$\rightarrow -1 < 1-2p \rightarrow p < \underset{1}{0}$

$1-2p < 1 \rightarrow p > 1$

$\rightarrow$ Vince $p < -0{,}75 \rightarrow -1 < p < -0{,}75$

Con la Moro!

Es #7 16/11/07

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \boxed{0{,}8} & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & \boxed{\frac{p}{3}} & -0{,}5 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{p}{4}} \end{bmatrix}$$

In questo caso p si cambia quanto si vuole ma comunque il sistema NON è stabile.

8/4/09

Note su esercizi

- Cerca e studia la "forma compagna".
- Se il sistema è non lineare e ho autovalore di molteplicità maggiore di 1 sul punto limite (0 per TC e 1 per TD), non si può concludere direttamente!
- Studiare stabilità libro → Routh / Jury! :-(
- Se l'ingresso è sinusoidale, ricorda: calcola frequenza e fase! (e modulo.)
- Studia formule delle sovraelongazioni; scrivere sul formulario.

CONTROLLI AUTOMATICI

6/5/09

Mandare email nel quale faccio vedere la mia mail.
E recapito telefonico (mobile)

Materiale di studio: libri (Corino l'Isidori)

Lezione!

Capitolo 1:
Il problema del controllo automatico

1.1) Terminologia e concetti preliminari.

La terminologia e la notazione sono molto importanti: per capirsi bisogna mettersi d'accordo sul significato dei termini.

Il termine "controllo" in italiano significa, ~~"[illegible]"~~, "~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~", ~~[illegible]~~ nell'uso corrente della lingua italiana, il "monitoraggio" ma non solo! Per controllare bisogna poter INTERVENIRE, poter fare qualche azione per poter modificare lo stato.

~~Dal dizionario~~: "control" è più adatto a ciò che studiamo.

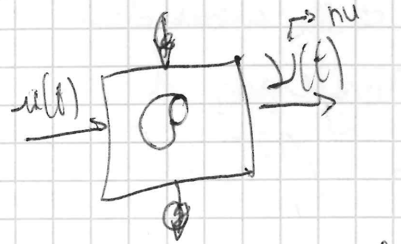
- Dizionario 1: "azione o insieme delle ~~ope~~ azioni volte a far assumere a una grandezza una certa successione di valori nel tempo." Ad esempio avendo una cisterna, di cui si vuole controllare, quindi monitorare e regolare il livello, si GUARDA e apre/chiude una valvola.
- Diz. 2: dispositivo al quale è affidato il governo del valore di una grandezza fisica. "Identifica l'azione di controllo col controllore", quindi il diz. troppo.

Dis. 3: dispositivo automatico che controlla un altro dispositivo.

Un controllore dovrà decidere quale azione deve fare su di un impianto affinché la grandezza interessata abbia un certo andamento nel tempo. Una grandezza è un'entità suscettibile di misura (ossia che può essere misurato)
Un sistema è un insieme di elementi (solitamente fisici, ma non è detto) tra loro interconnessi, di cui interessa un modello matematico. Un sistema può essere una rete elettrica, un'automobile.
Per fare un controllo su di un'auto servono modelli fini!
un esempio è un'auto che in autostrada stia dritta da sola. La prima cosa da fare è un modello dell'auto quando viaggia. Poi si progetta il controllore
Si fa in modo che il controllore INTRAPRENDA UN'AZIONE.

Cause: I^a categoria (Cause/ingresso)
Effetti: II^a categoria (effetti/uscite)

In un circuito, le "cause" son i generatori, gli "effetti" son le uscite: le varie correnti, e simili.
Si indica un sistema così:



$u(t) \in \mathbb{R}^m$
$y(t) \in \mathbb{R}^p$

Quando si fa il modello di un sistema NON SI DEVONO DIMENTICARE GLI INGRESSI: tutte le cause devono essere considerate.

Per quanto riguarda le uscite, ce ne sarà qualcuna che interesserà di più!
Il problema del controllo si pone quando si verificano queste condizioni:

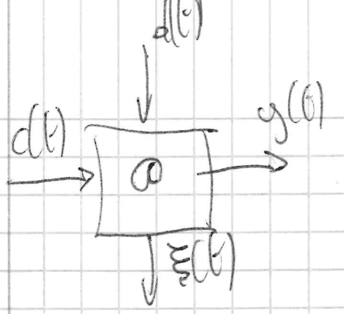
A) Esistono uscite primarie, ossia è richiesto un certo andamento nel tempo di alcune y. Queste sono dette "primarie".
In un regolatore, l'uscita primaria è la tensione sul carico, ossia la tensione regolata. "y(t)"
~~Vi~~ Se vogliamo che determinate grandezze facciano determinate cose

B) Esistono disturbi: alcune grandezze appartenenti all'insieme degli ingressi, su cui nessun operatore può ~~[illegible]~~ agire, che influiscono sull'insieme delle uscite ~~[illegible]~~ primarie. "d(t)"
In un regolatore, non si sa quale sia il carico! La corrente di carico è un disturbo. Un buon regolatore deve essere progettato in modo da regolare il carico.
NOTA: la corrente in uscita è un disturbo, ma quindi è un <u>INGRESSO!</u>

C) Comandi, "c(t)": appartengono alle cause, all'insieme degli ingressi: sono ingressi su cui si può agire ad arbitrio, e influiscono sulle uscite primarie.

I disturbi appartengono all'insieme degli ingressi, su cui l'operatore NON PUÒ AGIRE. Sui comandi NON SI PUÒ AGIRE.

D) Uscite secondarie: appartengono agli insiemi delle uscite, ma non desideriamo che abbiano particolari andamenti nel tempo. $\xi(t)$



La corrente di carico è un ingresso (disturbo), USCITA PRIMARIA POICHÉ CAMBIA ~~la~~ ~~[illegible]~~

1,2) Formulazione del problema del controllo automatico

Bisogna dare una formulazione concettuale, cercando di capire quale sia l'obiettivo del controllo.

Indichiamo con yd(t) un'uscita primaria DESIDERATA. y(t) è l'uscita primaria effettiva.

Nel regolatore, l'uscita primaria desiderata, quella CHE VORREI, ASTRATTA, è una costante. Questa non è reale, è teorica, è quella che vorrei. yd(t) teorica, y(t) MISURABILE.

Definiamo l'errore sull'uscita come:

$$e^y(t) = y(t) - y_d(t)$$

Problema del controllo

A MO' DI ELENCO

Dato $\mathcal{P}$, dato l'andamento di yd(t), dati dei limiti ammissibili sull'errore di uscita, e^y, ad esempio $|e^y| < \rho_t$ $\forall t$; date tutte le informazioni possibili sui disturbi d(t) (caratterizzati statisticamente, o puntualmente mediante misure; si noti che un misuratore COSTA, quindi meglio la statistica); date le misure delle uscite primarie y(t) (fondamentale! dobbiamo poter misurare l'uscita primaria!); date (eventualmente) le misure delle ξ(t) (uscite secondarie) (ciò non è tassativo!)

