato in ingresso, il codificatore gli associa una  $n$ -pla di bit:

$$Q(x) \rightarrow \bar{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \text{ dove } a_i = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases} \left[ \begin{array}{l} a_i \text{ è una variabile} \\ \text{aleatoria discreta e non} \\ \text{un processo, perché non} \\ \text{varia nel tempo} \end{array} \right]$$

• Che criterio useremo per associare la  $n$ -pla al  $Q$ ? Vediamo:

$$Q(x) \rightarrow V \cdot \sum_{j=1}^n a_j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

• Esempio pratico

Dato  $m(t) \in [-V, V]$  in 3 bit: se  $Q(x) = \frac{7}{8} V$ , vediamo che esso

può essere così ricavato: data la  $n$ -pla  $[1; 1; 1]$ :

$$Q(x) = V \cdot \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] = V \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right] = \frac{7}{8} V$$

• Ha  $n$ -pla con tutti "1" è il valore massimo: si può dimostrare che:

$$Q_{\text{max}}(x) = V \cdot \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j = V \left[ 1 - \frac{1}{2^n} \right]$$

• Ma  $2^n = M$ , ossia è il numero di livelli:

$$\Rightarrow Q_{\text{max}}(x) = V - \frac{V}{M} \left[ \text{Ma } \frac{V}{M} = \frac{\Delta}{2} \right] \Rightarrow Q_{\text{max}}(x) = V - \frac{\Delta}{2}$$

In uscita al canale binario avremo ancora una sequenza di bit,

di questo tipo:

$$y = V \sum_{j=1}^m b_j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Passiamo ad un'analisi quantitativa degli errori, considerando la differenza tra il segnale in uscita,  $y$ , ed il segnale in ingresso,  $q(x)$ :

$$e = y - q(x)$$

$e$  sarà una variabile casuale e non un processo, poiché non ha dipendenza dal tempo né in  $y$  né in  $q(x)$ . Usiamo l'analisi di media/varianza per il calcolo della potenza e la determinazione del SNR:

$$E[e] = E\left[V \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j\right] = \left[\text{usando la linearità e la prop. commutativa}\right]$$

$$= V \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^j E[b_j - a_j] = V \cdot \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \{E[b_j] - E[a_j]\}$$

Ma  $E[b_j] = E[a_j] = 0$ , perché:

$$E[a_j] = 1 \cdot P\{a_j=1\} + (-1) \cdot P\{a_j=-1\} = 1 \cdot 0,5 + (-1) \cdot 0,5 = 0$$

$$\Rightarrow E[e] = 0$$

Per la varianza, la situazione è più complicata:

$$\sigma^2 = E[e^2] = E\left\{\left[y - q(x)\right]^2\right\} = E\left\{\left[V \cdot \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j\right]^2\right\}$$

Porto fuori la costante  $V$  e sviluppo il quadrato, usando due sommatorie:

$$= V^2 E\left\{\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \cdot 2^{-i} \cdot \sum_{k=1}^m (b_k - a_k) \cdot 2^{-k}\right\} = V^2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m 2^{-i-k} E[(b_i - a_i)(b_k - a_k)]$$

$$= V^2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m 2^{-i-k} \left[E[b_i b_k] - E[b_i a_k] - E[a_i b_k] + E[a_i a_k]\right]$$

Effettuiamo una notevole semplificazione: per  $i \neq k$ , gli eventi  $a_i$  o  $a_k$ ,  $b_i$  e  $b_k$ ,  $a_i$  e  $b_k$ ,  $a_k$  o  $b_i$ , sono stocasticamente indipendenti, e quindi il loro valore medio può essere scritto come prodotto dei valori

medi, entrambi nulli (come poco fa dimostrato):

$$E[b_i b_k] = E[b_i a_k] = E[a_i b_k] = E[a_i a_k] = 0, \quad i \neq k$$

Se  $i=k$  invece,

$$E[a_i a_i] = E[b_i b_i] = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 1$$

$$\Rightarrow E[e^2] = V^2 \sum_{i=1}^m 2^{-2i} \left\{E[b_i^2] - E[b_i a_i] - E[a_i b_i] + E[a_i^2]\right\}$$

Poiché  $i \neq k$  ha sempre "0", possiamo eliminare una sommatoria, e considerare solo il caso  $i=k$ . Usando ciò che abbiamo finora ricavato:

$$E[e^2] = V^2 \sum_{i=1}^m 2^{-2i} \left\{2 - 2E[a_i b_i]\right\}$$

ci manca l'ultima media di interesse,  $E[a_i b_i]$ : ci sono 4 combinazioni possibili tra  $a_i$  e  $b_i$ , poiché sono due valori binari:

$a_i$	$b_i$	$a_i - b_i$	$IP\{a_i, b_i\}$
1	1	0	$IP\{a_i=1\} IP\{b_i=1 a_i=1\} = \frac{1}{2} \cdot (1-p_e)$
1	-1	-2	$IP\{a_i=1\} IP\{b_i=-1 a_i=1\} = \frac{1}{2} \cdot p_e$
-1	1	-2	$IP\{a_i=-1\} IP\{b_i=1 a_i=-1\} = \frac{1}{2} \cdot p_e$
-1	-1	0	$IP\{a_i=-1\} IP\{b_i=-1 a_i=-1\} = \frac{1}{2} (1-p_e)$

$$E[a_i b_i] = \sum_{i=1}^4 IP\{a_i b_i\} = 1 \cdot \frac{1}{2} (1-p_e) + (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot p_e + (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot p_e + 1 \cdot \frac{1}{2} (1-p_e)$$

$$= (1-p_e) - p_e = 1 - 2p_e$$

$$\Rightarrow E[e^2] = V^2 \sum_{i=1}^m 2^{-2i} \left\{2 - 2[1 - 2p_e]\right\} = 2V^2 \sum_{i=1}^m 2^{-2i} [1 - (1 - 2p_e)] =$$

$$= 4V^2 p_e \sum_{i=1}^m 2^{-2i} = 4V^2 p_e \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

