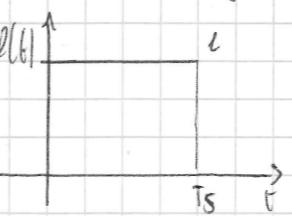
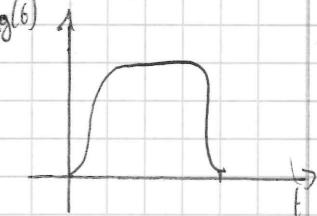


Esempio pratico:

Dato un segnale  $x(t)$  binario, anticipabile, NRZ, con  $x(t)$  così definita:

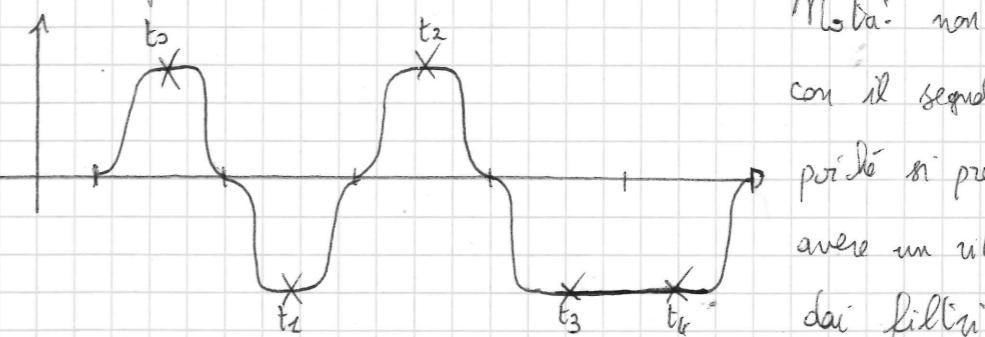


Rimane pensare che  $y(t) = x(t) * h(t)$  sia simile, un po' più regolare, perché la convoluzione tende a regolarizzare la curva



Ora disegneremo il segnale  $y(t)$  risultante da questa  $g(t)$ , ma non prima di aver completato un discorso precedente: la scelta della  $t_0$ . Gli istanti di campionamento non si possono scegliere "a caso", ma in modo che il decisore possa distinguere, con una certa sensibilità, l'" $i$ " dello " $j$ ". Quello che non potremo di certo fare è quindi il posizionare  $t_0$  in prossimità degli zeri del nostro segnale: col variazione del tempo,  $y(t_0)$  sarà sempre circa 0, e quindi il decisore non potrà rilevarlo nulla. Quello che si farà farà, è posizionare il  $t_0$ , o meglio il  $t_0$ , in prossimità o del massimo o del minimo del simbolo: in questo modo, i simboli successivi si rimarranno nello stesso livello, o andranno in un altro livello, sensibilmente differente dal primo.

Vedendo graficamente:



Mai: non siamo portati con il segnale da " $t=0$ ", poiché si prende sempre di avere un ritardo introdotto dai filtri

Scegliendo il  $t_0$  in quella posizione, otterremo potuto discriminare violentemente le differenze, evidenziandole.

In questo caso, otterremo una zona "piatta" molto larga, sulla quale

possiamo dire di avere tutti punti di massimo. In questo caso, molto fortunato, avremmo potuto scegliere uno qualiasi dei punti "pieni".

Dissestremo meglio ciò in seguito.

Ai fini di capire che cosa capita, per ogni  $k$ , studiamo in modo approfondito il caso  $K=0$ :

$$y(t_0) = y(t_0) \Big|_{K=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_s)$$

Stiamo dunque considerando solo il primo simbolo, trasmesso dal TX in un intervallo temporale  $[0; T_s]$ , e ricevuto in RX con un ritardo introdotto dai filtri,  $T_d$ :  $\underline{[T_d; T_s + T_d]}$ .

Poiché stiamo dunque interessati solo al primo simbolo, con  $n=0$ , vogliamo determinare l'informazione contenuta in  $a_0$ , ossia:

$$a_0 = a_0 \Big|_{n=0}$$

Estraiamo dunque dalla serie solo l'informazione legata ad  $a_0$ :

$$y(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_s) \rightarrow a_0 \cdot g(t_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_s)$$

Vediamo che  $y(t_0)$  ha dunque due contributi: il contributo "utile", contenente informazione,  $a_0 g(t_0)$ , e la serie, parte non utile, detta "parte interferente", ISI (Inter-Symbol Interference, ossia Interferenza Intersimbolica).

Il decisore riceverà dunque non solo la componente utile, ma anche un ulteriore contributo, interferente: il termine della serie infatti non porta informazione su  $a_0$ , ma anzi lo disturba.

Più è alto il disturbo, più sarà difficile ricevere informazioni: questo perdi la ISI porta ad un degrado dell'informazione.

Una piccola osservazione: se  $f(t)$  e  $g(t)$  hanno lo stesso dominio, ossia " $T_s$ ", allora ci ha ISI? La risposta è no: possiamo pensare

alla ISI come un termine "di coda" che si va a sommare al termine  $a_0$ ; se  $g(t)$  fosse per qualche motivo limitata in  $T_s$ , non avremmo sovrapposizioni e quindi code da sommare. Pertanto, l'effetto della convolutione, ovvero del filtraggio, fa generalmente il risultato, in questo contesto negativo, di aumentare il dominio del segnale, introducendo queste code.

Quindi, in generale, anche se  $x(t)$  è esente da interferenza intersimbolica, a meno di alcuni casi particolari, espanderemo nel tempo  $f(t)$  in  $g(t)$ .

Riassumiamo così introdotto il concetto di interferenza intersimbolica; forniamo, a questo punto, alcune definizioni di distorsione.

- **Distorsione di picco:** a priori, guardando il segnale influenzato dalla ISI, non possiamo conoscere i valori degli  $a_n$ , poiché sono variabili casuali. Nella definizione di distorsione di picco, faremo dunque un'ipotesi di caso peggiore: tutte le code sono opposte al segnale, e si sommano quindi tutte in modulo al segnale. La distorsione di picco,  $D_p$ , si definisce dunque:

$$D_p = \frac{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} |g(t_0 - nT_s)|}{|g(t_0)|}$$

- **Distorsione efficace:** è un parametro più realistico, che somma ogni termine in valore efficace, ossia in potenza:

$$\text{Def: } \sqrt{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} [g(t_0 - nT_s)]^2}$$

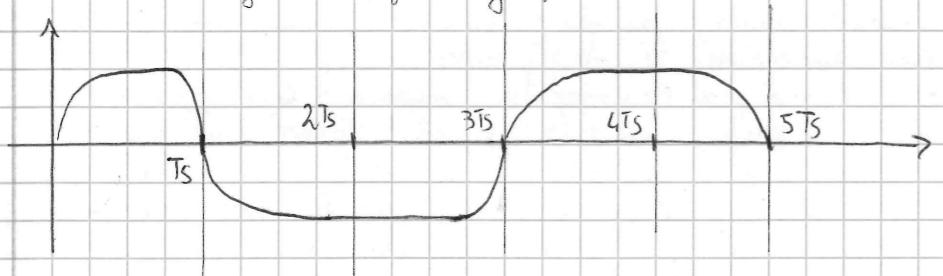
## Diagramma ad occhio

Uno dei parametri più importanti per determinare le prestazioni di un sistema digitale è il "diagramma ad occhio": esso si costruisce prendendo ciascuno dei simboli in ogni  $n \cdot T_s$  disegnandolo nello stesso intervallo di tempo. L'occhio ci fornisce un indice qualitativo delle prestazioni nonché un'idea di dove posizionare i bit.

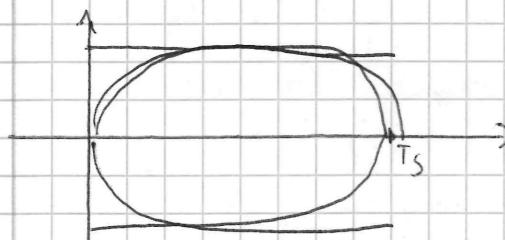
Perchiamo di capire come si costruisce e come si studia, in un esempio pratico:

### Esempio Pratico

Dato il segnale segnale  $g(t)$ :



Disegniamo ciascuno dei simboli nella stessa finestra temporale  $T_s$ :



In questo caso, riusciamo distintamente a vedere un "occhio": i due livelli della trasmissione binaria sono perfettamente distinti, e quindi le prestazioni

molto buone.

Il diagramma ad occhio può essere molto utile anche per un'altra ragione: vediamo che, se il diagramma è disegnato bene, vi sono zone di "intervento" tra diverse figure, diversi simboli; in questo diagramma è molto larga, in altri sarà un punto, o addirittura potrebbe essere talmente confusa da non permettere di visualizzare niente del genere;

l'intervento sarà ad ogni modo molto utile, poiché gli istanti in cui si ha intervento sono gli istanti in cui i due livelli saranno maggiormente separati tra loro, e quindi gli istanti ideali per la scelta del  $T_s$ .

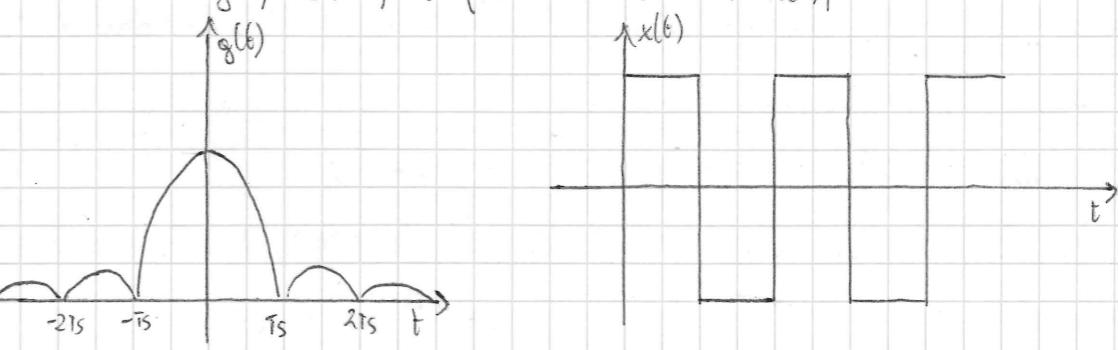
In realtà, sono 2 i problemi di cui ci dobbiamo preoccupare, anche se uno è stato temporaneamente accantonato: uno è la ISI, che abbiamo trattato finora, l'altro è il rumore.

Sa ISI influenza le dimensioni dell'occhio del grafico: più alta sarà la banda del filtro, ovia la banda che lasciamo passare, e più l'occhio sarà grande e distinguibile.

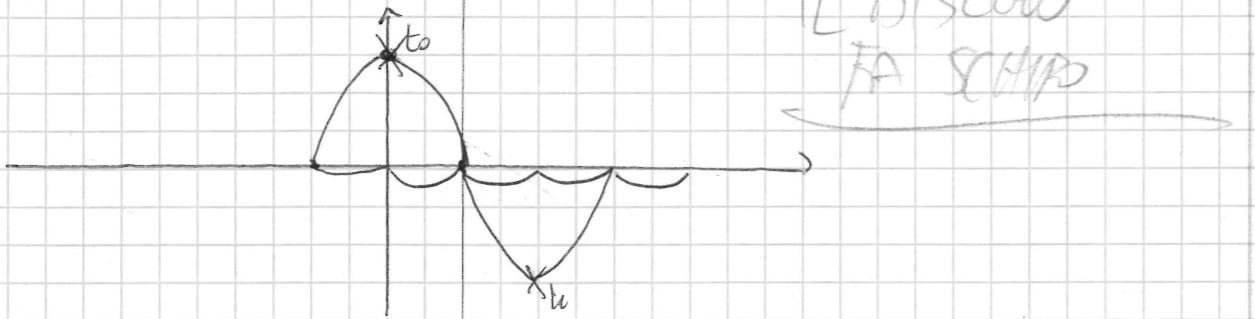
In molti di noi, solitamente, la densità spettrale di rumore nei problemi di trattiamo è uniforme: aumentando la banda, aumentiamo, linearmente con essa, la potenza di rumore: aumentare la banda diminuisce magari effetti della ISI, ma aumenta il rumore presente nel sistema; per questo motivo, a seconda del sistema in studio, ci conviene trovare il giusto compromesso per la scelta della banda passante del filtro: questo lo si può fare, modificando il filtro di ricezione, da noi progettato.