↓

Decidere l'andamento da imporre al comando c(t) affinché i limiti sull'errore $e^y(t)$ non siano superati.

Il problema del controllo automatico

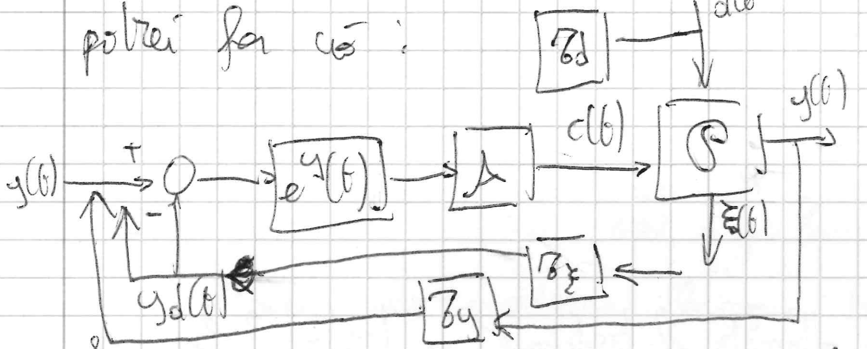
Con riferimento a ciò che si è detto, ~~[illegible]~~ è progettare un dispositivo in grado di fornire gli andamenti richiesti per i comandi c(t) in completa assenza di operatori umani.

Nota: nel controllo, può esserci un operatore umano, nel controllo automatico no!

1,3) Una struttura generale di controllo automatico

Partendo dagli elementi visti finora, siamo in grado di disegnare una struttura generale di controllo automatica.

Dato un yd(t) desiderato, un "riferimento", e la y(t), potrei far ciò:



Supponiamo che si vogliano <u>misurare</u> i disturbi, con un trasduttore τ_d. L'uscita primaria viene trasdotta misurata mediante τ_y; idem le ξ con τ_ξ.

Chi è che "decide"? Serve un'unità intelligente, un elaboratore che tenga conto di tutte queste informazioni! Si usa un attuatore, amplificatore A

Questa è la struttura generale di un controllo automatico, cioè un controllo con retroazione.

Si parla di controllo con retroazione perché VIENE MISURATA l'uscita <u>primaria</u>.

Si parla di controllo in catena aperta quando non esistono né z_w né z_y. Di solito non si mette z_d, anche se è possibile, e in tal caso si parla di compensazione diretta dei disturbi.
Se in presenza di disturbi gli andamenti desiderati delle uscite [illegible] sono costanti nel tempo, anziché di controllo si parla di "regolatore".

1.4) Esempi

// Camere LUMIX su sito Panasonic, ci son due o tre filmati che fan vedere lo stabilizzatore di immagine. Questo risolve il problema della mano non troppo ferma, con tempi alti di ripresa. //

1) Un tostapane: l'uscita primaria è il grado di DORATURA del pane. Questo sistema è con retroazione o senza? Beh, mica si può misurare il grado di doratura! Quindi, è senza retroazione!
Per quanto tempo lascio attaccato il tostapane a tostare? Su che base si progetta la legge di controllo? Sull'esperienza!
A seconda di come sono abituato, metterò per più o meno tempo a tostare!
I sistemi di controllo a catena aperta funzionano a ESPERIENZA, sulla base dell'esperienza dell'uomo!
Il grado di umidità del pane è un disturbo: a seconda di ciò il pane cuocerà prima o dopo.
Altro disturbo è il tempo di vita del tostapane!

Cerca di capire quali sono i disturbi, i comandi, le uscite desiderate, quelle effettive!

Altro esempio: fontana di via romana: un galleggiante fa mantenere alto o basso il livello dell'acqua.
Idem: lo sciacquone dell'acqua! È un sistema di regolazione meccanico-idraulico!
2) Livello dell'acqua in un serbatoio. L'uscita primaria è il livello, il comando è la posizione della valvola, l'utenza è un disturbo!
3 strategie:
a) Regolazione con operatore umano: l'operatore vede il livello e interviene!
b) Regolare con un sistema tipo galleggiante! È un sistema di controllo meccanico automatico!
c) Misuro l'utenza, e agisco sulla valvola di conseguenza! Compensazione diretta del disturbo!
Se ci son altri disturbi, si perdono le grandezze!
Per controllare una grandezza, bisogna MISURARLA!
Il serbatoio può essere controllato a catena aperta, ma dal momento che l'utenza cambia, il controllo NON VA! L'esperienza non basta!

7/5/09

Capitolo 2: rappresentazioni e proprietà dei sistemi dinamici

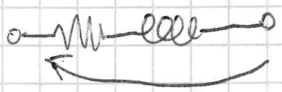
Questo capitolo contiene richiami da teoria dei sistemi, ma si tratta di concetti molto importanti che è necessario ricordare.

Introduzione (non trattata)

Abbiamo già visto che esiste una realtà fisica che può interessare (sistemi elettrici, meccanici, termici ...), e si pone il problema della rappresentazione matematica, della modellistica.
Abbiamo visto come scrivere dei modelli semplici in termini di equazioni differenziali. Talvolta i modelli sono statici, quindi le eq. algebriche.
La legge di Newton ha dei limiti di applicabilità, ma facciamo in modo che non ci tocchino ad esso.
Di una realtà fisica si può fare un modello fine o uno scarnato.
Il grado di accuratezza può essere alto (modello fine) o può essere approssimato.
Si fa una stima parametrica.
Dove deve arrivare il grado di accuratezza del modello? Dipende dall'uso che dobbiamo farne.
Consideriamo il modello di un resistore: la legge di Ohm

$v = Ri$

Voglio usarli per vari ~~es~~ scopi: regolatore di tensione, amplificatore audio, radiofrequenza? Beh, $v=Ri$ vale in CONTINUA; a radiofrequenza è diverso: effetti induttivi o capacitivi spuntano fuori a radiofrequenza.
Ad esempio:



$v = (R+sL)i$ Idem con capacità!

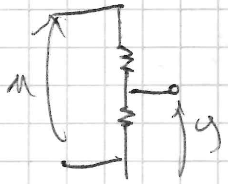
Quale modello uso del resistore? Beh, dipende dall'uso che devo farne, ad esempio dalla frequenza di lavoro!

Un modello troppo complicato e fine solitamente è inutile: per la continua, ad esempio, ha senso usare $v=Ri$, non importa a ~~sse~~ considerare effetti induttivi/capacitivi.