Facciamo a questo punto un breve ripasso di Analisi: considerando

una generica serie geometrica:

$$\sum_{i=0}^m \frac{x^i}{x^i} = \frac{1 - x^{m+1}}{1-x}; \quad \text{poiché per } n=0 \quad x^0 = 1, \text{ possiamo far partire da } i=$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1-x^{2i}}{1-x}$$

Da ciò, possiamo dire che:

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{1-x^{n+1}-1+x}{1-x} = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$$

Applichiamo ciò al caso che ci interessa, ossia  $x = \frac{1}{4}$ . Otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

Sostituendo ciò nell'espressione di  $E[e_0^2]$ :

$$E[e_0^2] = \frac{4}{3} V^2 p_e \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

Dal momento che per  $M$ , ossia il numero di livelli di quantizzazione, è pari a:  $M = 2^n$

$$\rightarrow E[e_0^2] = \frac{4}{3} V^2 p_e \left[1 - \frac{1}{M^2}\right] = \frac{4}{3} V^2 p_e \frac{M^2 - 1}{M^2}$$

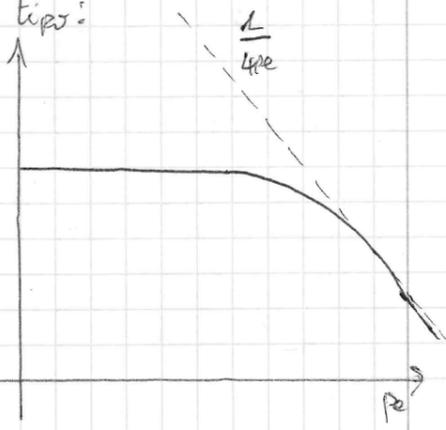
Siamo finalmente in grado di presentare il rapporto segnale/umore introdotto dal solo canale lineare come:

$$SNR|_{dB} = \frac{\langle V_m^2 \rangle}{\langle e_0^2 \rangle} = \frac{E[V_m^2]}{E[e_0^2]} = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{4}{3} V^2 p_e \frac{M^2 - 1}{M^2}} = \frac{M^2}{4 p_e (M^2 - 1)}$$

Leggendo queste espressioni, possiamo immediatamente notare una cosa: più  $p_e$  è elevata, più il rapporto segnale/umore sarà basso, e quindi le prestazioni più scadenti. Accade un fatto di questo tipo:

se  $p_e$  è basso, l'errore predominante sarà quello di quantizzazione, mentre per  $p_e$  elevate, si va con un errore asintotico a  $\frac{1}{4} p_e$ .

All'incirca viene trattato separatamente i due tipi di degradazione; uniamoli, al fine di chiarire.



$$E[e_{tot}^2] = E[e_q^2] + E[e_b^2] = \frac{4}{3} V^2 p_e \frac{M^2 - 1}{M^2} + \frac{1}{3} V^2 = \frac{V^2}{3M} [4p_e(M^2 - 1) + 1]$$

Il rapporto segnale/umore complessivo sarà dunque:

$$\frac{S}{N}|_{dB} = \frac{E[V_m^2]}{E[e_{tot}^2]} = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{V^2}{3M} [4p_e(M^2 - 1) + 1]} = \frac{M^2}{4p_e(M^2 - 1) + 1}$$

Osserviamo ciò: il comportamento asintotico al variare di  $p_e$  ci riporta ai due singoli contributi di errore:

- Se  $p_e \rightarrow 0$ ,  $SNR|_{dB} \rightarrow \frac{M^2}{4} = M^2$  (errore di quantizzazione)
- Se  $p_e \rightarrow \infty$ ,  $SNR|_{dB} \rightarrow \frac{M^2}{4p_e}$  (errore del canale lineare).

Il valore di  $p_e$  va dunque tenuto sotto controllo: i sistemi di telecomunicazione sono infatti spesso instabili, a causa delle condizioni in cui si trovano (temperatura, pressione...).

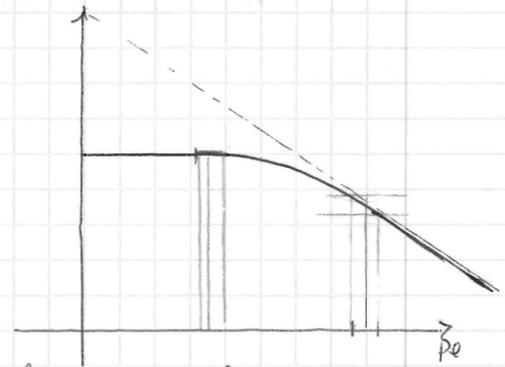
Se  $p_e$  è elevata, in un intorno della zona in cui vi è il collo del rapporto SNR, variazioni di  $p_e$  determineranno enormi variazioni delle prestazioni dei sistemi, ed dunque un notevole degrado nella qualità delle comunicazioni.