## Criterio di Nyquist

Dato un  $g(t)$  così fatto ed un relativo  $x(t)$



Da  $y(t)$  avrà un andamento interessante:



Scegliendo come  $t_0$  il punto di massimo, capita una cosa molto interessante: ogni  $t_k$  andrà a cadere su di un punto in cui le altre  $\text{sinc}(t)$ , ottenute dalla traslazione richiesta dalla formula:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t-nT_s)$$

In altre parole, capita ciò: dalla teoria sappiamo che, per ogni intervallo di tempo di durata  $T_s$ , noi campioniamo un singolo valore,  $y(t_k)$ , in prossimità quindi di punti  $t_k = t_0 + kT_s$ , dato  $t_0$  scelto in modo idoneo, come già descritto; se però qua scegliamo come  $t_0$  il punto più alto, cioè il centro del lobo principale, di durata  $2T_s$ , capita una cosa molto interessante: ognuno dei  $nT_s$  andrà a cadere sullo zero delle altre sinc; in questo modo, l'interferenza interimbolica sarà sempre nulla, poiché la  $g(t-kT_s)$  varrà sempre 0.

Qui ci fa capire una cosa molto interessante: progettando in una certa maniera il filtro di ricezione, si può ottenere una ISI nulla.

Dato  $t_0$  l'istante di campionamento, vorremmo ricavare condizioni che ci dicono quando possiamo eliminare l'interferenza interimbolica; abbiamo finora visto ciò, nell'esempio:

Se  $g(t_0)$  è una costante "c" non nulla,  $|SI|=0 \rightarrow \begin{cases} g(t_0) = \text{costante} \neq 0 \\ g(t_0-nT_s) = 0 \quad \forall n \neq 0 \end{cases}$   
e  $g(t_0-nT_s)$  per ogni  $n$  diverso da 0 sia nulla, allora annullato la ISI.

Potchiamo di formalizzare quest'espressione un po' meglio: quelli che noi ora consideriamo, sono solo punti campionati: come già fatto più e più volte, per ogni  $T_s$  consideriamo solo un  $t_k = t_0 + kT_s$ ; per campionare questi punti, come sempre fatto in teoria dei segnali, useremo lo delta di Dirac.

Come si può esprimere questa condizione? Beh, di fatto lo salta di Dirac, con i relativi coefficienti, ne dovrà restare solo uno: quella esistente nel punto che stiamo trattando; le altre, infatti, costituiranno solo ISI, e quindi andranno eliminate. In matematica si ha:

$$g(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[t - (t_0 + nT_s)] = c \cdot \delta(t - t_0)$$

Possiamo escludere il caso di  $n=0$ , separandolo da tutti gli altri, ottenendo:

$$g(t_0) \delta(t-t_0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} g(t_0 - nT_s) \delta[t - (t_0 + nT_s)] = c \delta(t-t_0)$$

Da ciò si vede che, per ogni  $n \neq 0$ , i coefficienti dello  $\delta(t)$  saranno nulli, e quindi:

$$g(t_0) \delta(t-t_0) = c \delta(t-t_0) \rightarrow c = g(t_0)$$

L'abbiamo la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'espressione iniziale:

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} G(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f + \frac{n}{T_s}\right) e^{-j2\pi f t_0} = C e^{-j2\pi f t_0}$$

Ricordando che  $D = \frac{1}{T_s}$ , dove  $D$  è il bandrate:

$$\rightarrow D \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f) * \delta\left(f + \frac{n}{T_s}\right) = c$$

$$\rightarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} G(f - KD) = \frac{C}{D} = \text{COSTANTE.}$$

[Considerando il cambio di variabile  
 $K = -n$ ]

Questo è il criterio di Nyquist: se accade che la serie appena presentata è costante, allora l'interferenza intermodulare sarà nulla.

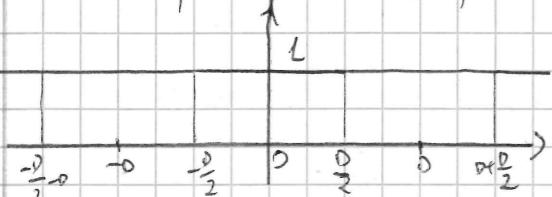
### Esempio Pratico

Dato un  $g(t)$  il cui spettro  $G(f)$  è pari a:

$$G(f) = P_0(f) \quad [\text{dove } D = \frac{f}{T_s} \text{ è il bandato del sistema}]$$

Sappiamo che: se  $n=1$ , tralasciamo di  $\frac{1}{T_s}$  di 2 di  $\frac{2}{T_s}$ , e via.

Una cosa interessante è che lo spettro, continuando a traslare da  $\omega = 0$  a  $\omega_D$ , dà una di fatto una costante:



Poiché si ottiene di fatto una costante, possiamo dire di aver ISI nulla: se verifichiamo con il disegno

di prima, vedremo che, a parte il punto stesso, avremo sempre gli zeri in prossimità dei  $\omega_n$ , e quindi ISI nulla.

Affindi il criterio di Nyquist non è verificato, l'insieme canale+filtro di ricezione deve far sì da aver in usata tutte le componenti spettrali, e dunque il sistema deve avere una banda almeno pari a  $\frac{D}{2}$ .

Se soddisfatto tutte queste ipotesi, il sistema non produrrà ISI.

### Esempio Pratico

Data una trasmissione binaria con entrate  $B_1 = 1 \text{ Mb/s}$ ,  $B_2 = 0$ , determinare la banda passante minima del sistema.

$$B_{\text{pass}} \geq \frac{B_2}{2} = 500 \text{ Kb/s}$$

La scelta della nostra  $g(t)$  purtroppo ci pone alcuni problemi: il suo supporto è infinito, e si hanno discontinuità nell'oscuro, nel dominio di Fourier.

Il sistema, con la  $g(t)$ , non è realizzabile in quanto

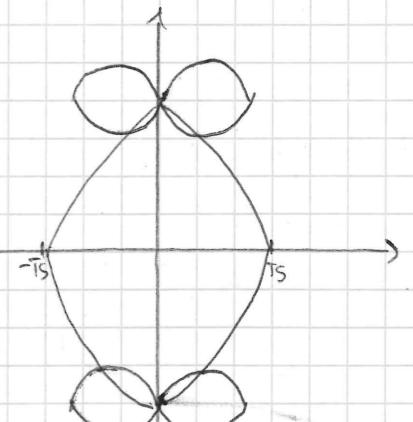
- $g$  non causale
- Presenta una discontinuità in frequenza, un "salto".

La non-causalità si può vedere, considerando da un certo punto in poi la  $g(t)$  uguale a 0, e quindi inserendo un ritardo tale da portare questo punto "o" nell'origine dell'asse del tempo:

Tuttore non eliminabile è un altro: il fatto di avere un salto in frequenza, significa un punto a "variazione infinita" di velocità, ma quindi ciò nel tempo implica un segnale a risposta molto lenta, una scarsa reattività nel dominio del tempo. Questa scarsa reattività va a sovrapposizione ad un diagramma ad occhio molto stretto, e quindi difficile da studiare, ai fini della determinazione dell'istante di campionamento.

Nei sistemi reali, l'istante di campionamento viene rilevato da un circuito particolare, in grado di recuperare tempi di clock. L'occhio è però troppo stretto, il circuito ha problemi nell'effettuare l'operazione di recupero; il diagramma ad occhio sarà così fatto: se ho risposte lente nel tempo, i miei secondi saranno più lunghi, e così tenderanno a togliere spazio all'occhio.

Se i miei secondi si mettono "li" perché esiste DOPPIOGGIO CIELO

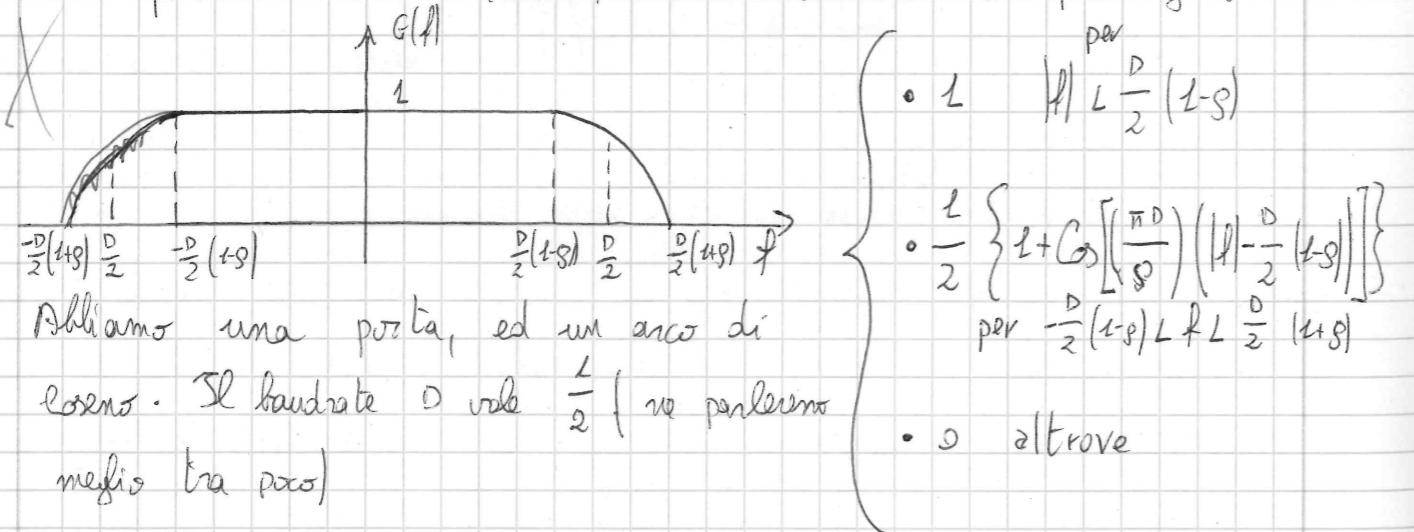


indicano il contenuto aggiuntivo di ISI rispetto alla scelta del punto di massimo, all'ordinata del tempo di campionamento: se il circuito rilevatore sceglie il  $t_0$  o  $t_K$ , all'ordinata del punto  $t_K$  va ad aggiungere l'indeterminazione introdotta dalla ISI causata dalla presenza di lobi secondari. Il circuito rilevatore deve dunque essere molto preciso, non tanto per la variazione di  $y(t_K)$ , quanto per la grossa indeterminazione introdotta dai lobi secondari.

Spettri a coseno rialzato

Perché la forma d'onda prima presentata è causale, e comunque sarebbe lungo ad un occhio molto stretto, introduciamo un'altra classe di forme d'onda, al fine di poter capire come progettare i filtri.

Uno spettro a coseno rialzato, ha un andamento di questo genere:



Soltamente, i sistemi si progettano così:  $g$  si dice "roll off" del filtro a coseno rialzato;  $0 \leq g \leq 1$ ; vediamo alcuni casi particolari:

- Se  $g=0$ , non abbiamo la parte di coseno, e così abbiamo solo una porta da  $-\frac{D}{2}$  a  $\frac{D}{2}$ .
- Se  $g=1$ , la porta si annulla, e si ha solo un tratto di coseno da  $0$  a  $D$ .

Il bandrate che abbiamo prima definito si riferisce all'uso di una particolare banda: la banda a  $-6\text{dB}$ :

$G(f)|_{f=\frac{D}{2}} = \frac{1}{2}$  è la banda a  $-6\text{dB}$  del segnale:  $-6\text{dB}$  per grandezze lineari significa dimezzare.