Più un modello è fine, più ampio è il suo range di applicazioni!
Con simulink è facile perché i conti te li fa lui! :-)

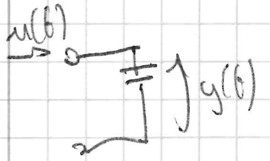
2,1) Terminologia e concetti preliminari

Abbiamo imparato a distinguere in precedenza sistemi a T.C. e a T.D. per le variabili temporali (T.C. → $t \in \mathbb{R}$, T.D → $k \in \mathbb{N}$)
È possibile discretizzare problemi continui (ad ex. il campionamento); esistono sistemi misti! (parte a T.C., parte a T.D).
Nel laboratorio ad esempio il controllore era DIGITALE! Ragionava a tempo CONTINUO! Un processore effettuava il controllo, a tempo discreto.
Ci sono sistemi con o senza memoria (differenziali o algebrici)
Esempio:



$y = u \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$ Questo è un sistema STATICO

Esempio:



$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(t)\, dt$

- Causalità: un sistema è causale se l'uscita dipende da tempi passati o presenti, NON da tempi futuri.

Ciò è importante perché a volte in sede di progetto si tende a ottenere un sistema $\overset{\text{NON}}{\vee}$CAUSALE, cosa non fisicamente realizzabile.

- Stazionarietà: se le caratteristiche del sistema sono costanti al trascorrere del tempo il sistema è costante.

Un sistema elettronico ad esempio INVECCHIA NEL TEMPO, e cambia le modalità di funzionamento. Si noti che però, se intendiamo osservare la proprietà su tempi relativamente brevi, si può avere una sorta di locale stazionarietà.

- Linearità: il mondo reale è non lineare! Quasi sempre si usano modelli non lineari. Le tecniche di analisi e progetto sono semplici sui sistemi lineari, quindi quello che si fa è descrivere, mediante ad ex. la linearizzazione, un sistema N.L. come lineare.

Si stanno introducendo tecniche di progetto per sistemi non lineari, a seconda della non-linearità del sistema.
Vale la linearità se e solo se è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti.

2.2) Rappresentazione di sistemi dinamici mediante relazioni ingresso-stato-uscita

È possibile dare una rappresentazione del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x;u) \\ y = g(x;u) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m \quad y \in \mathbb{R}^p$$

Per sistemi non lineari e tempo invarianti.
Si può poi linearizzare ciò, e trovare una rappresentazione lineare.
Nella rappresentazione lineare, invece:

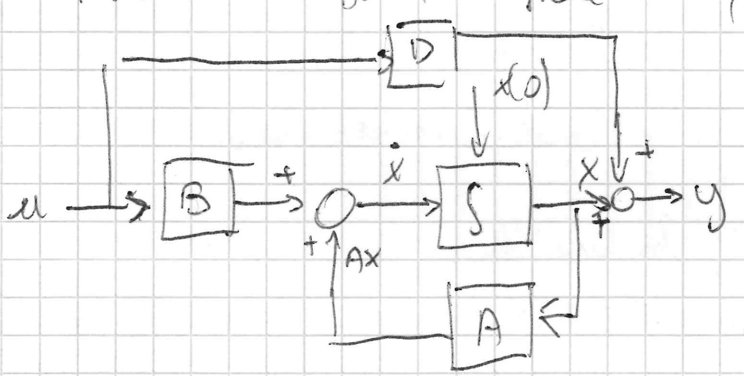
$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$

L'esercizio che si vuol fare è dare una rappresentazione del sistema grafica, mediante schemi a blocchi.
Per simulare il comportamento dei sistemi useremo Simulink, che consente di rappresentare un sistema mediante schemi a blocchi.
Consideriamo:

$\dot{x} = Ax+Bu$

$y = Cx+Du$

Si parte dall'ingresso, segnale "u";



Ci si pone la domanda: che fa "u"? Viene moltiplicato per B; esso finisce in un nodo di somma, in cui arriva un altro segnale, Ax. Dato $\dot{x}$, devo integrare, avendo anche le condizioni iniziali. A partire da ciò, avrò x. Moltiplicando per A, ottengo Ax MOLTIPLICARE → APPLICARE OPERATORE A.
Questa è una rappresentazione grafica delle eq. di stato; moltiplicando u per D, ottengo y.

Passaggio successivo: trasformiamo in Laplace le eq.:

$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$
$Y(s) = CX(s) + DU(s)$

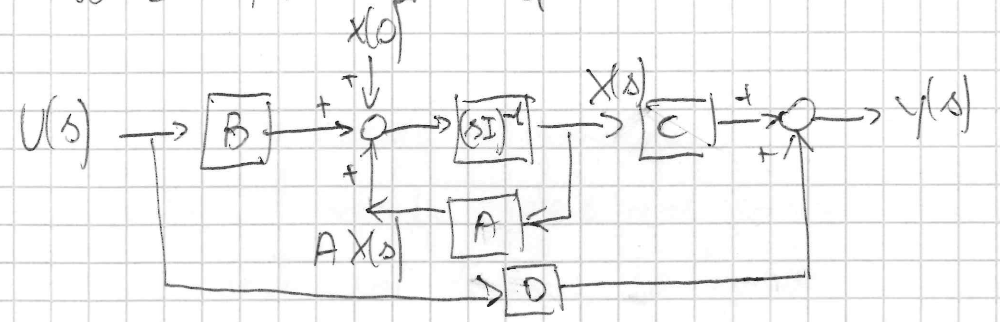
$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$

$\to X(s) \ldots$

Volendo evitare di isolare $X(s)$, perché allora c'è da fare con vettori, usiamo:

$(sI)\,X(s) = BU(s) \to X(s) = (sI)^{-1}\{AX(s) + BU(s) + x(0)\}$

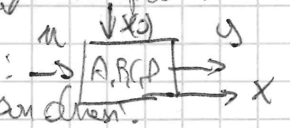
Proviamo a rifare il disegno:



Trattando così l'equazione, la differenza è nulla: $(sI)^{-1}$ è la trasformata di Laplace di un integratore n-dimensionale

Simulink ha diversi blocchi; ha un blocco che, definite A, B, C, D, in Matlab, Simulink recupera l'ambiente. Il blocco, definite ste matrici, a fronte di un particolare ingresso, può simulare il sistema. Nella fattispecie si può:

1) Simulare con un blocco:



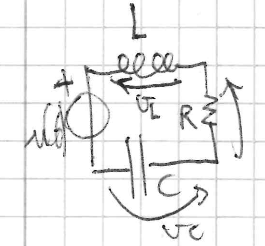
nota! scalari e vettori sono diversi.

2) Simulare disegnando uno dei due schemi a blocchi proposti.
Di solito usiamo il II°, perché di solito si usa, in matlab, la variabile complessa "s": si utilizza una descrizione in termini di funzione di trasferimento.

Schema a blocchi "esploso", "espanso".
Che senso ha disegnare lo schema a blocchi espanso? Beh, se l'obiettivo è trovare x e y, conviene usare il blocco. Però l'altro modo di ragionare serve quando devo recuperare tutte le variabili che mi interessano, dunque è FONDAMENTALE questo modo di procedere.

3) "Esplosissimo": Schema a blocchi dettagliato
(*)

2,3) Esempio "al limite" della decenza. Come var. di stato usiamo i_L e v_C.