Si definisce " $p_e^*$ " come la "probabilità di errore critica", ossia la probabilità di errore del canale lineare al di sotto della quale abbiamo un sistema funzionante in modo controllato. Essa si definisce come quella  $p_e$  tale per cui si ha una penalizzazione di 3 dB sul SNR:

Se si definisce come quella  $p_e$  tale per cui si ha una penalizzazione di 3 dB sul SNR:

$$\frac{S}{N}|_{dB} = \frac{S}{N}|_{dB} - 3 = \frac{M^2}{4p_e^*(M^2 - 1) + 1} = \frac{M^2}{2} \implies 4p_e^*(M^2 - 1) + 1 = 2$$

$$\implies p_e^* = \frac{1}{4(M^2 - 1)}$$



Quando il sistema lavora con un rapporto segnale/umore maggiore di  $\frac{M^2}{2}$  il sistema lavora "sottilmente", in "condizioni regolari di funzionamento". Se  $SNR_{av} > \frac{M^2}{2}$ , il sistema è in "condizioni di fuso sereno", e di fatto non funziona: questo capita nel caso del digitale terrestre: esso si vede con una certa qualità, o non si vede per niente.

### Sistemi di trasmissione digitale

Li preoccupiamo, per ora, di trattare sostanzialmente questo insieme di blocchi:



Dalla sorgente digitale arriva una sequenza di bit in banda base; il trasmettitore digitale TX adatta questa sequenza di bit al canale trasmissivo che si sceglie di utilizzare per il sistema di trasmissione (fibra ottica, coassiale...). Il ricevitore vedrà il canale in arrivo dal canale in modo da poter essere utilizzabile.

Ora in avanti studieremo dunque alcuni sistemi di trasmissione digitale, esaminandone le prestazioni, in termini di alcuni fattori fondamentali quali:

- Occupazione di banda
- Probabilità di errore
- Complessità del sistema.

Parleremo inoltre di multiplexing in frequenza e tempo, di codifica di sorgente (ovvero di metodi di compressione), e di canale (e del fine di ridurre il rumore).

### Introduzione alle trasmissioni digitali

L'idea alla base delle trasmissioni digitali, è la suddivisione dell'asse dei tempi in intervalli di durata  $T_s$ . Su ciascuno di questi intervalli si trasmette una determinata forma d'onda, che d'ora in avanti chiameremo "simbolo"; ciascun simbolo ha dunque durata  $T_s$ .

A seconda della trasmissione, vi sarà un certo numero di forme d'onda trasmesse, ovviamente ciascuna in un intervallo diverso. Supponendo di avere in totale  $M$  diverse forme d'onda che si possono trasmettere, ognuna di esse si potrà rappresentare, mediante una codifica (come meglio vedremo) per una sequenza di  $n_{bit}$ .

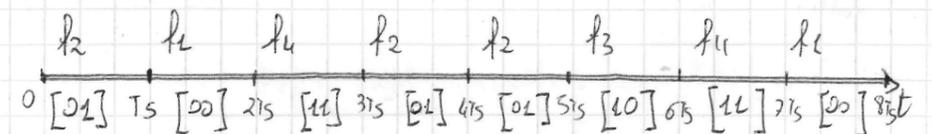
Di solito, il numero di forme d'onda disponibili nel nostro sistema di trasmissione,  $M$ , si calcola come:

$$M = 2^{n_{bit}}$$

Facciamo un esempio pratico: date 4 forme d'onda disponibili,  $M=4 \rightarrow 2^{n_{bit}} = 4 \Rightarrow n_{bit} = 2$ , dove le forme d'onda sono così identificate:

$$00 = f_1(t); 01 = f_2(t); 10 = f_3(t); 11 = f_4(t).$$

Volendo rappresentare la sequenza 010011010110100, daremo divider l'intera sequenza in gruppi di 2, e sull'asse reale trasmetteremo le forme d'onda associate a ciascuna coppia di bit:



L'insieme delle  $M$  forme d'onda trasmesse dal nostro sistema è comunemente detto "costellazione".

Alcune definizioni:

- **Bandrate:** si definisce il bandrate "D" come il numero di simboli trasmessi per ogni periodo  $T_s$ :

$$D = \frac{L}{T_s}$$

- **Bitrate:** si definisce bitrate "B<sub>2</sub>", "R<sub>2</sub>", "R" il numero di bit trasmessi per unità di tempo.

$$B_2 = \frac{n \cdot b \cdot T}{T_s} = \frac{L}{T_b}$$

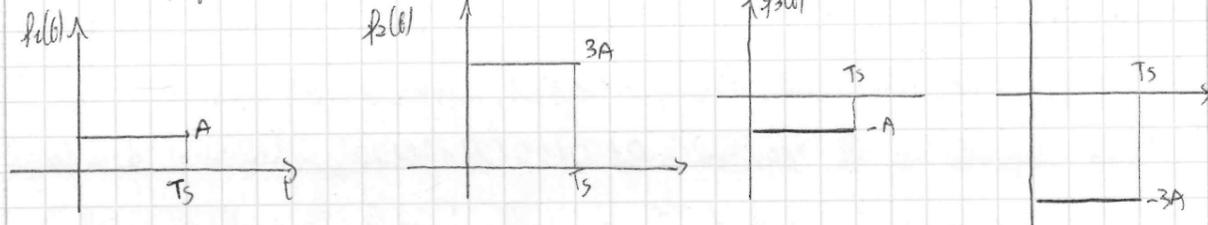
Dove  $T_b$  è il tempo che si impiega per trasmettere un singolo bit.