La banda assoluta del sistema, ovvero la banda in grado di contenere l'intero contenuto spettrale, è:

$$S_{\text{abs}} = \frac{P}{2}(1+g)$$

Verifichiamo subito che, per ragioni di simmetria, il criterio di Nyquist ha le sue ipotesi verificate:

Eseguendo  $t_K$  isolato, avremo sempre e comunque valori costante, e quindi il criterio è rispettato: non abbiamo ISI.

Valori tipicamente utilizzati di  $g$  variano da  $0,2$  a  $0,5$ : in questa maniera, il segnale che trasmetto ha meno banda occupata (come si vede dalla semplice lettura delle espressioni), e si ha possibilità di trasmettere su più canali.

Nel tempo, il segnale  $g(t)$  ha una forma del tipo:

$$g(t) = D \cdot \frac{\sin(\pi D t)}{\pi D t} \cdot \frac{\cos(\pi g t)}{1 - (2g)^2 t^2}$$

Al crescere di  $g$ , i lobi decrescono più rapidamente nel tempo, perde in frequenza si ha un aumento della banda, e dunque i lobi diventano più bassi.

Al fine di ottenere un occhio più aperto, ci servirebbe un  $g$  elevato; purtroppo l'elettronica non è evoluta a sufficienza da sviluppare circuiti rile-

volti di clock molto accurati, si decide di risparmiare banda, tenendo  $f$  basso.

C'è anche il fattore rumore da considerare: più la banda (e quindi) è ampia, più c'è rumore. Vorremo avere poca banda passante anche per questo.

### Eguagliatori

Alliamo sinora fatto i conti senza l'oste: abbiamo infatti fatto finta di conoscere la banda passante del canale, supponendo che essa sia maggiore della banda assoluta del segnale,  $B_{BS}$ :

$$B_{BS} = \frac{D}{2} (l+g)$$

Questa può, volendo, essere invertita, al fine di determinare la minima velocità di trasmissione dei simboli,  $D$ :

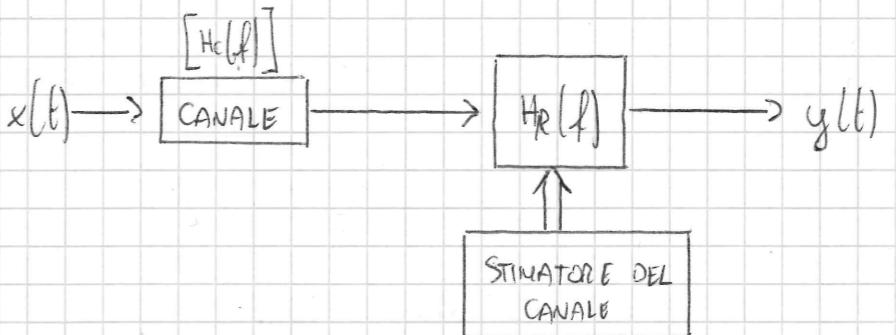
$$D = \frac{2 B_{BS}}{l+g}$$

Spero non abbiano informazioni sul canale: in casi realistici, la funzione di trasferimento del canale,  $H_C(f)$ , può anche cambiare nel tempo: supponiamo di muoversi in auto con il cellulare: cambiando le celle, a seconda delle condizioni atmosferiche e della distanza tra ricevente e trasmittitore, potremo avere variazioni nel tempo.

Poiché abbiamo che:

$$G(f) = F(f) \cdot H_C(f) \cdot H_R(f)$$

E abbiamo il vincolo di Nyquist su  $G(f)$ , possiamo modificare le altre funzioni di trasferimento, in modo da soddisfare sempre le ipotesi del criterio di Nyquist. Vorremo dunque nella fattispecie su  $H_C(f)$ , "adattandola" nel tempo alle condizioni del canale



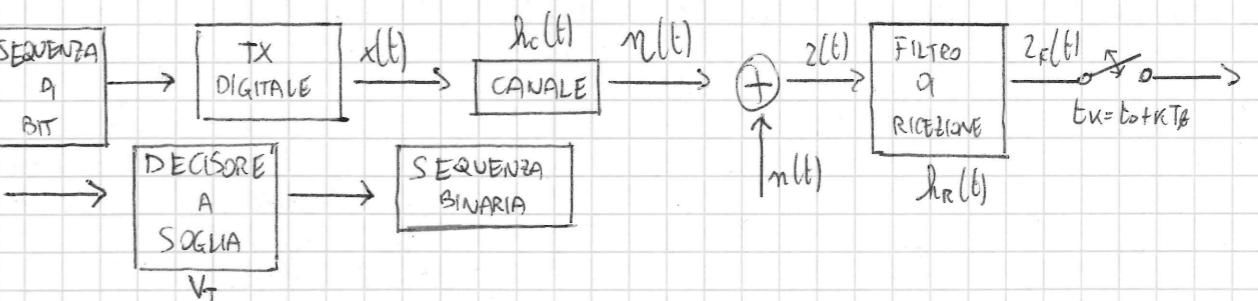
Lo stimatore del canale, al passare del tempo, "stima" la funzione di trasferimento del canale,  $H_C(f)$ , fornendo le informazioni, al fine di correggere  $H_C(f)$ .

Una stima del canale si ottiene con opportune tecniche basate sulla trasmissione di sequenze note a priori dallo stimatore, dette "preamboli": lo stimatore "sa" cosa deve ricevere, confronta rispetto a quello che si aspetta, e propone una stima della  $H_C(f)$  da lui elaborata a  $H_R(f)$ , correggendola.

~~X Sistemi binari~~

Parliamo per ora di sistemi binari, in banda base; in questi sistemi, il tempo di simbolo  $T_S$  coincide con il tempo di bit,  $T_B$ : il bitrate coincide con il bandrate.

Il nostro punto di partenza sarà il seguente diagramma:



Se il segnale  $x(t)$  si scrive nella solita forma:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m f(t - mT_S)$$

Dove  $f(t)$  è la forma d'onda "base" di un simbolo; per comodità, chiamiamo  $\delta(t)$  la funzione rappresentante il simbolo base filtrato dal canale:

$$\delta(t) = f(t) * h_c(t)$$

Il segnale utile in uscita dal canale sarà dunque pari a  $n(t)$ ,

definito, mediante il precedente risultato, come:

$$n(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \delta(t - mT_s)$$

$a_m$  è una variabile aleatoria; poiché siamo in un sistema binario,  $a_m$  potrà assumere solo due valori: do, se si è trasmesso uno '0'; e  $d_1$ , se si è trasmesso un '1'. Per comodità, supponiamo per ipotesi che  $d_1 > d_0$ .

Consideriamo alcune altre ipotesi, molto importanti:

- Il rumore sul canale è gaussiano bianco ergodico a media nulla
- L'intervento interimbilico non sia presente nel canale (poiché lo abbiamo per ipotesi ben progettato) ~~X PIÙ CITO CANTO, NO? S/SCOMA~~

In questo modo, la qualità delle trasmissioni non dipende dai simboli trasmessi prima e/o dopo quello che si sta studiando.

Concentriamoci sulle prestazioni di trasmissione di un singolo bit, quello campionato all'istante  $t_0$ ,  $y(t_0)$ :

$$y(t_0) = a_m \Big|_{m=0} g(t_0) + \sum_{m \neq 0}^{\infty} a_m g(t_0 - mT_s)$$

Trasmettiamo e consideriamo  $g(t_0)$ , supponiamo che il decisore sia basato su di un comparatore di soglia: il segnale  $z_F(t)$ , ovia  $z(t)$  passato dal filtro di ricezione, verrà considerato in un singolo punto, quello campionario; il comparatore di soglia ci dirà se questo punto indica uno '0' o un '1'.

$z(t)$  è il segnale di ingresso nel filtro di ricezione: esso sarà formato dalla parte utile,  $n(t)$ , e dal rumore  $m(t)$  che si è aggiunto nel sistema:

$$z(t) = n(t) + m(t)$$

In uscita dal filtro di ricezione, avremo  $z_F(t)$ , con una forma del tipo:

$$z_F(t) = z(t) * h_R(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \delta(t - mT_s) * h_R(t) + m(t) * h_R(t)$$

Il comparatore, fissato su di una certa soglia  $V_T$ , farà, su ogni campione rilevato dal campionatore (considerando nell'esempio il  $t_0$ ):

$$\begin{cases} \geq V_T \rightarrow 1 \\ < V_T \rightarrow 0 \end{cases}$$

(il caso di '=' si può scegliere arbitrariamente)

Definiamo a questo punto, per alleggerire la notazione,  $g(t)$  e  $n_F(t)$  come:

$$g(t) = \delta(t) * h_R(t) = f(t) * h_c(t) * h_R(t)$$

$$n_F(t) = m(t) * h_R(t)$$

Introducendo dunque gli effetti di filtraggio del filtro di ricezione in modo più compatto; il segnale  $z_F(t)$  sarà:

$$z_F(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \Big|_{m=0} g(t_0 - mT_s) + n_F(t)$$

Stiamo dunque considerando il primo bit campionario, quindi  $m=0$ , ma anche  $m \neq 0$ , poiché il fatto di non avere ISI ci permette di escludere tutti i termini diversi da 0. Possiamo dunque dire che:

$$z_F(t_0) = a_m \Big|_{m=0} g(t_0) + n_F(t_0)$$

Perchiamo di capire meglio cosa stiamo trattando: abbiamo che:

$$z_F(t_0) = \begin{cases} d_0 g(t_0) + n_F(t_0) & \text{se } T_{x=0} \\ d_1 g(t_0) + n_F(t_0) & \text{se } T_{x=1} \end{cases}$$

Poiché trasmettiamo solo il termine legato a  $n=0$ , di fatto sappiamo che in uscita dal canale avremo  $d_0$  o  $d_1$ , ma sappiamo di aver inviato uno dei due, ed anche quale dei due; una volta trasmesso,  $d_0$  e/o  $d_1$  sono valori deterministici, e quindi numeri.

$n_F(t_0)$  è il rumore introdotto dal sistema da un dato istante  $t_0$ : non abbiamo quindi dipendenza dal tempo poiché esso è fisso, ma vi sarà dipendenza statistica: si tratta dunque di una variabile aleatoria.

Poiché non ci è dato sapere a priori quanto rumore introduce il canale.

Per alleggerire la notazione, potremo usare le seguenti definizioni:

$$g_0 \triangleq g(t_0) ; \quad n_F \triangleq n_F(t_0) ; \quad z_F \triangleq z_F(t_0)$$

Tutto ciò che abbiamo finora detto è corretto, ma incompleto: non abbiamo detto quando si commettono errori, ossia quando:

A) Trasmettendo un segnale tale per cui  $z(t) \leq V_T$ , il decisore rileva un

$d_1$

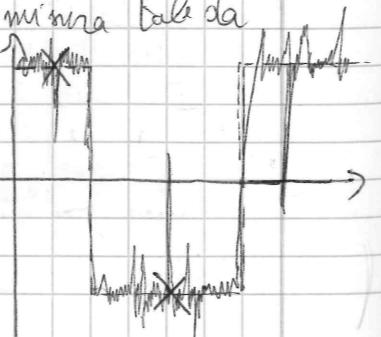
B) Trasmettendo un segnale tale per cui  $z(t) > V_T$ , il decisore rileva uno

$d_0$

Quando capita ciò? gli errori di trasmissione sono aleatori; può però capitare che, nell'istante di campionamento  $t_0$ , il rumore si aggiunga (nel caso A) o si sottragga (nel caso B) in misura tali da compiere un valore molto distante da  $z(t)$

nel resto dell'intervallo: è un evento

molto remoto (poiché il rumore deve parrocchiare



un picco di rumore opposto al segnale di cui in quel preciso istante, di fatto "sbaglia" tutto il sistema), ma avviene probabilmente rapidamente: dell'ordine di  $10^{-6}$  per sistemi elettronici,  $10^{-10}$  ottici: il campionatore è un istante fortemente influenzato dal rumore, inganna il decisore che così presenta, in uscita, il bit "sbagliato", ovvero diverso da quello trasmesso.

Vogliamo calcolare la probabilità di errore,  $P\{e\}$ , ovvero la probabilità che, trasmesso un bit, se ne riceva un altro.