$v_L = L\frac{di_L}{dt}$; $i_C = C\frac{di_C}{dt}$; $v_R = R\cdot i$;

$u(t) = V_L + V_R + V_C \longrightarrow u(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + v_C$

$\to x_1 = v_C$; $x_2 = i_L$;

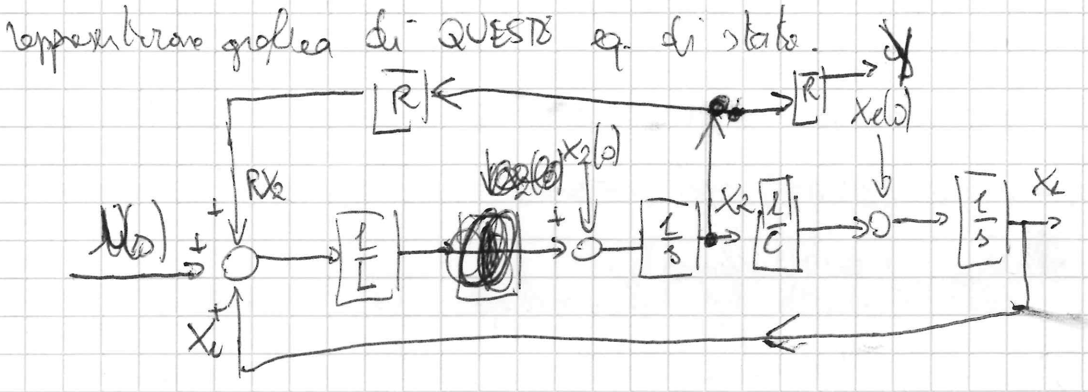
eq. di stato

$$\to \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C}x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L}\{-x_1 - Rx_2 + u\} \\ y = Rx_2 \end{cases}$$

Da qua si ricavano A, B, C, D, e si fanno le simulazioni.

③

Cosa si fa per l'esplosissimo? Beh, vediamo: vogliamo dare una rappresentazione grafica di QUESTE eq. di stato.



(*) Si noti che nei rettangoli ci son COEFFICIENTI SCALARI: ora NOI gestiamo l'integrazione di tutte le var di stato e quelle del sistema, UNA A UNA.
Dunque proviamo lo schema a blocchi dettagliato.

Un risultato che potrebbe interessarci è la funzione di trasferimento.
Come si può fare?

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det\{sI-A\}} \text{Adj}\{sI-A\} \qquad (*)$$

1) So che $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$, e calcolo con matlab
2) Guardo lo schema a blocchi "3", cerco di "semplificarlo" con l'algebra degli schemi a blocchi e [illegible].

Il II° metodo permette di ottenere risultati per sistemi comunque complessi!

2,4) Il movimento dello stato e dell'uscita nei sistemi LTI

Si possono usare sostanzialmente due cose:

1) Usare la formula di Lagrange, approccio molto sfruttato nei corsi di Analisi. Di fatto sono esempi di eq. differenziali del I° ordine!

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

t_0: tempo di accensione del sistema

Questo dati gli parametri di stato A e B, la "matrice di transizione" A, $x(t_0)$ e t_0.

2) Uso della trasformata di Laplace: dato il sistema di partenza lo si trasforma con Laplace; nel dominio s ottengo fatte equazioni di tipo algebrico, e antitrasformo.

Se si pone il problema di conoscere il movimento dello stato e dell'uscita, come strada da seguire

2,5) Brevi richiami di algebra lineare

Ricordiamo alcune cose importanti

Data la rappresentazione ingresso-stato-uscita,

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

Si ricorda che il determinante di $(sI-A)$ è un polinomio di grado n monico, ossia il coeff. della potenza di grado più alto è 1.

$\det\{sI-A\}=0$ ammette soluzioni in $\mathbb{C}$, eventualmente non distinte.

La matrice $(sI-A)$ è detta "matrice caratteristica"; $\det\{sI-A\}$ è detto "polinomio caratteristico". Le radici del pol. caratteristico di A sono dette "autovalori".

$d(s) = \det\{sI-A\}$ è detto "polinomio caratteristico".

$d(s)$ si può fattorizzare:

$d(s) = (s-s_1)^{n_1} \cdot (s-s_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (s-s_r)^{n_r}$

Dove $n_1+n_2+\ldots+n_r = n$ = numero degli stati del sistema!

$(sI-A)$ è una matrice; $(sI-A)^{-1}$ è un'altra matrice; sotto c'è (*) un polinomio, sopra una matrice con numeratori di grado al più "n-1". Sono funzioni razionali, strettamente proprie.

Altra osservazione: può capitare che gli elementi della matrice aggiunta abbiano una o più radici in comune con il polinomio caratteristico:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{Q(s)\cancel{\gamma(s)}}{\cancel{\gamma(s)}M(s)}$$

è possibile che, a causa di radici $\gamma(s)$ in comune, può capitare che vi siano delle cancellazioni zeri poli!

In tal caso, il polinomio caratteristico è detto "polinomio minimo". Ciò che resta del den. dopo la semplificazione!

esempio

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (sI-A) = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)(s-2)} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \longrightarrow = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}$$

Ci son state delle cancellazioni!
Ciò che resta è il polinomio minimo! Invece che $(s-2)^2$, $(s-2)$!

A che serve tutto ciò? Vediamo un po'

26) La stabilità ~~esterna~~ interna.
Si parla della stabilità definita sul MOVIMENTO LIBERO dello stato:
- Un sistema LTI è stabile (internamente) se e solo se il movimento LIBERO dello stato è limitato. È asintoticamente stabile se e solo se il movimento libero dello stato tende a zero per $t \to \infty$.
- È instabile se e solo se il movimento libero dello stato NON è limitato.

Da un punto di vista pratico dobbiamo guardare gli autovalori!
- $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad \forall i$, STABILE ASINTOTICAMENTE.
- È semplicemente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale non positiva e quelli con parte reale nulla siano radici semplici del polinomio <u>minimo</u>
- Instabile se esiste almeno un autovalore di A con parte reale positiva, o a parte reale nulla radice <u>NON</u> semplice del polinomio <u>minimo</u>

LA MOLTEPLICITÀ VA GUARDATA NEL POLINOMIO <u>MINIMO</u>

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2(s+5)} \begin{bmatrix} (s+5)s & 0 & 0 \\ 0 & (s+5)s & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix} \to$$

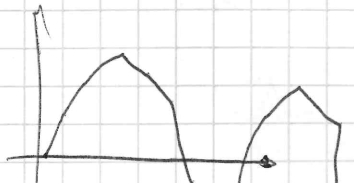
(*) Nota: c'entra la molteplicità geometrica!

$$= \frac{1}{s(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0 & 0 \\ 0 & s+5 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

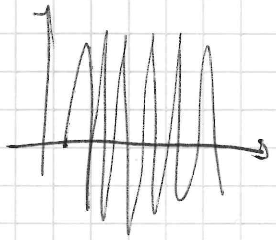
Il sistema NON è instabile, poiché vi è una cancellazione tale da avere il polinomio MINIMO diverso da quello caratteristico. Il sistema È SEMPLICEMENTE STABILE!