Generalmente, il  $T_b$  non ha un significato, un riscontro fisico, se non in un caso particolare: se stiamo lavorando su di una

trasmissione binaria, ovvia  $M=2$ ,  $n \cdot b \cdot T = 1$ , allora  $T_b = T_s$ : ogni simbolo è associato ad un singolo bit, e dunque il tempo di trasmissione di un simbolo coincide con il tempo di trasmissione di un bit. Quindi,  $D=R$ .

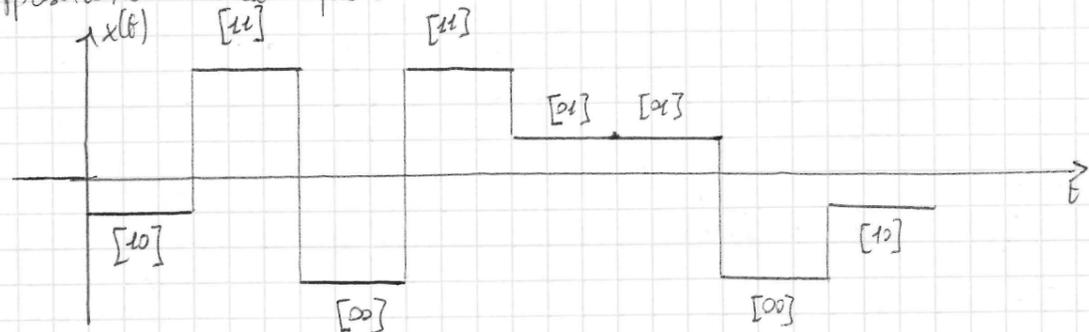
Esempio pratico:

Dati i seguenti simboli:



Scegliamo di codificare con:  $f_1(t) = [01]$ ;  $f_2(t) = [11]$ ;  $f_3(t) = [10]$ ;  $f_4(t) = [00]$

La rappresentazione della sequenza di bit 10110011010010 sarà:



In questo caso si ha quella che non comunemente chiamata "trasmissione multilivello": poiché il segnale non ha solo due ampiezze (come nel caso delle trasmissioni binarie), si usa il prefisso "multi".  
Per cosa differiscono i sistemi di trasmissione? Come idea di fondo, potremmo dire:

- Per le diverse forme d'onda che si sceglie di adottare come simboli
- Per le codifiche simboli/n-pli di bit: esistono associazioni anche molto complicate (ne vedremo qualche esempio).

Inserendo qualche dettaglio in più, possiamo introdurre due distinzioni:

- In base al tipo di sistemi: per quanto concerne le costellazioni:
  - binari ( $M=2 \rightarrow n \cdot b \cdot T = 1$ )
  - multilivello ( $M > 2 \rightarrow n \cdot b \cdot T > 1$ )
- In base al tipo di sistemi: per quanto concerne l'occupazione spettrale:
  - in banda base (il segnale trasmesso è centrato attorno a  $f_c=0$ )
  - in banda traslata (lo spettro del segn. è centrato attorno a  $f_c \neq 0$ ). [in questo caso, per assunzione,  $f_c \gg B$ ].

L'occupazione spettrale è importantissima: in base ad essa si può scegliere quali componenti usare per la progettazione del sistema, e, se si riesce a limitare l'occupazione, è possibile trasmettere altri segnali in altre frequenze a nostra disposizione. Si parlerà di multiplexione o divisione di frequenza.

Si sa da subito che esiste un limite inferiore teorico all'occupazione spettrale: deve essere sempre verificata la disuguaglianza:

$$B_{occupata} \geq \frac{D}{2}$$

Determiniamo quest'introduzione, ed entriamo nel vivo dell'argomento.

Introduciamo un'ipotesi preliminare: supponiamo che il segnale in uscita del TX digitale abbia una forma del tipo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s)$$

Dove  $a_n$  è una variabile casuale, in grado di assumere solo 2 valori:  $+1$  e  $-1$  (consideriamo dunque una trasmissione binaria); come codifica, consideriamo che la trasmissione del bit "1" implichi  $a_n = +1$ , e con il bit "0", si abbia  $a_n = -1$ .

Non abbiamo inoltre forme d'onda variabili: l'unica forma d'onda di fatto sarà  $f(t)$ , assunta con valore positivo o negativo (segno stabilito da  $a_n = \pm 1$ ): la costellazione sarà dunque:  $\{+f(t); -f(t)\}$ .

$x(t)$  è un processo casuale:  $a_n$  introduce una componente aleatoria, ed inoltre si ha dipendenza dal tempo. Esso è pur un "processo quasi determinato", poiché la dipendenza dal tempo è interamente deterministica, quindi a noi nota: l'unica componente aleatoria varia le ampiezze (in questo caso, i segni) della forma d'onda noi fissata.

Effettuiamo un'analisi statistica del processo, studiando media e funzione di autocorrelazione.

Partendo dalla media, essa sarà:

$$E[x(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s)\right]$$

Poiché il valore atteso e la sommatoria sono lineari, e poiché  $f(t)$  è determinata:

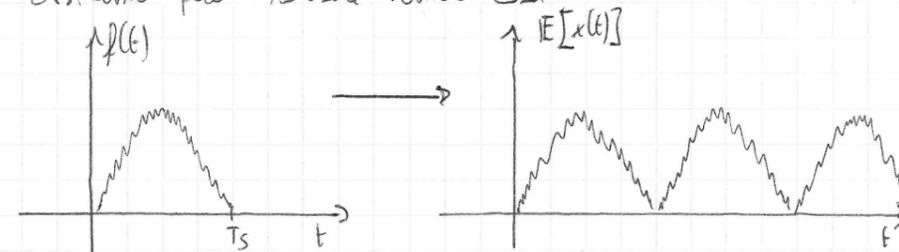
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[a_n f(t - nT_s)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_s) E[a_n]$$

Supponiamo che il valore atteso delle variabili aleatorie non dipenda da  $n$ ; quindi:

$$E[x(t)] = E[a_n] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_s)$$

Abbiamo a che fare con un notevole problema: il processo  $x(t)$  è non stazionario, poiché abbiamo una media variabile nel tempo.