Utilizzando il teorema della probabilità totale, abbiamo che:

$$P\{e\} = P\{e|T_{x=1}\}P\{T_{x=1}\} + P\{e|T_{x=0}\}P\{T_{x=0}\}$$

Supponiamo di avere una sorgente equiprobabile di bit:

$$P\{T_{x=1}\} = P\{T_{x=0}\} = \frac{1}{2}.$$

Arenno dunque che:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} [P\{e|T_{x=1}\} + P\{e|T_{x=0}\}]$$

Dovremo, a questo punto, calcolare le due probabilità di errore condizionate.

Consideriamo il caso A:  $P\{e|T_{x=1}\}$

Se il caso è A, allora  $z_F(t_0) \leq V_T$ ;

$$\Rightarrow P\{z_F(t_0) \leq V_T | T_{x=1}\}$$

Se  $T_{x=1}$ , allora  $d_1|_{T_{x=1}} = d_1$ ; in questo caso, vediamo che:

$$z_F(t_0) = d_1 g_0 + n_F.$$

$$\Rightarrow P\{d_1 g_0 + n_F \leq V_T\}$$

Come si può calcolare ciò? se  $g_0$  è un rumore, un "offset";  $n_F$  è una variabile aleatoria gaussiana a valor medio nullo; il termine di cui vogliamo calcolare la probabilità, dunque, sarà una variabile aleatoria gaussiana a media  $\mu = d_1 g_0$

Per calcolare la probabilità in questione dobbiamo ricorrere all'integrale della gaussiana, area alla erfc(x):

$$\text{erfc}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

La erfc calcola cioè l'area delle "code" della gaussiana al di sopra di |x|.

Usando questa definizione:

$$\begin{aligned} \text{P}\{e | T_{x=1}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_{x=1}}(x) dx = \int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi J_{MF}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2J_{MF}}} dx \quad [\mu = d_{go}] \\ &= \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{d_{go} - V_T}{\sqrt{2 J_{MF}}}\right) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il caso B:

$$\text{P}\{e | T_{x=0}\} = \text{P}\{R_{x=1} | T_{x=0}\} = \text{P}\{d_{go} + n_0 = V_T\} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{V_T - d_{go}}{\sqrt{2 J_{MF}}}\right)$$

Il disegno è esattamente  
duale al precedente

Potremmo ora calcolare la probabilità di errore globale, come somma delle due:

$$\text{P}\{e\} = \frac{1}{2} \left[ \text{P}\{e | T_{x=1}\} + \text{P}\{e | T_{x=0}\} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{d_{go} - V_T}{\sqrt{2 J_{MF}}}\right) + \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{V_T - d_{go}}{\sqrt{2 J_{MF}}}\right) \right]$$

Graficamente, si ha qualcosa  
di questo genere: le due funzioni  
di densità hanno, a parte per la  
media, le stesse caratteristiche.

Si può dimostrare che, se le due densità di probabilità differiscono solo per la media, la solta ottima di VT è la seguente: ponendo uguali le due espressioni:

$$\left| \text{P}\{e | T_{x=1}\} \right|_{V_T} = \left| \text{P}\{e | T_{x=0}\} \right|_{V_T}$$

Potremo poi uguali i due argomenti della erfc(x), ottenendo:

$$\frac{V_T - d_{go}}{\sqrt{2 J_{MF}}} = \frac{d_{go} - V_T}{\sqrt{2 J_{MF}}} \implies V_T = \frac{d_{go} + d_{go}}{2}$$

Followendo dunque VT a metà delle due medie, si minimizza la probabilità di errore, su sistemi in cui le due gaussiane, per  $T_{x=0}$  e  $T_{x=1}$ , hanno le stesse caratteristiche.

Un caso in cui questa relazione non è più verificabile, riguarda le comunicazioni ottiche: le due gaussiane sono diverse, e dunque si deve tornare a considerare casi meno particolari.

Sostituendo la soglia appena ricavata in  $\text{P}\{e\}$ , si ottiene:

$$\text{P}\{e\} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{|d_{go} - d_{go}|}{2\sqrt{2 J_{MF}}}\right)$$

Questo è verificato e sempre valido, per trasmissioni lineari in banda base. Si noti la generalità di questo risultato: a parte la non presenza di ISI, non abbiamo vincoli sui filtri o sul formato di comunicazione.

Potremmo fare di meglio? La risposta è sì: vediamo alcune cose:

La funzione erfc(x), per x elevato, tende ad zero; perché noi quantifichiamo le prestazioni in termini di probabilità di errore bassa, se riuscissimo ad avere x elevato, potremmo migliorare le prestazioni del sistema.

Si noti che noi conosciamo solo numericamente  $\text{erfc}(x)$ : poniamo, con una coltiva approssimativa, che  $\text{erfc}(x) \approx e^{-\frac{x^2}{4}}$  per  $x \geq 10^{-2}$ , ma è meglio utilizzare le tabelle numeriche.

Sappiamo che  $(d_1 - d_0)$  dipende dalla modulazione, quindi dai filtri  $H_C$  ed  $H_R$ , e dal rumore  $n(t)$ . Per aumentare  $|x|$ , potremmo:

- 1) Diminuire  $\sigma_n^2$ : se diminuiamo la varianza del processo rumore, allora diminuirebbero le fluttuazioni del segnale, ergo gli errori.

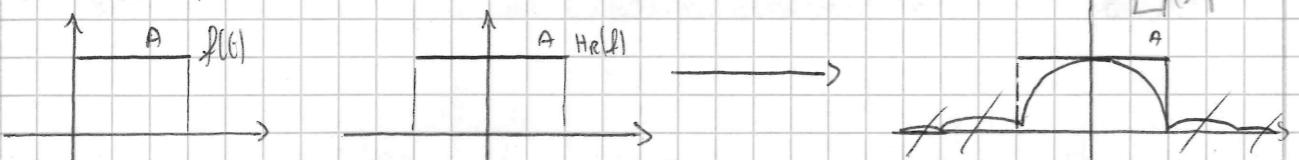
2) Aumentare  $g_0$

3) Giocare su  $d_1$  e  $d_0$ .

C'è un problema: per ridurre il rumore, faremmo usare un filtro passa basso a banda passante molto stretta; se però il filtre fosse troppo stretto, il rumore diminuirebbe, ma con esso anche  $g_0$ , e quindi si ottenderebbe l'effetto contrario. Bisogna trovare un trade-off: una via di mezzo in grado di maximizzare le prestazioni.

Esempio Pratico

Dato una trasmissione NRZ binaria anticodeciale, con filtro di ricezione passa basso ideale e banda  $B$  pari al bit rate  $B_2$ , come che non introduce filtraggio, determinare le prestazioni.



Il passa-basso taglia al di sopra del lobo principale, non interrompendo una grossa distorsione. Supponiamo che  $d_1 = 1$ ,  $d_0 = -1$ ,  $d_1 - d_0 = 2$ .

$n(t)$  è il solo processo gaussiano lineare stazionario ergodico a media nulla.

Usando la notazione già introdotta:

$$n_p(t) = n(t) * h_C(t)$$

$$\sigma_{n_p}^2 = P_{n_p} = \frac{N_0}{2} \cdot 2 B_2 \Big|_{B_2 = B_2} = N_0 B_2$$

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{2 \cdot A}{2\sqrt{N_0 B_2}}\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2 N_0 B_2}}\right)$$

Questo risultato è corretto, anche se di solito, in ambito di telecomunicazioni, si esprime la probabilità di errore in termini di energia o potenza.

Sappiamo che in uscita dal canale avremo  $s = E(t) + n(t)$ , e quindi, dato il nostro esempio pratico,  $s + E(t) = -E(t)$ .

Possiamo dire che l'energia del segnale in uscita dal canale,  $E_f$ , vale:

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt = \int_0^{T_B} A^2 dt = A^2 T_B$$

Da ciò:

$$A = \sqrt{\frac{E_f}{T_B}} \quad \text{Ma } B_2 = \frac{1}{T_B} \rightarrow A = \sqrt{E_f \cdot B_2}$$

Si vuol definire, come energia di riferimento, l'energia associata alla trasmissione di un bit,  $E_b$ :

$$E_b = \frac{E_{b,1} + E_{b,0}}{2} \quad \begin{cases} E_{b,1}: \text{energia del bit a '1'} \\ E_{b,0}: \text{energia del bit a '0'} \end{cases}$$

Allora già calcolato  $E_{f,C} = E_f$ ; vediamo  $E_{f,R} = E_f$ :

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt = \int_0^{T_B} A^2 dt = A^2 T_B$$

Quindi:

$$E_f = E_{f,C} = E_{f,R} = E_f$$

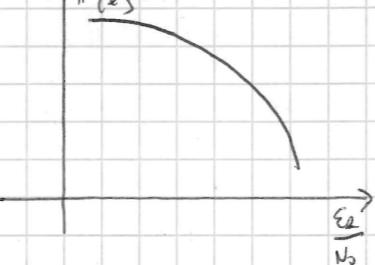
Sostituendo dunque in  $P\{e\}$ , vediamo che:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{E_f \cdot B_2}}{\sqrt{2 N_0 B_2}}\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2 N_0}}\right)$$

Queste sono le prestazioni di un sistema NEZ binario antipodal in banda base con filtro LPF a  $B = B_2$ .

In realtà questi risultati sono abbastanza comuni: avremo spesso a che fare con curve funzione del rapporto  $\frac{E_B}{N_0}$ .

Spesso ci capiterà di trovare, in questo ambito, curve di questo tipo:



### Filtri adattati

Abbiamo lasciato in sospeso l'argomento "ottimizzazione", lasciando pensare che "si può fare di meglio": abbiamo parlato di un trade-off, ma senza entrare nei dettagli.

Ai fini di variazioni  $J_{MF}$  senza toccare troppo  $g_o$ , e quindi di modificare il rapporto:

$$\frac{g_o}{J_{MF}} \left| \frac{\partial \frac{g_o^2}{J_{MF}}}{\partial H_R(f)} \right|, \text{ parlando di energia/potenza}$$

Possiamo lavorare su  $H_R(f)$ , ovia sul filtro di ricezione; per far ciò, lavoriamo nel dominio delle frequenze e consideriamo lo spettro della forma dei simboli in usata dal canale,  $E(f)$ , ovvia:

$$E(f) = \mathcal{F}\{e(t)\}$$

Introduciamo inoltre:

$$g_o \stackrel{\Delta}{=} g(f) \Big|_{t=t_0} = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\}_{t=t_0} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbb{E}(f) \cdot H_R(f)\}_{t=t_0}$$

Svolgendo con la definizione quest'ultimo:

$$g_o = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df$$

Calcoliamo ora la varianza  $\sigma_{np}^2$ : essa sarà pari a, usando le stesse ipotesi:

$$\sigma_{np}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 df$$

Potremo dunque scrivere il rapporto al quadrato come:

$$\frac{g_o^2}{J_{MF}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df}$$

Il nostro obiettivo è maximizzare questo rapporto; a questo scopo, dobbiamo scegliere una  $H_R(f)$  idonea alla maximizzazione.

Utilizzando la disegualanza di Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{E}(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df$$

Innoti che, se vale la seguente condizione:

$$\mathbb{E}(f) = c \cdot H_R^*(f)$$

Allora la disegualanza diventa egualanza, e quindi abbiamo maximizzato il numeratore. Considerando dunque valida quest'ipotesi "al contrario", ovvia:

$$H_R(f) = c \cdot \mathbb{E}^*(f)$$

Sostituendo ciò nel rapporto:

$$\frac{g_o^2}{J_{MF}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{E}^*(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df} = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{E}(f)|^2 df}{N_0}$$

Il numeratore abbiamo l'energia del segnale  $E(f)$  (usando l'equivalenza di Parseval), e quindi potremo scrivere il rapporto come:

$$\frac{g_o^2}{J_{MF}} = \frac{2 E_B}{N_0}$$

Nel dominio del tempo, il filtro  $H_R(t)$  avrà forma del tipo:

$$h_R(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_R(f)\} = c \cdot \delta^*(t_0 - t)$$

(Usando proprietà del complesso coniugato e del ritorno della trasformata di Fourier)

Questo è il filtro adattato, alla forma del simbolo: la risposta all'impulso in adatta non al canale, o al canale di errore (come potremmo pensare da elettronica), bensì alla forma del simbolo in uscita dal canale.