2,7) Scelta dei parametri di simulazione in Simulink.
Cosa succede? Il compito d'esame è un controllore che va simulato, in modo da documentare le prestazioni. Fondamentale è scegliere i parametri di simulazione di Simulink! Ci sono opzioni standard, che van MODIFICATE.
Principi
Parametri di simulazione: passo di integrazione, scegliere quale routine usare (Runge-Kutta piuttosto che altro), tempo di simulazione, e altri parametri che dipendono da due cose:
1) Dal sistema che si vuol simulare
2) Dal tipo di SEGNALE in gioco.

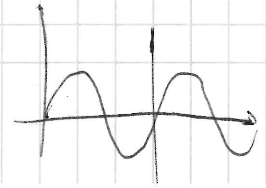
Quando esegue un disturbo sinusoidale ad ω, si può avere una cosa del genere:



o



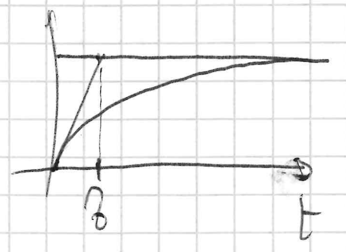
Quando si vorrebbe una cosa del genere:



Nel I° disegno il passo di integrazione è troppo grosso; a seconda della routine il passo di integrazione può essere fisso o cambiabile. Scelto bello un periodo tale da avere una ventina, cinquantina, centinaio di punti per sinusoide: il passo di integrazione deve essere $\frac{T}{n}$, n numero di punti per sinusoide! Si divide per il periodo!

Altro: il II°: la durata di simulazione è molto lunga! Bisogna ridurre il tempo di simulazione a 3 o 4 periodi della sinusoide!

Altra cosa importante: costanti di tempo del sistema! Dato un sistema semplice, con un solo polo, se metto in ingresso un segnale a gradino e il sistema è stabile, l'uscita sarà un esponenziale:



$$\tau = \frac{1}{|Re\{\lambda_i\}|}$$

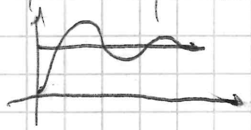
Dato $H(s) = \frac{1}{s+p}$, $p > 0$, $\tau = \frac{1}{p}$

Buona cosa è: in 5τ, prendere un centinaio di punti!

E se il sistema fosse del II° ordine? (a poli complessi)

$$H(s) = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\xi\omega_m s + \omega_m^2}$$

Che criteri si usano? Beh, possiamo usare τ (per quanto la τ si definisca solo a POLI REALI), ma anche guardare la ω_n delle radici complesse, e quella sarà la pulsazione naturale del sistema.



Ossia la "frequenza", il "passo", delle oscillazioni.

Esercitazione di laboratorio!

Introduzione!

Il problema di lab è il I°.

Dobbiamo SIMULARE: date le eq. di stato scrivere uno schema a blocchi. Partendo da lì scrivere lo schema a blocchi, proviamo con la simulazione e test.

Obiettivi: SCRITTURA DI SCHEMI A BLOCCHI DA eq. DI STATO E SIMULAZIONE

Passi:

1) Lanciare MATLAB
2) Sull'icona si scrive "Simulink". Lo lanciamo
3) Simulink ha un "library browser". File, nuovo modello, e via. Gli si dà un nome. Sotto la libreria si possono prendere diversi tipi di blocchi: Integratori, derivatori, e via. Ci si clicca sopra e si trascina. Idem coi collegamenti!
I parametri di simulazione sono sotto "simulation".
Tra i metodi di integrazione ci son le varie "ode".
Selezioniamo step-size e simili, NON auto.

Come metodo di integrazione si usa? Conviene quello per sistemi "stiff", per sistemi con costanti di tempo molto diverse quindi o ode15s e 23s

13/05/2009

Commenti su scorsa settimana: laboratori

Orario consulenza: giovedì, ore 12:30 ÷ 14:30

2,8) Rappresentazioni di sistemi dinamici mediante relazioni ingresso-uscita: funzione di trasferimento

La scorsa settimana abbiamo visto il modello in variabili di stato; ora parliamo di fdt

Iniziamo con la definizione: matrice di trasferimento

Def: matrice di trasferimento: ~~matrice i cui elementi~~ la matrice di trasferimento di un sistema LTI definito dalle matrici (A, B, C, D) è la trasformata di Laplace (L-trasformata) della matrice H(t) delle risposte all'impulso.

Teorema: la matrice di trasferimento H(s) di un sistema LTI (A, B, C, D) è data da

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

Questa si ricava partendo dalle eq. in var. di stato, trasformando secondo Laplace e mettendo in evidenza il movimento libero dello stato e dell'uscita e il movimento forzato di stato e uscita.

Per trovare H(s) si considera il solo movimento forzato dell'uscita, eccitando il sistema con un impulso, la cui trasformata è 1.

Facciamo alcune osservazioni su $(sI-A)^{-1}$: se intanto D=0 la funzione razionale fratta è strettamente propria; in generale, dato un elemento $H_{ij}(s)$ la forma:

$$H_{ij}(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$b_n = 0$ in sistemi propri!

(*) intendo per H(s) da qui la fdt

La differenza di grado tra den e num è detta "grado relativo".

Zeri e poli di una fdt: - zeri: $s = z_i$ è uno zero di $H_{ij}(s)$ se $H_{ij}(z_i) = 0$

Quindi, uno zero è un valore della variabile complessa s in cui la funzione di trasferimento va a zero.

- Poli: $s = p_j$ è un polo di $H(s)^{(*)} \iff H(p_j) = \infty$, ossia i valori per cui diverge.

Esempio:

$$H(s) \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{2(s^3+3s^2-s-3)}{(s-1)(s+2)(s+1)3}$$

"s = -2" è un polo? Beh, bisogna guardare il fatto che non si abbiano cancellazioni zeri-poli: solo se non ci sono cancellazioni il polo. Si sostituisce "-2" nel num e si vede che funziona. Nel caso di s=+1, capita che essa annulla sia num sia den, dunque NON È UN POLO, perché vi è la cancellazione.

Se per $s \to \infty$ la funzione tende a "0", si vuol dire che la funzione abbia degli zeri all'infinito. Ciò capita se la funzione è strettamente propria. "Zero" all'infinito! ↑

La fdt rappresenta un sistema dinamico mediante una relazione ingresso-uscita. Qua lo stato non entra: le condizioni iniziali si considerano nulle.

2.9) La stabilità esterna nei sistemi LTI

Avevamo parlato di stabilità interna, ossia la stabilità del movimento libero dello stato. Non è l'unica definizione di stabilità: esiste anche la stabilità esterna o "BIBO-stabilità (Bounded Input Bounded Output).