Possiamo però notare una cosa:



Poiché il processo è formato da continue repliche di  $f(t)$ , con un periodo  $T_s$ , possiamo dire che la media si "ripeterà" ed ogni  $T_s$ . Si parla di "processo ciclostazionario per la media", quando, come in questo caso, capita che:

$$E[x(t)] = E[x(t + kT_s)] \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si può dunque sperare di trovare qualcosa di simile anche per i momenti secondi, quali la funzione di autocorrelazione.

Calcolo della funzione di autocorrelazione.

Ricordiamo la definizione di funzione di autocorrelazione del segnale  $x(t)$ :

$$R_x(t; \tau) \triangleq E[x(t) \cdot x(t + \tau)]$$

Sostituendo il nostro processo:

$$R_x(t; \tau) = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m f(t + \tau - mT_s)\right]$$

Usando la linearità delle sommatorie, le raggruppiamo, e partiamo da qui per alcune considerazioni:

$$= E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n a_m f(t - nT_s) f(t + \tau - mT_s)\right]$$

Questo processo non è stazionario, poiché abbiamo dipendenza, nella funzione

di autocorrelazione, sia da  $t$  da  $t_0$ .

Dal momento che si ha periodo pari a  $T_s$ , possiamo dire che  $x(t)$  sia ciclostazionario anche per l'autocorrelazione.

Il nostro fine è il calcolo della densità spettrale di potenza  $P_x(f)$ ; per farlo, dobbiamo "stazionizzare" il processo, in modo da usare la relazione:

$$P_x(f) = \mathcal{F} \{ R_x(\tau) \}$$

Una strategia (che noi non useremo) è trasformare, al posto della funzione di autocorrelazione, la sua media nel tempo: si può dimostrare infatti che

$$P_x(f) = \mathcal{F} \{ \langle R_x(t; \tau) \rangle \}$$

Noi useremo un'altra strategia: il metodo della funzione troncata.

Consideriamo  $x_T(t) = x(t) p_T(t)$  [ossia il processo  $x(t)$  troncato mediante una porta in un intervallo di ampiezza  $T$  centrato in  $t=0$ ]

La trasformata di Fourier del segnale troncato sarà:

$$X_T(f) = \mathcal{F} \{ x_T(t) \} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Lo spettro di potenza si potrà definire come l'energia della funzione troncata, normalizzata per un certo  $T$  (ampiezza dell'intervallo), con

$T \rightarrow \infty$ :

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(f)|^2]}{T} \quad \left[ \text{usando l'ergodicità, al posto della media nel tempo abbiamo usato il valore atteso} \right]$$

Incaminiamo dunque i conti, partendo da  $x(t)$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s)$$

limitiamo  $x(t)$  in  $x_T(t)$ , limitando gli estremi della sommatoria da " $-N$ " a " $N$ ", ottenendo quindi " $N$ " contributi da sommare con  $n < 0$ , il contributo  $n=0$ , ed " $N$ " contributi per  $n > 0$ , tali per cui:

$$T = (2N + 1) T_s$$

Quindi:

$$x_T(t) = \sum_{n=-N}^N a_n f(t - nT_s)$$

Supponiamo a questo punto di conoscere la trasformata della forma d'onda  $f(t)$ ,  $F(f)$ , e quindi calcoliamo la trasformata di  $x_T(t)$ :

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \mathcal{F} \{ x_T(t) \} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-N}^N a_n f(t - nT_s) \right\} = \sum_{n=-N}^N a_n \mathcal{F} \{ f(t - nT_s) \} = \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n F(f) e^{-j2\pi nT_s f} \quad \left[ \text{poiché } F(f) = \mathcal{F} \{ f(t) \} \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo a questo punto la densità spettrale di potenza,  $\langle |X_T(f)|^2 \rangle$ , usando per ergodicità, il valore atteso:

$$\begin{aligned} \langle |X_T(f)|^2 \rangle &= E[|X_T(f)|^2] = E[X_T(f) X_T^*(f)] = \\ &= E \left[ F(f) \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi nT_s f} \cdot F^*(f) \sum_{m=-N}^N a_m e^{j2\pi mT_s f} \right] \end{aligned}$$

Usando come al solito la linearità del valore atteso o della sommatoria:

$$= |F(f)|^2 \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E[a_n a_m] e^{j2\pi(m-n)T_s f}$$

Consideriamo ora un cambio di variabili:  $k = m - n \iff m = n + k$

$$\longrightarrow E[|X_T(f)|^2] = |F(f)|^2 \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N-n}^{N-n} E[a_n a_{n+k}] e^{j2\pi k T_s f}$$

Introduciamo a questo punto l'autocorrelazione dei dati  $R(k)$  come:

$$R(k) \triangleq \mathbb{E}[a_n a_{n+k}]$$

Si parla di "autocorrelazione" perché ricorda, per il caso numerico, l'autocorrelazione di funzioni continue.

Generalmente,  $R$  dipende solo da  $k$  e non da  $n$ : ci interessa dunque esclusivamente la statistica delle variabili casuali  $a_n$ , e la "distanza"  $k$ .