Il filtro adattato maximizza il rapporto, e permette di ottenere le

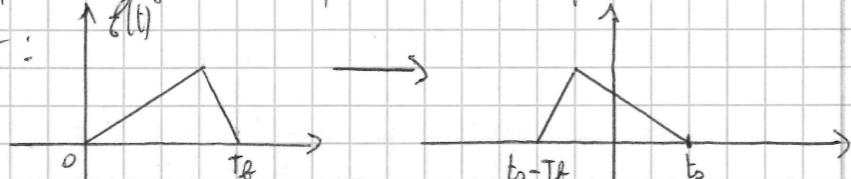
migliori prestazioni in assoluto, come vediamo dalla  $P\{\epsilon\}$ :

$$P\{\epsilon\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2} \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right),$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Nel dominio del tempo, con segnali reali, il vincolo per la realizzazione di filtri adattati sarà:

$$h_R(t) = c \cdot \delta(t_0 - t)$$



Questo filtro generalmente non è realizzabile: esso è non causale.

Se consideriamo per ipotesi  $t_0 \geq T_0$ , nella fattispecie  $t_0 = T_0$ , il filtro diventerà causale, e  $h_R(t)$  avrà forma del tipo:



Esempio pratico:

Dato un sistema NRZ, binario, antipodal, in banda base, con filtro adattato;  $d_0 = -1$ ,  $d_1 = +1 \Rightarrow d_1 - d_0 = 2$ .

Le prestazioni, in caso di filtro adattato, sono:

$$P\{\epsilon\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

L'energia del segnale in uscita dal canale  $E(t)$ , vale:

$$E_{B1} = E_B = E_{B2}$$

L'energia media sui bit vale:

$$E_B = \frac{E_{B1} + E_{B2}}{2} = E_B$$

$$\rightarrow P\{\epsilon\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2N_0}}\right)$$

Facciamo ora un confronto delle prestazioni rispetto ad un caso non adattato, come l'ultimo esempio pratico prima di questo: abbiamo visto infatti che:

- Non filtro adattato,  $P\{\epsilon\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right)$

- Non filtro LPF ideale,  $P\{\epsilon\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2N_0}}\right)$

Consideriamo di calcolare stessa probabilità di errore con i due metodi; daremo però uguali gli argomenti delle due  $\operatorname{erfc}()$ :

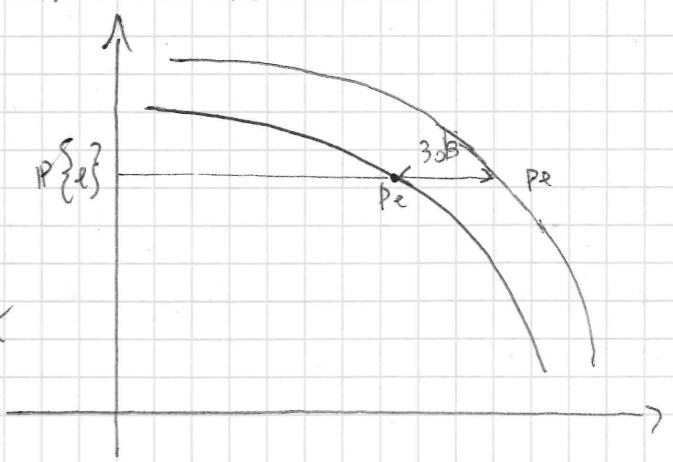
$$\left. \frac{E_B}{N_0} \right|_{\text{adattato}} = \left. \frac{E_B}{2N_0} \right|_{\text{LPF ideale}} \rightarrow \left. \frac{E_B}{N_0} \right|_{\text{LPF ideale}} = 2 \cdot \left. \frac{E_B}{N_0} \right|_{\text{adattato}}$$

Questo significa che, per ottenere la medesima qualità, le stesse prestazioni, con il filtro adattato avrà bisogno di metà della potenza che si dovrà impiegare in un sistema non adattato.

Vediamo pensando in dB:

$$\left. \frac{E_B}{N_0} \right|_{\text{LPF}} = 3 \text{ dB} + \left. \frac{E_B}{N_0} \right|_{\text{adattato}}$$

tra le due curve, ci sarà una distanza di 3dB



Questo risultato è stato ricavato da un esempio pratico, ma in realtà è molto generale: vale infatti per sistemi di qualsiasi tipo: tra filtro adattato e non adattato ci è una distanza di 3dB.

Si noti che l'adattamento dipende dal segnale in uscita dal canale: la banda del filtro non è la stessa del IIR ideale, ma dipende da tanti fattori.

### Spazio dei Segnali

Per analizzare sistemi più complessi di quelli finora analizzati, è necessario introdurre una teoria più generale di quella finora usata: lo spazio dei segnali.

Lo scopo è quello di ricostruire i segnali in una rappresentazione vettoriale

Consideriamo per ipotesi segnali a energia finita, su di un supporto limitato da  $t_{00}$  a  $t_s$  (tempo di simbolo); consideriamo infine trascurabili gli effetti di interferenza interimbolica.

Dato un segnale  $\eta(t)$ , si definisce il suo sviluppo su di una base ortonormale,  $\hat{\varphi}_j(t)$ ,  $j = 1 \dots n$ , come:

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^N a_j \hat{\varphi}_j(t)$$

Ora si considera  $\eta(t)$  come combinazione lineare dei  $\hat{\varphi}_j(t)$ ; l'ortogonalità si definisce così: dati i vettori  $\hat{\varphi}_i(t)$ , essi sono ortonormali se:

$$\langle \hat{\varphi}_i(t) | \hat{\varphi}_j(t) \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Una cosa veramente interessante di tutto ciò è che poniamo, data una base ortonormale completa, considerare  $\eta(t)$  semplicemente con gli  $a_j$ :

$$\eta(t) \rightarrow (a_1; a_2; \dots; a_N)$$

Possiamo cioè eliminare la dipendenza dal tempo, e ricordarci a del semplice calcolo vettoriale.

I concetti di base si possono facilmente ricordare in questo nuovo spazio: consideriamo, nella fattispecie, il concetto di energia, di prodotto scalare, e di "distanza".

### Prodotto scalare

Sappiamo che il prodotto scalare è definito come:

$$\langle \eta(t) | f(t) \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t) f^*(t) dt \rightarrow \sum_{j=1}^N (a_j \cdot b_j^*)$$

Si noti che questa definizione è molto vicina a quella di autocorrelazione: poniamo dire che, di fatto, il prodotto scalare rappresenta un indice della correlazione tra due vettori.

Energia: sappiamo di, dato un segnale  $\eta(t)$ , la sua energia,  $E_\eta$ , vale:

$$E_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta(t)|^2 dt$$

Poiché nello spazio dei segnali consideriamo  $N$  componenti, gli  $a_j$  con  $j \in [1:N]$ , poniamo dire che:

$$E_\eta = \sum_{j=1}^N |a_j|^2$$

Poniamo a dare a ciò un'interpretazione geometrica: lo spazio dei segnali che stiamo introducendo è uno spazio vettoriale a  $N$  dimensioni;

questo calcolo dell'energia rappresenta una sorta di generalizzazione in  $N$  dimensioni del teorema di Pitagora, e quindi  $\epsilon_{\eta}$  rappresenta la distanza al quadrato rispetto all'origine del vettore degli  $a_j$ .

Questo concetto si può generalizzare in una distanza tra due segnali,  $\eta(t)$  e  $\theta(t)$ : la distanza al quadrato tra due vettori dunque si definisce così:

$$d^2[\theta(t); \eta(t)] \triangleq \int_0^{t_0} |\eta(t) - \theta(t)|^2 dt$$

Se entrambe le funzioni sono rappresentabili con la stessa base ortonormale, ovia essa è completa rispetto a entrambe le funzioni, allora

si può discretizzare l'integrale, così:

$$d^2[\theta(t); \eta(t)] \triangleq \sum_{j=1}^N |a_j - b_j|^2$$

Come determinare questa base? Utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Applichiamo questa teoria ai sistemi di trasmissione: dato un intervallo di tempo  $[t_0; t_S]$ , con una forma d'onda (simbolo) presa da una costellazione di  $M$  forme d'onda, dove:

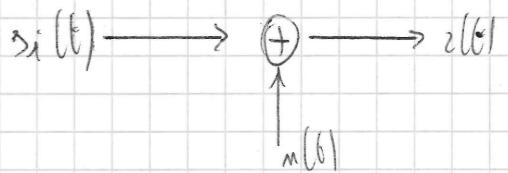
$$M = 2^{n_b t}$$

Ciascuna forma d'onda è identificata da una sequenza di  $n_b$  bit.

Consideriamo in trasmissione il segnale  $s(t)$ , scomponibile in una base ortonormale, ottenendo componenti  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)$ .

In ricezione, in seguito agli effetti di filtraggio del canale, avremo sempre una costellazione di  $M$  forme d'onda, ma i simboli ricevuti potrebbero essere diversi da quelli trasmessi.

Il nostro sistema sarà così modellizzabile:



Il nostro obiettivo è essere in grado di stimare quale simbolo sia stato trasmesso, sulla base del segnale  $z(t)$ , comprendendo di rumore:

$$z(t) = s_i(t) + n(t)$$

Vogliamo spiegare la teoria dello spazio dei segnali, scomponendo i segnali con un'altra base ortonormale. La scommo che questa base sarà rappresentata anch'essa in  $N$  dimensioni, con  $N \leq M$ . Trasatti i  $\psi_j(t)$ , scomponiamo

$s_i(t)$  in:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \psi_j(t)$$

Ottieniamo così scomposto senza problemi il segnale utile rispetto ad una base ortonormale.

Vorremmo poter far lo stesso per il rumore: vorremmo, nella fattispecie, rappresentare una sequenza utile di rumore; il problema è però al fatto che non è assolutamente certo che la base dei  $\psi_j(t)$  sia completa rispetto al processo  $n(t)$ . In realtà, questo fatto non ci interesserà più di tanto: supponiamo di poter rappresentare i coefficienti di rumore  $n_j$ , come:

$$n_j = \langle n(t) | \psi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{t_0} n(t) \psi_j^*(t) dt$$

Poiché ogni elemento è esistente e limitato al tempo di trasmissione, da  $t_0$  a  $t_S$ , allora:

$$n_j = \int_{t_0}^{t_S} n(t) \psi_j(t) dt$$

Poiché  $n(t)$  è il solito processo gaussiano bianco ergodico a media nulla, i  $n_j$  saranno variabili casuali gaussiane (a media nulla); per caratterizzare le variabili  $n_j$ , dunque effettueremo la solita analisi statistica, con media e varianza; inizieremo con la media:

$$\mathbb{E}[n_j] = \mathbb{E}\left[\int_0^{T_S} n(t) \hat{\phi}_j^*(t) dt\right]$$

Usando la linearità del valore atteso e dell'integrale, cominciamo i due seguenti:

$$\Rightarrow \int_0^{T_S} \mathbb{E}[n(t)] \hat{\phi}_j^*(t) dt = 0 \quad [\text{poiché } \mathbb{E}[n(t)] = 0]$$

Con ciò abbiamo dimostrato il fatto che effettivamente le variabili casuali gaussiane siano a media nulla.

Si noti che non stiamo considerando gli elementi che rendono non completa la base dei  $\hat{\phi}_j$ : rispetto a  $n(t)$ ; più avanti discuteremo meglio il perché di questo fatto, fornendo interpretazioni di vario tipo.