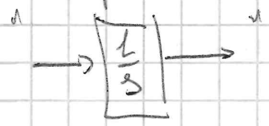
Consideriamo la seguente definizione di stabilità esterna:

Def: Stabilità esterna

Un sistema LTI (A,B,C,D), si dice "stabile esternamente" se il movimento forzato dell'uscita rimane limitato in presenza di tutti i possibili ingressi limitati

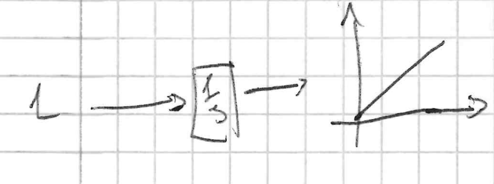
Possiamo usare questa definizione per provare la stab. esterna? No! Mica possiamo testare tutti i possibili ingressi! Però, se troviamo un ingresso limitato che faccia divergere il sistema, allora il sistema è instabile.

Esempio: dato un sistema del tipo:

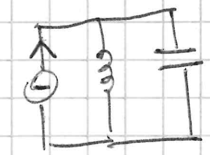


(un integratore)

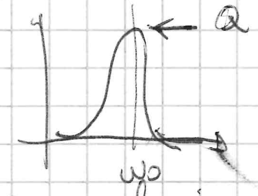
Il sistema è stabile o instabile? Beh, se mettiamo una costante in ingresso, l'uscita è l'integrale della costante, ossia una retta, che è ILLIMITATA!



Consideriamo il seguente circuito



Questo sistema è esternamente stabile o instabile? Beh, il risonatore REALE ha una curva del tipo:



Ma se il risonatore è ideale, il Q è infinito; usando come ingresso una sinusoide a pulsazione ω0, l'uscita sarà non limitata! Quindi, l'uscita andrà a ∞!

Alcuni risultati (non dimostrati): un sistema LTI (A,B,C,D) è stabile esternamente se e solo se la sua parte raggiungibile e osservabile è asintoticamente stabile, cioè se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa.

Teorema: una rappresentazione LTI (A,B,C,D) è stabile esternamente se e solo se tutti i poli della fdt $H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ hanno parte reale negativa

Nel caso dell'integratore, $\frac{1}{s}$; $s=0$ è il polo, quindi NO BUONO: instabile!

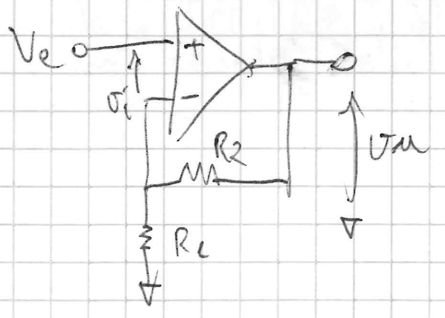
Nel caso del risonatore:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{sL}{1+sL^2C}$$ → uno zero nell'origine. Questa funzione ha anche un polo POSITIVO, $s=+\frac{1}{\sqrt{LC}}$, dunque si ha un sistema INSTABILE.

Stabilità asintotica interna implica stabilità esterna; l'insieme dei poli e quello degli autovalori NON COINCIDE: possono esserci cancellazioni zeri-poli. Perché le due coincidano il sistema deve essere completamente raggiungibile e osservabile.

Esempio

Dato un op-amp in questa configurazione:

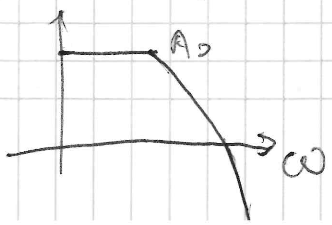


→ Ampli non invertente

Se il guadagno dell'operazionale è molto alto, il guadagno in catena chiusa è circa:

$$\frac{v_u}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Questo oggetto è stabile? Beh, questo non è così un sistema dinamico: sembra che il guadagno sia sempre così, per tutte le frequenze. Ciò non è vero: il modello da noi usato è di pura approssimazione! Un circuito calcolato per lavorare in banda audio è già diverso, a radiofrequenza peggio ancora!
Il fatto che $A \to \infty$ è un'ipotesi molto approssimata: sui datasheet danno tra gli altri parametri il comportamento in frequenza di $|A|$:

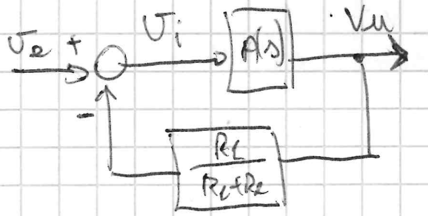


Bisogna stare attenti ai limiti di validità dell'ipotesi: A_0 potrebbe essere pari a 10^5, 10^6, 10^7, ma solo per una banda abbastanza ristretta, con un polo verso i 10 Hz, l'altro intorno al MHz. Possiamo dire che la funzione di trasferimento del sistema in catena aperta, $A(s)$, vale:

$$A(s) = \frac{A_0}{\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)}$$

"bg inspection"

Un legame ingresso-uscita più "serio" potrebbe essere questo:



Ora vediamo come fare v_i; v_u si calcola con $v_i \cdot A(s)$

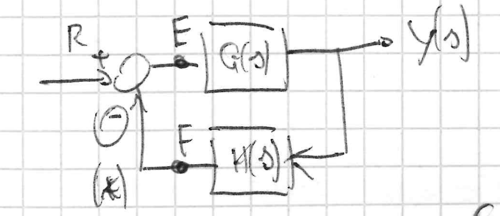
$v_i = V^+ - V^-$; $V^+ = V_e$; $V^- = V_u \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$;

$\underline{v_u = A(s)\, v_i}$

Dunque, $H(s)$ è:

$$H(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} =$$

Regoletta che poi vedremo: se abbiamo IN GENERALE una cosa del tipo:



Un risultato semplice dice che la funzione di trasferimento risultante è

$$G_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

Funz. trasferimento sul "ramo diretto" tra ingresso e uscita, e "±" a seconda del segno su (*), e poi la "funzione di anello", Cerca ieee articolo Rosenstark

Si prende lo schema da E a F.
↓
Ovvero ciò che sta dopo "E" e prima di "F". In questo caso,

$G_a(s) = G(s)\,H(s)$

Nel NOSTRO caso,

$$H(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{A(s)}{1+A(s)\frac{R_1}{R_1+R_2}}$$

Nota: se $A(s) \rightarrow \infty$ si ritrova $\frac{R_2}{R_1}+1$

Cosa posso dire sulla stabilità esterna? Vediamo un po': sostituendo lì dentro $A(s)$, trovo dei polinomi di ordine non superiore al secondo, a occhio: al più, polinomi di grado 2 a coefficienti positivi. Si può usare la regola di Cartesio per dire che la parte reale è sempre negativa (Cond. nec. e suff. per polinomi di II° grado.

Questo sistema qui è stabile esternamente.