Sostituendo dunque nell'espressione precedentemente trovata:

$$\mathbb{E}[|x_T(f)|^2] = |F(f)|^2 \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N R(k) e^{j2\pi k T s f} \quad \left[ \text{scompondo e sostituisco } k \right]$$

$$= \sum_{k=-N-M}^{N-M} \sum_{n=-N}^N R(k) e^{j2\pi k T s f} \cdot |F(f)|^2$$

Poiché il termine dentro la sommatoria non dipende da  $n$ , esso viene semplicemente sommato a se stesso per  $(2N+1)$  volte, o quindi pensiamo di eliminare una sommatoria, ottenendo:

$$\mathbb{E}[|x_T(f)|^2] = |F(f)|^2 \cdot (2N+1) \cdot \sum_{k=-N-M}^{N-M} R(k) e^{j2\pi k T s f}$$

Al fine di calcolare la  $P_x(f)$ , daremo valore:

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[|x_T(f)|^2]}{T}$$

Ma poiché  $T = (2N+1)T_s$  e  $T \rightarrow \infty$ , allora  $N \rightarrow \infty$ . Otteniamo dunque:

$$P_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N+1) |F(f)|^2 \sum_{k=-N-M}^{N-M} R(k) e^{j2\pi k T s f}}{T_s \cdot (2N+1)}$$

Il limite sparisce, trasformando la somma in serie, e dunque:

$$P_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(k) e^{j2\pi k T s f}$$

Questa formula è importantissima: essa infatti ci permette di calcolare la  $P_x(f)$  di una qualunque trasmissione digitale, e quindi, grazie ad essa, determinare potenza ed occupazione spettrale per qualunque segnalazione numerica.

Alcune note:

- 1)  $P_x(f)$  dipende dal modulo quadro di  $F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , e quindi dalla "forma" di ogni simbolo.
- 2)  $P_x(f)$ , oltre che da  $f(t)$ , dipende da  $R(k)$ , ossia dalle caratteristiche statistiche dei dati emessi. Agendo sulla statistica (mediante codifica) è possibile modificare lo spettro di potenza di un segnale, e quindi anche la sua occupazione spettrale.

Analizziamo, a partire da ciò, due casi particolari;

Variabili aleatorie  $a_n$  e  $a_{n+k}$  tra loro scordate (per  $n \neq k$ ).

Se le variabili casuali sono tra loro scordate, vediamo che la funzione di autocorrelazione dei dati vale:

$$R(k) = \mathbb{E}[a_n a_{n+k}] = \begin{cases} \mathbb{E}[a_n^2] = \sigma_a^2 + m_a^2 & [k=0] \\ \mathbb{E}[a_n] \mathbb{E}[a_{n+k}] = m_a \cdot m_a = m_a^2 & [k \neq 0] \end{cases}$$

Sostituendo ciò nell'espressione generale, si ottiene:

$$P_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \cdot \left[ R(0) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ [k \neq 0]}}^{+\infty} R(k) e^{j2\pi k T s f} \right] =$$

$$= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[ \sigma_a^2 + m_a^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ [k \neq 0]}}^{+\infty} m_a^2 e^{j2\pi k T s f} \right]$$

Considerando  $m_a^2 = m_a^2 e^{j2\pi k T s f} \Big|_{k=0}$ , lo si può includere nella sommatoria:

$$= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[ \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi T_s k f} \right] \left[ \begin{array}{l} \text{perché } m_a^2 \text{ non dipende da} \\ n, \text{ si può portare fuori} \end{array} \right]$$

Ricordiamo a questo punto la formula di Poisson:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Ricordando che  $\frac{1}{T_s} = D$  sia al bandrate, sostituendo in  $P_x(f)$ :

$$P_x(f) = |F(f)|^2 \cdot D \cdot \left[ \sigma_a^2 + m_a^2 \cdot D \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nD) \right]$$

Possiamo dividere quest'espressione in due contributi:

$$P_x(f) = |F(f)|^2 \cdot D \cdot \sigma_a^2 + m_a^2 \cdot D \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD) \left[ \begin{array}{l} \text{Usando le proprietà} \\ \text{della delta di Dirac} \end{array} \right]$$

Come vediamo, il primo termine fornisce allo spettro una componente continua, ed il secondo una componente "a righe".

Notiamo che:

- Questo caso particolare (che può capitare di studiare suante) presenta comunque righe spettrali. E se  $m_a = 0$ , la componente discreta si annulla.
- E se  $m_a \neq 0$ , è comunque possibile che nello spettro di potenza non appaiano righe: se  $F(nD) = 0$  per qualsiasi  $n$ , le righe scompaiono.
- E se le righe sono presenti, esse sono dislocate solamente nelle armoniche del bandrate  $D$ .

Variabili aleatorie  $a_n$  e  $a_{n+k}$  correlate

E se le variabili  $a_n$  e  $a_{n+k}$  sono correlate, dato un coefficiente di

correlazione  $g(k)$  definito come:

$$g(k) = \frac{R(k) - m_a^2}{\sigma_a^2}$$

Possiamo scrivere l'autocorrelazione dei dati (con qualche passaggio) come:

DA FARE!!!

$$R(k) = \begin{cases} E[a_n^2] = \sigma_a^2 - m_a^2 & [k=0] \\ E[a_n a_{n+k}] = \sigma_a^2 g(k) + m_a^2 & [k \neq 0] \end{cases}$$

A seconda del valore del coefficiente di correlazione  $g$ , si sentirà il peso della varianza  $\sigma_a^2$ .