Proseguiamo la nostra analisi statistica, determinando la media

congiunta di due generiche variabili aleatorie  $n_j$  e  $n_k$ :

$$\mathbb{E}[n_j n_k] = \mathbb{E}\left[\int_0^{T_S} n(t) \hat{\phi}_j^*(t) dt \cdot \int_0^{T_S} n(t') \hat{\phi}_k^*(t') dt'\right]$$

Utilizzando la linearità degli operatori "valore atteso" e "integrale", com-

mentiamoci:

$$\Rightarrow \int_0^{T_S} \int_0^{T_S} \underbrace{\mathbb{E}[n(t) \cdot n(t')]}_{\text{autocorrelazione}} \cdot \hat{\phi}_j^*(t) \cdot \hat{\phi}_k^*(t') dt' dt$$

Notiamo che il termine evidenziato con la graffa rappresenta l'autocorrelazione del processo  $n(t)$ , che sappiamo essere bianco, gaussiano, di den-

stati spettrale di potenza pari a  $\frac{N_0}{2}$ ; la funzione di autocorrelazione

sarà la sua antitrasformata, perciò dunque si

$$R_n(t', t'') = \frac{N_0}{2} S(t' - t'')$$

Sostituendo:

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} \int_0^{T_S} \int_0^{T_S} S(t' - t'') \hat{\phi}_j^*(t') \hat{\phi}_k^*(t'') dt' dt''$$

Consideriamo il solo integrale in  $dt'$ : possiamo considerare, nella  $S$ ,  $t''$  come un ritardo rispetto ad esso, e dunque "campionare"  $\hat{\phi}_k^*(t')$  in  $t' = t''$ , per la proprietà della  $S$ :

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} \int_0^{T_S} \int_0^{T_S} S(t' - t'') \hat{\phi}_j^*(t'') \hat{\phi}_k^*(t'') dt' dt''$$

L'unico elemento integrabile in  $dt'$  sarà la  $S$ , il cui integrale ha

$\int$  rimarrà dunque solamente:

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} \int_0^{T_S} \hat{\phi}_j^*(t'') \hat{\phi}_k^*(t'') dt''$$

Supponendo ora reale le due funzioni  $\hat{\phi}_j$  e  $\hat{\phi}_k$ , possiamo interpretare questo integrale come prodotto scalare, ricordando la definizione:

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} \langle \hat{\phi}_j(t) | \hat{\phi}_k(t) \rangle$$

Però  $\hat{\phi}_j$  e  $\hat{\phi}_k$  fanno parte della base orthonormale con la quale abbiamo espresso il nostro segnale nello spazio dei segnali; quindi

dunque, per il risultato finale, la condizione di ortogonalità:

$$\mathbb{E}[n_j n_k] = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & \text{per } j=k \\ 0, & \text{per } j \neq k \end{cases}$$

Ma, se  $j=k$ , allora stiamo calcolando  $\mathbb{E}[n_j]^2 = \sigma_{n_j}^2$ , cioè la varianza del processo; inoltre, se  $\mathbb{E}[n_j n_k] = 0$ , allora significa che si puo-

scomponere nelle sue componenti singole:

$$\mathbb{E}[n_j n_k] = 0 = \underbrace{\mathbb{E}[n_j]}_0 \underbrace{\mathbb{E}[n_k]}_0$$

Questo significa che, per  $j \neq k$ , le variabili aleatorie sono sconlate; poiché se due (o più) gaussiane sono sconlate tra loro, allora sono anche statisticamente indipendenti; e poiché  $n(t)$  è un processo gaussiano, allora, per  $j \neq k$ , le variabili aleatorie saranno tra di loro sconlate.

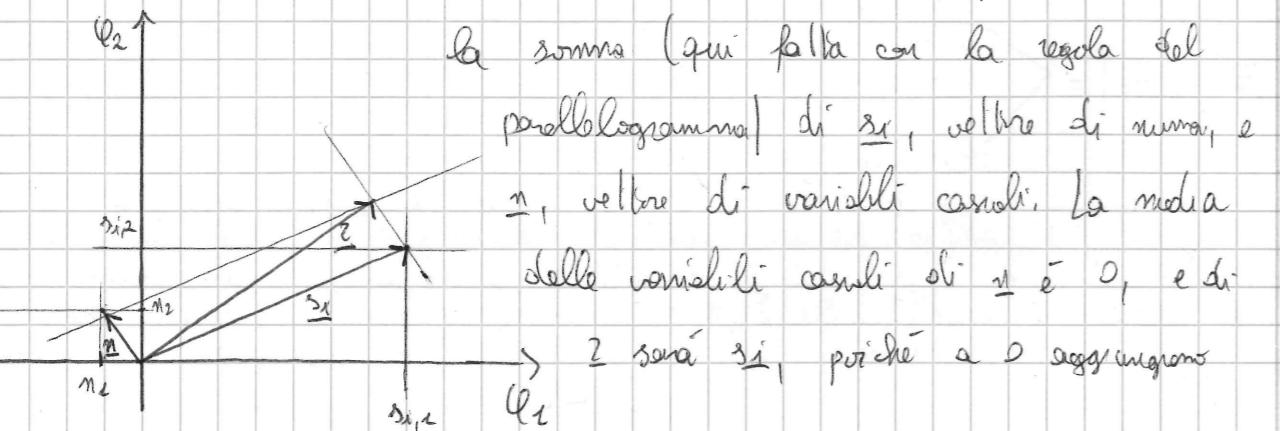
Sinora, di tutto al ricevitore, abbiamo solo capito e analizzato  $\alpha\bar{o}$ :

$$s_i(t) \xrightarrow{+} \overset{z(t)}{\textcircled{+}} \quad z(t) = s_i(t) + n(t)$$

Se segnale in usata dal nodo sommatore con il quale modelliamo il canale, da introdurre il rumore  $n(t)$ , sarà  $z(t)$ ; usando la teoria dello spazio dei segnali, potremo esprimere  $z(t)$  come somma di due vettori, riferiti alla stessa base ortogonale:

$$z(t) \rightarrow \underline{z} = \underline{s}_i + \underline{n}$$

Perchiamo di fornire un'interpretazione geometrica di tutto  $\alpha\bar{o}$ : dato un insieme esprimibile con una base ortogonale comprendente due funzioni  $q_1$  e  $q_2$ :  $\underline{z}$  ha come componenti variabili canali, poiché  $\underline{z}$  rappresenta



un offset pari al numero, contenuto in ciascuna componente di  $s_i$ .

Notiamo che il fatto che non consideriamo l'incompletezza della base ortogonale  $(q_1; q_2)$  non ci riguarda: se infatti il rumore fosse per esempio esprimibile con 5 funzioni,  $(q_1; q_2; q_3; q_4; q_5)$ , le ultime tre funzioni non influenzerebbero mai variabili in alcun modo si: se per esempio avessimo una matrice  $3 \times 3$  ed un'altra  $3 \times 5$ , inserendo tutti "0" fuori dagli elementi della  $3 \times 3$ , avremmo influenzato la  $3 \times 5$  solo nelle componenti non nulle: quello che

capita con le dom, in questo ambito, è del tutto analogo.

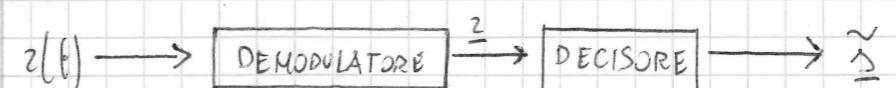
Quanto vale la densità di probabilità lità della  $j$ -esima variabile aleatoria di  $\underline{z}$ ? Sarà la srlta gaussiana:

$$f_{zj}(z_j | s_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0} (z_j - s_{ij})^2}$$

Poiché le gaussiane sono fra loro statisticamente indipendenti, come abbiamo visto in precedenza, poniamo calcolare la  $f_z$ , come la densità di probabilità conjunta del vettore  $\underline{z}$ , come:

$$f_z(\underline{z} | \underline{s}_i) = \prod_{j=1}^N f_{zj}(z_j | s_{ij}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{N_0} (\underline{z} - \underline{s}_i)^2}$$

Fatti questi calcoli preliminari, vediamo lo schema a blocchi del ricevitore basato su queste teorie:



Il demodulatore, fornito in ingresso il segnale  $z(t)$ , fornisce in uscita il vettore  $\underline{z}$  prima descritto. Il decisore, dato  $\underline{z}$  in ingresso, dovrà decidere con la massima verosimiglianza, quale simbolo

$s_1(t)$  ha generato quel segnale  $z(t)$ , quindi  $z$ . Il decisore, dunque, lavorerà sulle componenti di  $z$ .

Criterio di massima probabilità a posteriori

Il decisore dovrà, in qualche maniera, calcolare tutte le varie probabilità sui simboli della costellazione di essere vicini a  $z$ , e selezionare quello che coincide con la probabilità maggiore. In questo modo si stima  $\underline{s}_1$  come il  $\underline{s}_1$  più vicino al  $z$  ricevuto in ingresso.

Calcoliamo questa probabilità massima, come:

$$\max \{ P\{\underline{s}_1 | z\} \}$$

Ricordiamo il teorema di Bayes:

$$P\{\underline{s}_1 | B\} = \frac{P\{B | \underline{s}_1\} P\{\underline{s}_1\}}{P\{B\}}$$

Nel nostro caso:

$$P\{\underline{s}_1 | z\} = \frac{P\{z | \underline{s}_1\} P\{\underline{s}_1\}}{P\{z\}}$$

Supponendo che i  $M$  simboli della costellazione siano tutti equiprobabili, sostituiamo alle probabilità le funzioni di densità di probabilità:

$$P\{\underline{s}_1\} = \frac{1}{M}; \quad P\{z | \underline{s}_1\} = f_z(z | \underline{s}_1)$$

$$\Rightarrow P\{\underline{s}_1 | z\} = \frac{1}{M} \frac{f_z(z | \underline{s}_1)}{f_z(z)}$$

Poiché il nostro obiettivo è quello di maximizzare la probabilità, dobbiamo maximizzare il numeratore, ma la densità condizionata prima calcolata; usiamo un piccolo artificio matematico: maximizzare una funzione  $g(x)$ , equivale a maximizzare la funzione  $\ln(g(x))$ ; poiché

i logaritmi sono funzioni monotone.

$$\Rightarrow \max_x [P\{\underline{s}_1 | z\}] = \max_{\underline{s}_1} [\ln [f_z(z | \underline{s}_1)]]$$

Calcoliamo il logaritmo naturale della nostra espressione:

$$\ln [f_z(z | \underline{s}_1)] = \ln \left[ (\pi_{s_1})^{-\frac{N}{2}} \right] + \underbrace{\left( -\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N (z_j - s_{1,j})^2 \right)}_{A} \underbrace{\left( \frac{N}{2} \right)}_{B}$$

Abbiamo due contributi,  $A$  e  $B$ , sommati tra loro (perché il logaritmo del prodotto equivale ad una somma); il termine  $A$  non dipende da  $\underline{s}_1$  e quindi non interverrà nel processo di maximizzazione; perché il contributo " $B$ " ha un  $-$  davanti, il suo valore più elevato sarà dato dal minimo della sommatoria:

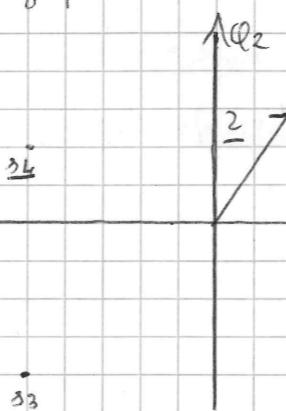
$$\Rightarrow \min_{\underline{s}_1} \sum_{j=1}^N (z_j - s_{1,j})^2$$

Ma questa sommatoria altri non è che la distanza tra  $z$  e  $\underline{s}_1$ !

$$\Rightarrow = d^2(z; \underline{s}_1).$$

Abbiamo ottenuto un risultato fondamentale: il criterio di decisione ottimo è quello da, dato  $z$  ricevuto in ingresso, scegli il simbolo  $\underline{s}_1$  tale per cui la distanza dei due vettori  $z$  e tutti i simboli  $\underline{s}_1$  della costellazione è minima.

Graficamente: dato ad esempio  $N=2$ , e  $M=4$  (sono 4 simboli nella costellazione), supponiamo di ricevere  $z$ ;



il decisore calcola la distanza di  $z$  su ciascuno dei simboli; in questo caso, la miglior stima sarà determinata da  $\underline{s}_1$ .