2.10) Forme e parametri della fdt

2.10.1) Forme Rapporto di polinomi

Consideriamo la forma "rapporto di polinomi":

$$H(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Alcune osservazioni: un sistema è in forma "minima" se esso è completamente raggiungibile e osservabile. Altro modo di dirlo è il fatto che gli insiemi di poli e autovalori coincidono.

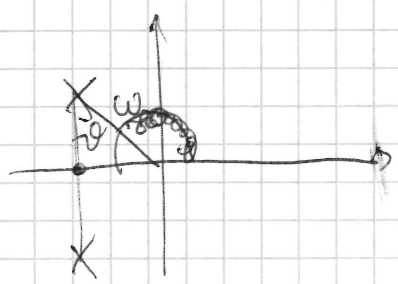
s^r: possono esserci anche dei poli nell'origine.

Data una fdt, allora si immagina che il sistema sia in forma minima.

Fattorizzazione zeri-poli

$$H(s) = K_\infty \frac{\prod_i (s-z_i)\prod_j (s^2+2\xi_j\omega_{nj}s+\omega_{nj}^2)}{\prod_K (s-p_K)\prod_l (s^2+2\xi_l\omega_{nl}s+\omega_{nl}^2)}$$

Dove sul piano complesso:



Caratterizzo con ω_n (lunghezza del vettore) e θ, dove lo smorzamento dei poli è $\xi = \cos(\theta)$

Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$H(s) = K_{st}\frac{\prod_i\left(1-\frac{s}{z_i}\right)\prod_j\left(1+2\xi_j\frac{s}{\omega_j}+\frac{s^2}{\omega_{nj}^2}\right)}{s^r\prod_k\left(1-\frac{s}{p_K}\right)\prod_l\left(1+2\xi_l\frac{s}{\omega_{nl}}+\frac{s^2}{\omega_{nl}^2}\right)}$$

stazionario

Per radici reali con parte reale negativa le costanti di tempo sono:

$\tau_i = -\frac{1}{z_i}$; $\tau_i = -\frac{1}{p_K}$

In linea di principio si parla per costanti di tempo relative a poli e zeri reali con parti reali negative.

La cosa importante è così: NON USARE FORME MISTE: solo 1 di queste 3.

Esempio

Buona cosa è saper passare da una forma all'altra

$$H(s) = \frac{10s^4 + 200s^3 + 1400s^2 + 6000s + 3860}{s^6 + 16s^5 + 86s^4 + 176s^3 + 105s^2}$$

Questa è la forma rapporto di polinomi. Volendo passare alla zeri-poli, calcoliamo le radici e poli.

Avremo: (con MATLAB)

$$10\frac{(s+2)(s+4)(s+6)(s+8)}{s^2(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)} \rightarrow \text{fatt. zeri-poli: raccolgo } \omega_i?!$$

e ho le costanti di tempo!

$$\rightarrow 10 \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{1 \times 3 \times 5 \times 7} \cdot \frac{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{4}\right)\left(1+\frac{s}{6}\right)\left(1+\frac{s}{8}\right)}{s^2(1+s)\left(1+\frac{s}{3}\right)\left(1+\frac{s}{5}\right)\left(1+\frac{s}{7}\right)}$$

PROVARE CON MATLAB

Vedremo che quando si vuole ottenere una rappresentazione in frequenza è preferibile o obbligatorio usare questa forma (per i d. di Bode).

2.10.2: Guadagno Stazionario

Il guadagno stazionario è qualcosa che meritava grazie, e vogliamo chiarire alcuni concetti riguardo esso

Facciamo una specie di esperimento: data la fdt nella forma "costanti di tempo", questo sistema deve essere BIBO-stabile. (Il sistema NON deve avere poli in zero)

L'esperimento è, dato H(s) stabile esternamente, è valutare Y(s) con

$$U(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

un U(s) a gradino. Dato un ingresso illimitato, l'uscita sarà limitata. Dato un gradino di uscita $\bar{u}$, tolto un transitorio iniziale, l'uscita dovrà essere limitata su un certo valore $\bar{y}$. Vogliamo calcolare questo valore

$$Y(s) = H(s)\,U(s)$$

Ci chiediamo: si può usare una proprietà della Laplace, cioè il teorema del valore finale? Beh, essendo il sistema esternamente stabile, tenendo conto che il teorema del valore finale dice che

$$\bar{y} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s)$$

Questo risultato si può usare se il limite esiste, e ciò se il sistema è esternamente stabile!

$$\rightarrow \lim_{s\to 0} s H(s)\,U(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot H(s) \cdot \frac{\bar{u}}{\cancel{s}} = \bar{u}\,H(s) = K_{staz} \cdot \bar{u}$$

Questo risultato dice che, in regime permanente (steady state), il regime permanente è pari al guadagno stazionario:

$$K_{st} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

Questo è il significato fisico del guadagno stazionario.

Ci sono casi interessanti in cui ci sono poli nell'origine. Si definisce un guadagno stazionario generalizzato, dove si darà un diverso significato fisico.

Per $\nu = 0$ (numero di poli nell'origine), il guadagno stazionario, che per motivi storici si indica con K_p $= K_{st}$ (p per POSIZIONE)

$$= \lim_{s\to 0} H(s)$$

Per $\nu = 1$, si può definire il guadagno stazionario di velocità,

$K_V = \lim_{s \to 0} sH(s)$ (costante di velocità)

Per $\nu = 2$, $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 H(s)$

K di accelerazione

2.10.3) Puntualizzazione sull'uso dei teoremi della L-trasformata.

Quando si usano degli strumenti, questi hanno limiti di validità. Vediamo di conoscerli! :-)

Dato un sistema con un certo ingresso, vogliamo calcolare l'uscita a regime permanente:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s) \qquad H(s) = \frac{1}{1-s} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

La domanda è: voglio calcolare $\bar{y}$? Quanto vale?

Beh, $\bar{y} = \lim_{t \to \infty} y(t)$

NO! Poiché il sistema ha un polo a destra, il sistema non ha $\bar{y}$!

3) La risposta in frequenza di sistemi LTI

Gli scopi della risposta in frequenza.

Cosa vogliamo fare? Vogliamo studiare il comportamento di un sistema LTI in presenza di una particolare classe di ingressi: gli ingressi sinusoidali. Cosa troviamo? Cosa "guadagniamo"?

La prima obiezione potrebbe essere: perché studiare un sistema con un particolare ingresso? Ciò non è limitante: dal momento che il sistema è lineare vale la sovrapposizione degli effetti!

Ciò significa che dato un segnale, somma di vari segnali, posso pensare di dare in ingresso la somma di segnali, in uscita poter sommare la somma di diverse uscite. Esistono classi di segnali che possono essere sviluppati in serie di Fourier! Allora il comportamento del sistema LTI sarà quello! Per questo, questo problema ha senso!

Ciò che si vuol mettere in evidenza è un risultato molto importante.