Sostituendo nella formula della densità, si otterranno di nuovo due contributi:

$$P_x(f) = \sigma_a^2 \cdot D \cdot |F(f)|^2 \cdot W_g(f) + (m_a \cdot D)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD)$$

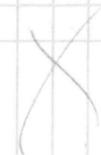
Anche in questo caso si ha dunque una parte continua ed una discreta; la parte continua però, oltre alla trasformata di Fourier di  $f(t)$ , subisce la dipendenza di  $W_g(f)$ , ma sulla correlazione nel tempo dei dati. Il termine  $W_g(f)$  si definisce infatti come:

$$W_g(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{-j2\pi k T_s f}$$

ci porta a pensare che, "introducendo" in qualche modo una correlazione tra i dati, si può modificare la correlazione  $g$ , e quindi lo spettro di potenza.

ciò che ci permette di introdurre "artificialmente" correlazioni, e l'ambito dei "codici di linea". In questo modo, agendo dunque su  $W_g(f)$ , è possibile fare una ragionatura dello spettro.

Un esempio pratico di dove servono è la linea telefonica: essa si basa sull'uso di trasmissioni componenti che non permettono di far passare la continua. In trasmissioni digitali, mediante i codici di linea, si può facilmente ovviare a problemi di questo tipo.

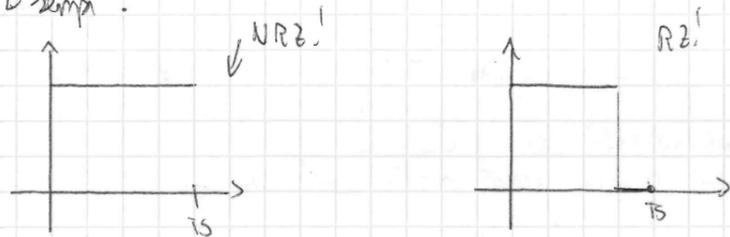


Classificazioni di segnali in banda base:

Classificazioni per simboli:

- NRZ (No Return to Zero): significa che il simbolo  $f(t)$  occupa per intero il periodo  $T_s$  senza mai annullarsi
- RZ (Return to Zero):  $f(t)$  è "0" per un determinato intervallo del tempo di simbolo  $T_s$ .

Esempi:



Classificazione per variabili casuali  $a_n$ ; considerando eventi equiprobabili

- Unipolare:  $a_n$  assume solo valori "0" ed "A" (spesso  $A=1$ ); a noi il compito di decodare la codifica (spesso, "0"  $\rightarrow 0$ ; "A"  $\rightarrow 1$ ).
- Antipodale (polar):  $a_n$  assume solo valori "-A" ed "A" (spesso la codifica è: "A"  $\rightarrow 0$ , "A"  $\rightarrow 1$ ).

Si noti che, se le variabili casuali sono unipolari,

$$E[a_n] \neq 0.$$

Al contrario, se sono antipodali,

$$E[a_n] = 0. \quad [\text{data segnale di bit equiprobabilmente "0" e "1"}].$$

Nelle semplici codifiche di esempio usate, vi è corrispondenza univoca (biunivoca addirittura) tra il bit che si vuole trasmettere ed il simbolo codificato.

Non sempre ciò è vero: esamineremo ora un esempio pratico di codifica dove non vi è univocità tra bit e simbolo.

Esempio Pratico: il codice AMI

Il codice AMI (Alternate Marking Inversion) codifica i simboli (lavorando ovviamente sulle variabili discrete) nel seguente modo:

"0" codifica " $a_n = 0$ "

"1" codifica " $a_n = \pm 1$ "

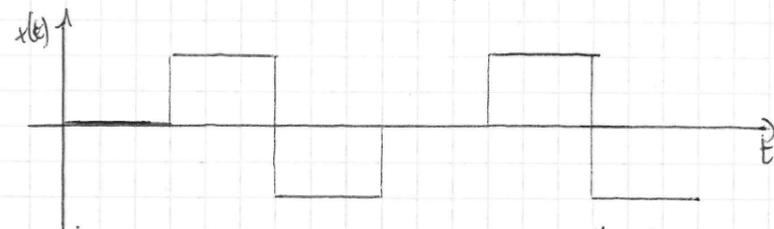
Il " $\pm$ " indica il fatto che, alternativamente, una volta avremo  $a_n = +1$ , una volta  $-1$ , alternandosi dunque sempre dalla precedente.

La codifica AMI non è univoca poiché serve traccia della memoria passata, per poterla interpretare.

Graficamente, dato  $f(t)$  così definito:



La codifica AMI della sequenza 011011 sarà:



Si noti che, poiché il numero di "+1" è circa uguale a quello di "-1",  
 $E[x(t)] = \langle x(t) \rangle = 0.$

Esempio Pratico

Determinare la densità spettrale di potenza  $P_x(f)$  di un segnale  $m_s =$  dato NRZ, antipodale, in banda base, senza correlazioni.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_s)$$

$$P_x(f) = D \cdot |F(f)|^2 \sigma_a^2 + (m_a \cdot D)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(f^n)|^2 \delta(f - nD)$$

$$m_a = E[a_n] = 1 \cdot 0,5 + (-1) \cdot 0,5 = 0 \quad [\text{segnali di "0" e "1" equiprobabili}].$$

$$\Rightarrow P_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_b}$$

Supponiamo che  $f(t)$  sia un segnale impulsivo rettangolare alto "1" con periodo  $T_s$ :

$$f(t) = p_{T_s} \left( t - \frac{T_s}{2} \right)$$

$$T_s = T_b$$

$$F(f) = \mathcal{F} \left\{ f(t) \right\} = T_b \cdot \frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f T_b} e^{-j2\pi f \frac{T_b}{2}}$$

$$|F(f)|^2 = T_b^2 \frac{\sin^2(\pi f T_b)}{(\pi f T_b)^2}$$

$$P_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_b} = T_b \frac{\sin^2(\pi f T_b)}{(\pi f T_b)^2}$$

Come sappiamo conoscendo la sinc, il massimo assoluto è in  $T_b$ .