Regioni di decisione

Lo spazio dei segnali può essere diviso in  $M$  settori (uno per simbolo della costellazione); questi settori rappresentano l'interno dei punti più vicini ad un simbolo rispetto a tutti gli altri.

Invece di andar ogni volta e per ogni  $\underline{z}$  tutte le distanze, conoscendo a priori questi settori, detti "regioni di decisione", vediamo

che  $\underline{z}$  cade nella regione  $i$ -esima, allora  $\underline{s}_i = \underline{s}_i$ .

Esempio grafico: supposta la base ortogonale composta da 2 funzioni,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , faremo dividere le regioni in 8 zone, ciascuna per un simbolo diverso. Questo si può fare usando i segmenti fuori da assi per i vari segmenti congiungenti i diversi punti.

Vedendo che  $\underline{z}$  cade in una di queste regioni, potremo immediatamente stimare quale degli  $\underline{s}_i$  meglio identifica  $\underline{z}$ .

Perdiamo di interpretare i risultati appena ottenuti con alcuni vecchi risultati, scoprirete cose molto interessanti: vedremo che quella appena introdotta è una teoria molto generale, che ricorderà anche elementi già visti.

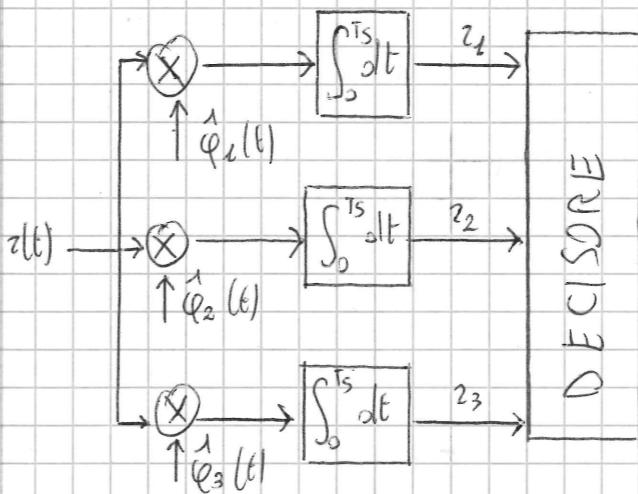
Il demodulatore, calcolando le varie componenti, dovrà di fatto calcolare prodotti scalari, determinando ogni componente  $z_i$  di  $\underline{z}$  in questo modo:

$$z_i = \langle z(t) | \varphi_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \varphi_i^*(t) dt$$

Poiché  $\varphi_i(t) \in [0; T_s]$ , l'integrale sarà qui limitato:

$$z_i = \int_0^{T_s} z(t) \varphi_i^*(t) dt$$

Il demodulatore farà semplicemente queste operazioni:



Le varie componenti  $z_i$  andranno in ingresso al decisore, per ogni intervallo  $T_s$ , producendo in uscita il simbolo  $\underline{s}_i$ , e quindi il decisore, con il criterio di minima distanza, sceglierà il simbolo  $\underline{s}_i$  più idoneo.

Sulla base delle componenti in ingresso, dunque, il decisore dovrà confrontare le varie componenti di  $\underline{z}$  con i confini delle zone di decisione. Alla base di questo decisore vi saranno, come si può immaginare, dei comparatori di soglia (uno per componente).

Esempio teorico/pratico

Dato un sistema binario, i cui simboli trasmessi sono:

$$s_1(t) = \text{do } f(t) ; s_2(t) = \text{do } g(t) , f(t) \text{ generica e reale, in banda base}$$

Determiniamo l'espressione del filtro ottimo, usando la teoria dello spazio dei segnali.

Vediamo: la base ortogonale sarà formata da 1 simbolo base:

$$\varphi_1(t) = K f(t)$$

La costante  $K$  serve a normalizzare la funzione. Vediamo quanto vale.

La base deve essere orthonormale, dunque  $\kappa$  deve far sì che:

$$\|\hat{q}_e(t)\| = 1$$

Ossia la norma euclidea (norma 2, norma quadratica) della funzione deve valere 1. Vediamo che:

$$\|\hat{q}_e(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{q}_e(t)|^2 dt = K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\epsilon}(t)|^2 dt = K^2 E_E$$

Dove  $E_E$  è l'energia del simbolo  $\hat{\epsilon}(t)$ . Per normalizzare:

$$K^2 E_E = 1 \rightarrow K = \sqrt{E_E}$$

La base orthonormale a questo punto è la funzione:

$$\hat{q}_e(t) = \frac{\hat{\epsilon}(t)}{\sqrt{E_E}}$$

A rigore dovremo ora usare i prodotti scalari per determinare  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$ ; poiché però abbiamo una sola funzione in base, e le condizioni ci permettono di farlo, vediamo che:

$$\begin{cases} s_1(t) = d_1 \hat{\epsilon}(t) \rightarrow s_1(t) = d_1 \cdot \sqrt{E_E} \cdot \hat{q}_e(t) \rightarrow s_1 \\ s_2(t) = d_2 \hat{\epsilon}(t) \rightarrow s_2(t) = d_2 \cdot \sqrt{E_E} \cdot \hat{q}_e(t) \rightarrow s_2 \end{cases}$$

Usare di questi "trucchi" può sempre essere buona cosa. Assummo svelto i prodotti, avremmo dovuto fare:

$$\underline{s}_1 = \langle s_1(t) | \hat{q}_e(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \hat{q}_e^*(t) dt$$

$$\underline{s}_2 = \langle s_2(t) | \hat{q}_e(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) \hat{q}_e^*(t) dt$$

Confrontiamo tutto ciò con un caso vecchio, a noi ben noto: il filtro adattato. Sappiamo che, dato  $\hat{\epsilon}(t)$  in uscita dal canale, la condizione di filtro adattato, per  $h_e(t)$ , è:

$$h_e(t) = \kappa \delta(t_0 - t)$$

Consideriamo  $s_{F1}(t)$  il segnale filtrato dal nostro  $h_e(t)$ , e consideriamo al solito il primo istante di campionamento,  $t_0$ :

$$\begin{aligned} s_{F1}(t) &= s_1(t) * h_e(t) \Big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) h_e(t-\tau) d\tau \Big|_{t=t_0} = \\ &= K \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \delta(t_0 - t + \tau) d\tau \Big|_{t=t_0} = K \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \delta(\tau) d\tau = K s_1(0) = K \langle s_1(t) | \hat{\epsilon}(t) \rangle \end{aligned}$$

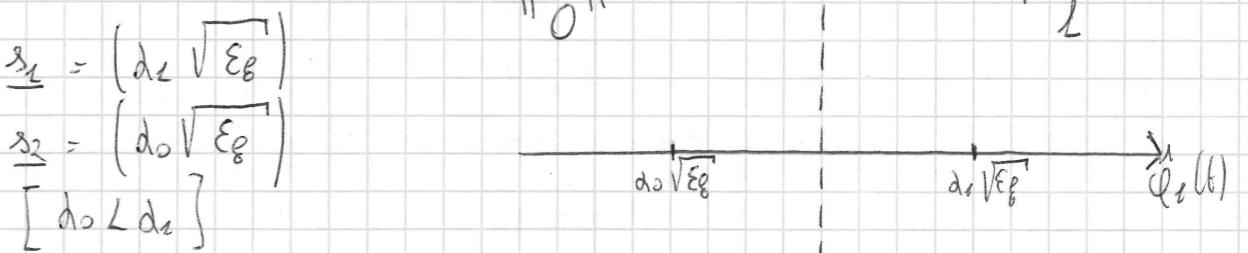
~~Abbiamo ottenuto la stessa equazione ~~dell~~ filtro adattato e di minima distanza!~~

Cioè se abbiamo appena mostrato è un risultato straordinario:

l'uscita del filtro adattato a  $\hat{\epsilon}(t)$  è uguale alla componente di  $\hat{\epsilon}(t)$  nello spazio dei segnali (a meno di fattori di proporzionalità):

ciò significa che, con la nuova teoria generale introdotta, abbiamo raggiunto il caso ottimo ricavato senza di essa! Un modo di realizzare le operazioni di demodulazione, infatti, è proprio basato sull'uso di molti filtri adattati.

Geometricamente, capita qualcosa del genere:



Consideriamo  $s_1$  legato alla trasmissione di un "1";  $s_2$  alla trasmissione di uno "0".

Utilizzando il teorema della probabilità totale, calcoliamo la probabilità di errore per questo sistema.

$$P\{e\} = P\{T_{x=1}\} P\{e|T_{x=1}\} + P\{T_{x=0}\} P\{e|T_{x=0}\}$$

$$\text{Vediamo che } \Pr\{e | T_{x=0}\} = \Pr\{\underline{z} \notin \text{regione di decisione} | T_{x=0}\}$$

$$\rightarrow \Pr\{\underline{z} \in \text{regione di decisione di "1" | } T_{x=0}\}$$

Sappiamo che:

$$\underline{z} = s_1 + n$$

Nella fatidica, il segnale ricevuto  $\underline{z}$  è una variabile casuale con la media centrata sul simbolo trasmesso, e tutto le altre caratteristiche statistiche identiche a quelle del rumore.

Considerando il caso di  $T_{x=0}$ :

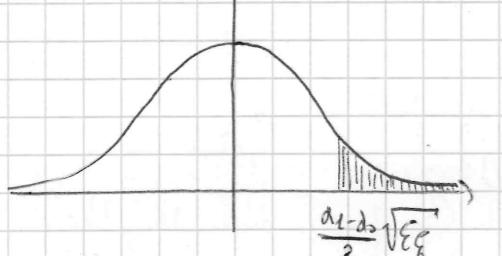
$$\underline{z} |_{T_{x=0}} = d_0 \sqrt{E_g} + n_e$$

Dobbiamo calcolare la probabilità che dunque  $\underline{z}$  valuto con  $T_{x=0}$

si trovi nella regione di decisione del "0":

$$\Pr\{d_0 \sqrt{E_g} + n_e \leq \frac{d_1 - d_0}{2} \sqrt{E_g}\} = \Pr\{n_e \leq \frac{d_1 - d_0}{2} \sqrt{E_g}\}$$

Poiché  $n_e$  è a media nulla, la gaussiana sarà centrata in 0; la probabilità che  $n_e$  si trovi al di sopra di quel valore, essa in



una delle code, si calcola con la erfc(x):

$$\Rightarrow \Pr\{e | T_{x=0}\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2} \cdot \sqrt{E_g} \cdot \frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2} \sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right)$$

Poiché la varianza del processo è  $\frac{N_0}{2}$ ; al numeratore si scrive la distanza del punto dal quale si calcola la coda, meno il punto in cui è situato il valor medio della gaussiana; al denominatore, la varianza  $\sigma^2$ , sotto radice questa (dunque la deviazione standard,  $\sigma$ ), moltiplicata per  $\sqrt{2}$ .

Abbiamo calcolato una delle due probabilità di errore: quella legata alla trasmissione di uno "0".

Per quanto riguarda quella legata alla trasmissione di un "1",

$$\underline{z} |_{T_{x=1}} = d_1 \sqrt{E_g} + n_e$$

Si noti ora una cosa molto interessante: rispetto a prima, l'unica caratteristica variante è il valor medio sul quale è centrata la variabile aleatoria  $\underline{z}$ , considerante "1" trasmesso.

Poiché quel valor medio è simmetrico, rispetto all'inizio, alla delimitazione delle regioni di decisione, e poiché la gaussiana (media a parte) ha le stesse caratteristiche (ed è una funzione pari), possiamo affermare che:

$$\Pr\{e | T_{x=1}\} = \Pr\{e | T_{x=0}\}$$

La probabilità di errore globale, supposta una regola di bit equiprobabile, è data da:

$$\begin{aligned} \Pr\{e\} &= \frac{1}{2} [\Pr\{e | T_{x=0}\} + \Pr\{e | T_{x=1}\}] = \frac{1}{2} [2 \cdot \Pr\{e | T_{x=0}\}] = \\ &= \Pr\{e | T_{x=0}\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2} \sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

Si noti una cosa: questi stessi risultati erano stati precedentemente ottenuti mediante campionamento e filtri adattati; usando la teoria dello spazio dei segnali, ed il criterio della minima distanza, abbiamo ottenuto lo stesso risultato, in maniera semplificata.