La banda di questo segnale, calcolata come banda null-to-null, vale:

$$B = \frac{1}{T_b}$$

Definiamo (sempre valida) l'efficienza spettrale  $\eta$  il rapporto

$$\eta = \frac{B_2}{B}$$

Dove  $B_2$  è il bitrate, e  $B$  una banda del segnale (molto spesso in questo ambito si adotta la null-to-null).

In questo esercizio,

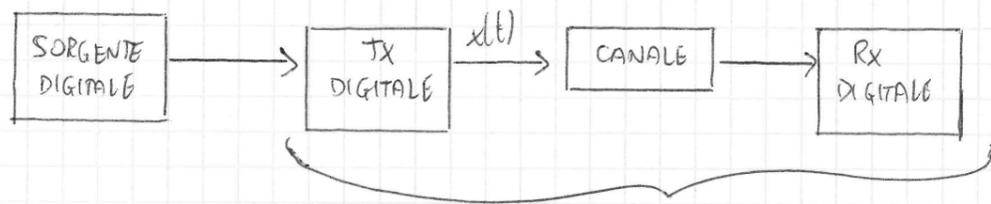
$$\eta = \frac{B_2}{B} = \frac{B_2}{B_2} = 1.$$

Abbiamo dunque concluso il calcolo di  $P_x(f)$ , considerando alcuni casi particolari, ed alcuni esempi pratici.

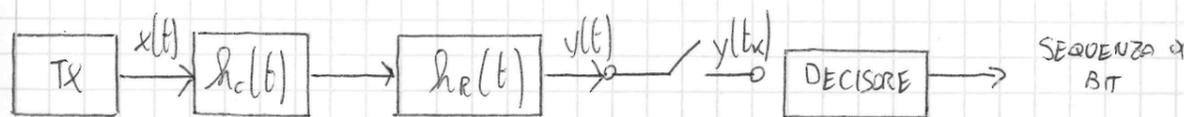
Consideriamo ora, nel dettaglio, lo studio di sistemi di trasmissione digitale.

## Sistemi di trasmissione digitali

Abbiamo già visto che un sistema di trasmissione digitale si può schematizzare in questo modo:



Modellizziamo meglio il blocco indicato con la graffa: abbiamo il TX digitale, dopo il quale vediamo il canale, che si può pensare come un filtro, la cui funzione di risposta all'impulso è pari a  $h_c(t)$ . Il ricevitore digitale si può modellizzare ancora con un filtro, con risposta ad impulso  $h_r(t)$ , che chiameremo "filtro di ricezione":



Se usata dal secondo filtro vi è un campionario, in grado di campionare per l'appunto il segnale  $y(t)$  in punti  $t_n = t_0 + nT_s$ .

Il decisore è un dispositivo in grado di produrre, a partire dai segnali campionati  $y(t_n)$ , la sequenza di bit.

Il primo filtro è dovuto ad effetti di filtraggio del canale,

che potrebbero ad esempio tagliare ampiezze. Il secondo è un filtro da noi inserito e progettato, al fine di eliminare più rumore possibile.

Da qua nasce un discorso complicato: "quanto" deve tagliare il nostro filtro,  $h_r(t)$ ? Il filtro deve essere stretto, ma non troppo, altrimenti taglierebbe parte del segnale utile, distorcendolo.

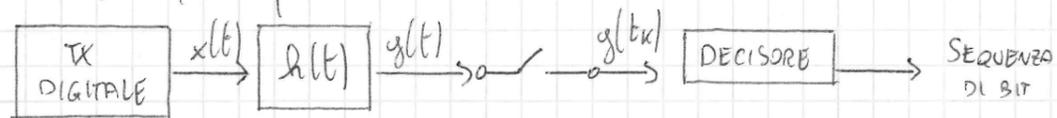
Il campionario seleziona un valore di  $g(t)$  per ciascun periodo  $T_s$ , selezionando solo un punto dell'intero simbolo.

Lo schema a blocchi si può semplificare, considerando "insieme" i

due blocchi  $h_c(t)$  e  $h_e(t)$ , in un unico filtro,  $h(t)$ , definito come:

$$h(t) = h_c(t) * h_e(t)$$

Otterremo, dunque:



Quanto vale  $y(t)$ ? Usando le conoscenze sui sistemi LTI:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Dove  $x(t)$  vale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(t - nT_s) \neq$$

Definendo  $g(t) = \delta(t) * h(t)$ , poiché:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(t - nT_s) * \delta(t) * h(t)$$

$$\rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT_s)$$

Per ogni  $T_s$  dovremo campionare un singolo punto,  $t_k = t_0 + kT_s$ ,

dunque:

$$g(t_k) = y(t) \Big|_{t_k = t_0 + kT_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_k - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 + kT_s - nT_s)$$

3 "t<sub>k</sub>" sono detti "istanti di campionamento" e, affinché il decodificatore possa riconoscere un "1" piuttosto che uno "0", devono essere scelti in maniera adeguata.

Presentiamo un esempio pratico di come bisogna campionare.