Diamo spazio ad un'altra semplificazione: esamineremo questo esempio sotto un altro punto di vista, introducendo il concetto

di distanza minima "d", come la distanza più breve che intercorre tra due simboli:

$$d = (d_1 - d_0) \sqrt{E_F}$$

Mettendo questa definizione, poniamo dire che:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

La cosa davvero interessante è che questo risultato, in canabo a partire da un caso molto particolare, è assolutamente valido per qualsiasi sistema binario.

Dato dunque un generico sistema binario, la cui costellazione dispone di 2 simboli, e quindi nel caso più generale la base ortonormale potrà essere costituita da 2 elementi, presentando i due simboli  $s_1$  e  $s_2$ , si vede che la probabilità di errore è sempre la stessa, considerando "d" come la distanza tra i due simboli; la  $P\{e\}$  sarà uguale a:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Alcuna più interessante è il seguente fatto: all'anno detto da la teoria dello spazio dei segnali con criterio di minima distanza è valida in caso di filtro adattato; se esistesse un qualche legame tra il filtro generico che usiamo nel risimo e filtro adattato, poniamo ricordarci comunque a questa teoria.

Supponiamo per esempio di avere, al posto del filtro adattato, un filtro passa basso ideale di banda  $B$ , dove  $B$  è la banda null-to-null del segnale. Poiché noi sappiamo che questo introduce

una penalità pari a 3 dB sulle prestazioni, potremo far così: prestazioni significa quanto il rumore ci influenza, e dunque ci poniamo ricollegare alla varianza: se la penalità è di 3 dB allora basterà raddoppiare la varianza del processo rumoso,

ottenendo, come  $P\{e\}$ , finale:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{2N_0}}\right)$$

Se il filtro è generico, e non mi dava informazioni ulteriori, ci si dovrà ricordare all'espressione più generale e complessa:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_1 - d_0}{2\sqrt{2}} \frac{g_0}{J_{nr}}\right)$$

Questa è molto complessa, poiché si devono calcolare  $g_0$  e  $J_{nr}$ ; se possibile, sarebbe meglio non usarla.

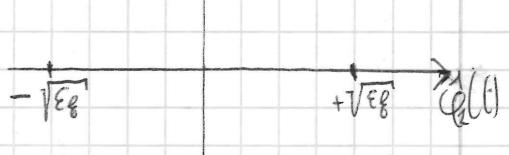
Essamineremo ora alcuni casi specifici, ricorrendo ad altri esempi teorico/pratica.

Esempio: sistema binario antipodale in banda base

Allora si( $t$ ) definito come:

$$s_i(t) = d_i \delta(t), \quad d_1 = +1, \quad d_0 = -1$$

$$\text{La base sarà } Q_c(t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{E_F}}$$



La distanza "d" tra i due simboli, sarà:

$$d = 2\sqrt{E_F};$$

Poiché l'energia di bit vale:

$$E_F = \frac{E_{s1} + E_{s2}}{2} = \frac{E_F}{2} > E_F$$

$$d = 2\sqrt{E_B}.$$

Ha probabilità di errore, in questo ambito, ovvia:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{E_B}}{2\sqrt{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2N_0}}\right)$$

In noti la semplicità dei calcoli, rispetto a come poterono essere con la teoria più generale.

E se il filtro di ricezione fosse un LPF ideale? Niente di

più facile:  $\int_{-\infty}^{\infty} h_{LPF}(f) df = \sqrt{2N_0}$

$$\rightarrow P\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2N_0}}\right).$$

Esempio: sistema binario unipolare (on/off) in banda base.

Il segnale sarà composto da sequenze dei simboli:

$$s_1(t) = E_B(t); s_0(t) = 0$$

Allora, è

$$E_{s_1} = E_B; E_{s_0} = 0$$

La base ortonormale sarà composta da 1 simbolo: per rappresentare questi simboli ci è infatti sufficiente un solo asse, poiché un punto rappresenta l'origine, l'altro la distanza rispetto all'origine:

$$E_B = \frac{E_{s_1} + E_{s_0}}{2} = \frac{E_B + 0}{2}, \frac{E_B}{2}$$

Quindi,

$$E_B = 2E_B.$$

Usando la solita teoria dello spazio dei simboli:

$$P\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2E_B}}{2\sqrt{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2N_0}}\right)$$

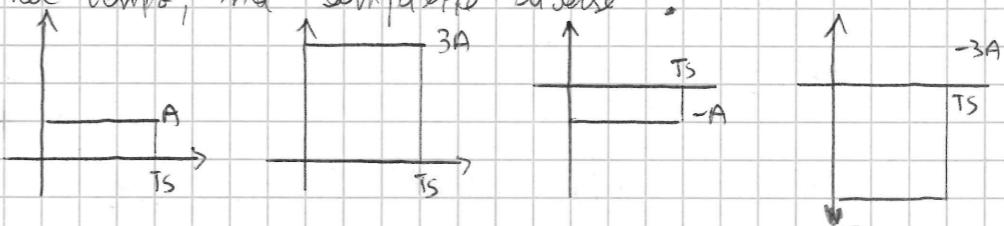
Vediamo che, rispetto alla antipodal con filtro ed alto, si ha una penalità di 3 dB: il fatto che il horizonte della

costellazione sia non nullo, ovia la media dei punti sia diversa da 0, comporta un peggioramento delle prestazioni.

Eseminiamo ora un esempio un po' diverso del solito: un sistema di trasmissione in banda base, ma multibitello.

Esempio: sistema 4-PAM in banda base

Consideriamo un sistema con 4 simboli, e la stessa forma nel tempo, ma ampiezze diverse:



Poiché la forma d'onda è sempre la stessa, e solo l'ampiezza varia, sarà sufficiente un elemento per rappresentare i simboli con una base ortonormale; essa sarà:

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \quad [\text{normalizziamo la parte di } \sqrt{T_s}]$$

Espriam in questa base, i quattro simboli si potranno esprimere così:

$$s_1(t) = A\sqrt{T_s} \hat{q}(t); s_2(t) = 3A\sqrt{T_s} \hat{q}(t);$$

$$s_3(t) = -A\sqrt{T_s} \hat{q}(t); s_4(t) = -3A\sqrt{T_s} \hat{q}(t)$$

Basterà un asse per rappresentare i 4 simboli;  $\hat{q}(t)$  le regole di divisione saranno al solito delimitate dagli avii dei segmenti congruenti i vari simboli.

Si vuol definire a questo punto, due probabilità di errore:  
una sui simboli, una sui bit ( $H=4 \rightarrow nbt = 2$ ).

Probabilità di errore sui simboli

Usando al solito il teorema della probabilità totale, si può dire che:

$$P_s\{e\} = \sum_{i=1}^H P\{x = s_i\} P\{e | x = s_i\}$$

Considerando il nostro caso, e considerando le sezioni dei 4 simboli equiprobabili,

$$P_s\{e\} = \frac{L}{4} [P\{e | x = s_1\} + P\{e | x = s_2\} + P\{e | x = s_3\} + P\{e | x = s_4\}]$$

Iniziamo a calcolare la probabilità di errore legata alla trasmissione di  $s_2$ ; il conto sarà abbastanza semplice:

$$P\{e | x = s_2\} = P\{z \notin \text{regione di } s_2 | x = s_2\} = P\{z < -2A\sqrt{T_s} | x = s_2\}$$

Poiché  $z$  è:

$$z = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{s_2 + m}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Ora la solita gaussiana a media} \\ \text{centrata in } s_2 \end{array}$$

N'può scrivere "di gesso", considerando il fatto che al num. della erfc c'è la distanza del punto da cui si vuol calcolare l'integrale della coda dalla media, e d'ora la cosa era:

$$P\{e | x = s_2\} = \frac{L}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2A\sqrt{T_s} - 3A\sqrt{T_s}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}}\right)$$

(la erfc è poi).

Si noti da subito che  $P\{e | x = s_4\}$  è uguale a questa, per le ragioni di simmetria già usate; otteniamo così già calcolato

2 probabilità di errore.

Calcoliamo ora la probabilità di errore data trasmissione di

$s_1$ :

$$P\{e | x = s_1\} = P\{z \notin \text{regione di decisione} | x = s_1\} =$$

Se fatto che non si trovi nella regione di decisione di  $s_1$  dato  $s_1$

trasmesso, implica avere entrambe le code distanti  $A\sqrt{T_s}$  dalla media:

$$P\{e | x = s_1\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{A\sqrt{T_s}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}}\right)$$

Per simmetria, la  $P\{e | x = s_3\}$  sarà uguale alla probabilità di errore appena calcolata, e dunque la probabilità di errore finale sarà:

$$P_s\{e\} = \frac{L}{2L} [2P\{e | x = s_2\} + 2P\{e | x = s_4\}] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}}\right) \right] = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2 T_s}{N_0}}\right)$$

Probabilità di errore sui bit

Introduciamo alcune definizioni: prima di tutto, si definisce l'energia media dei simboli ricevuti,  $E_s$ , come:

$$E_s \triangleq \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H E_{s,i}$$

A partire da qui, si definisce l'energia media sui bit, come:

$$E_B \triangleq \frac{E_s}{nbt}$$

Facciamo un esempio pratico, usando l'esempio del 4-PAM

$$E_s = \frac{L}{4} [A^2 T_s + 9A^2 T_s + A^2 T_s + 9A^2 T_s] = \frac{L}{4} \cdot 20 A^2 T_s = 5 A^2 T_s.$$

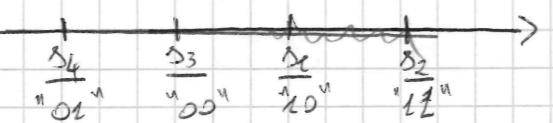
$$E_B = \frac{E_s}{n \text{bit}} = \frac{5 A^2 T_s}{2} = \frac{5}{2} A^2 T_s.$$

Con il parametro  $E_B$  la probabilità di errore sarà:

$$P_s \{e\} = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{2}{5} \frac{E_B}{N_0}} \right)$$

Iniziamo a parlare di probabilità sui bit; al fine di ottenere migliori prestazioni si utilizza una particolare codifica, detta "codifica di Gray": gruppi di bit, associati a simboli adiacenti, differiscono di un solo bit.

Ad esempio:



Questa codifica è utile perché così sbagliando a ricevere, sarà molto, molto più probabile che il segnale corretto sia adiacente a quello ricevuto, rispetto ad uno che non ha bit in comune.

Interpretato ad esempio un 01, è molto improbabile che il segnale inviato sia un 10.

Possiamo dunque dire che, usando la codifica Gray, si parla solo "sbaglio di un bit":

$$P_B \{e\} \approx \frac{P_s \{e\}}{n \text{bit}}$$

Ad esempio nel nostro caso:

$$P_B \{e\} \approx \frac{L}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{2 E_B}{5 N_0}} \right) = \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{2 E_B}{5 N_0}} \right).$$

Sai noti su questi risultati sono stati ottenuti usando la teoria dello spazio dei segnali, con il criterio della minima distanza e la codifica Gray.

Quello appena analizzato è un esempio di trasmissione multilivello, e che, confrontato con la antipodale (verso le formule), l'argomento ha un rapporto  $L: \frac{2}{5}$  (ora, la 4-PAM ha una penalità circa pari a 6 dB sulle prestazioni rispetto ad una trasmissione binaria antipodale).

Quello che però capita, è che:

$$B_{0-0} = \frac{L}{T_s} = \frac{L}{2 T_B} = \frac{B_2}{2}$$

Ora dimensioniamo la banda occupata!

Soltanmente, una penalità di 6 dB è troppo elevata, nonostante il guadagno in termini di larghezza di banda impegnata dalla trasmissione. Di solito dunque, i sistemi di trasmissione in banda base sono binari.

Vediamo, parlando di sistemi in banda traslata, che capita di usare trasmissioni multilivello.