3.1) Esistenza di una uscita sinusoidale

Teorema: risposta alla sinusoide in un sistema dinamico LTI

Si supponga che il sistema (A, B, C, D) con fdt $H(s)$, non abbia autovalori in $\pm j\omega_0$ e si applichi l'ingresso $\tilde{u}(t)$:

$\tilde{u}(t) = U \sin(\omega_0 t + \varphi)$, $t \geq 0$.

Allora esiste uno stato iniziale per cui l'uscita è sinusoidale e vale

$\tilde{y}(t) = Y \cdot \sin(\omega_0 t + \psi)$, $t \geq 0$,

Dove:

$Y = |H(j\omega_0)| U$

$\psi = \varphi + \arg\{H(j\omega_0)\}$

Inoltre, se il sistema è asintoticamente stabile, per qualunque stato iniziale risulta:

$$\lim_{t \to \infty} [y(t) - \tilde{y}(t)] = 0$$

Osservazioni:

1) Stiamo eccitando un sistema con un ingresso sinusoidale. Esiste uno stato iniziale per cui l'uscita è IMMEDIATAMENTE sinusoidale, per $t \geq 0$

2) È SINUSOIDALE e con la STESSA pulsazione del segnale eccitante!

Questo è un risultato FONDAMENTALE da applicare!

Si noti che ciò vale INDIPENDENTEMENTE dalla stabilità iniziale, anche se ciò dipende dallo stato iniziale scelto!

3,2) Definizione di risposta in frequenza

Def: risposta in frequenza

La funzione complessa $H(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$, ~~definita~~ per $\omega \geq 0$, ossia definita per valori non negativi di ω, tali che $j\omega$ non sia un polo di $H(s)$, viene chiamata "risposta in frequenza" del sistema (A, B, C, D).

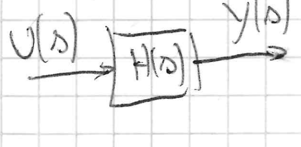
Formalmente,

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

Osservazione: $H(-j\omega) = H^{*}(j\omega)$

Ciò sarà utile nei diagrammi polari, diagrammi di Nyquist.

3,3) Esempio



$$H(s) = \frac{2}{1 + \frac{s}{10}}$$

$u(t) = 3 \sin(\omega t)$

Vogliamo trovare la risposta a questo segnale per $\omega = 1, 10, 100$ rad/s.

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \psi) = |H(j\omega)| U \sin(\omega t + \arg\{H(j\omega)\})$$

$$\omega = 1: \rightarrow Y_c = 3 \cdot = \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{100}}} = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{101}{100}}} \simeq 10$$

$$\omega = 10 \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{100}{100}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (\cdot 3)$$

$$\omega = 100 \longrightarrow \quad \sim 0{,}2 \quad [0{,}199]$$

Per lo sfasamento:

$$\psi = \angle H(j\omega) = \arg\{2\} - \arg\{Den\} = 0 - \arg\left\{1 + \frac{j\omega}{10}\right\}$$

$\omega = 1 \rightarrow \text{arctg}\{0{,}1\} = -5{,}7^\circ = -0{,}0997$

$\omega = 10 \rightarrow \text{arctg}\{1\} = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}$

$\omega = 100 \rightarrow \text{arctg}\{10\} = -83{,}7^\circ = -1{,}471 \text{ rad}$

14/05/09

Oggi vedremo due cose: la rappresentazione grafica della risposta in frequenza. Vedremo diagrammi di Bode, Polari, Nyquist; poi presenteremo, parlando di stabilità, il criterio di Nyquist. L'esercitazione verterà su ciò.

3,4) Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

~~3,4,1) [illegible]~~

Bisogna capire a che serve dedicare parte del nostro tempo alla risposta in frequenza. Non solo per l'analisi ma soprattutto per il progetto, le tecniche nel dominio del tempo per quanto intuitive sono molto complesse. Oltre un certo punto non si capisce, data una nostra scelta, quale sia la conseguenza nel dominio del tempo. Viceversa le tecniche di analisi e progetto in frequenza sono un po' più complesso, poiché serve astrazione, ma dopo le tecniche di analisi e progetto son ben più semplici. In letteratura si ha un "parco" di metodi più ampio.

3,4,1) Diagrammi di Bode

Parleremo di parte dei diagrammi di Bode più alcuni trucchi per la rappresentazione di modulo e fase.

Prima cosa da ricordare: data una $H(s)$ fdt; per $s = j\omega$ troviamo una $H(j\omega)$ che è la risposta in frequenza. Partiamo dalla forma in costanti di tempo:

Coppiola!

$$H(j\omega) = K_{st}\,\frac{\prod_i \left(1-\frac{j\omega}{z_i}\right)\prod_j \left(\dots\right)}{s^{\nu}\prod_k \left(1-\frac{j\omega}{p_k}\right)\prod_l \left(\dots\right)}$$

Questa è una funzione di variabile complessa, ed è una funzione che assume valori complessi al variare della frequenza ω. Un numero complesso che varia. Questo può essere descritto o dalla Re e Im (cartesiano) o modulo e fase (polare).

Vogliamo elaborare modulo e fase:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log K_{st} + 20\sum_i \log_{10}\left|1-\frac{j\omega}{z_i}\right| + 20\sum_j \log_{10}|1 \dots| - 20\log_{10}| -$$

$$+20\log_{10}\sum_k \left|1-\frac{j\omega}{p_k}\right| - 20\log_{10}\sum_l |1 \dots| .$$

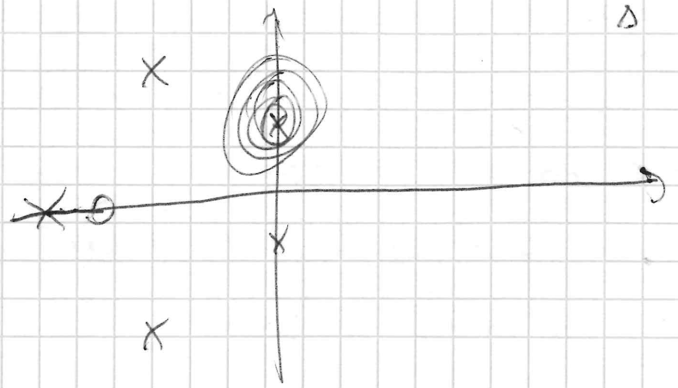
$$\arg\{H(j\omega)\} = \arg\{K_{st}\} + \sum_i \arg\left\{1-\frac{j\omega}{z_i}\right\} + \sum_j \arg\{\dots\} - \arg\{(j\omega)^{\nu}\} -$$

$$+\sum_k \arg\left\{1-\frac{j\omega}{p_k}\right\} - \sum_l \arg\{\dots\}$$

Si scompone tutto in diversi contributi, quindi si considerano tutti i singoli contributi e boh.

Cosa significa prendere una funzione di trasferimento e studiare la funzione di trasferimento? Il piano complesso è il dominio della funzione di trasferimento. Si deve immaginare il piano complesso come il dominio e sulla terza dimensione si ha il modulo.

Abbiamo visto che nei poli la funzione va a ∞. Vediamo le linee di livello:

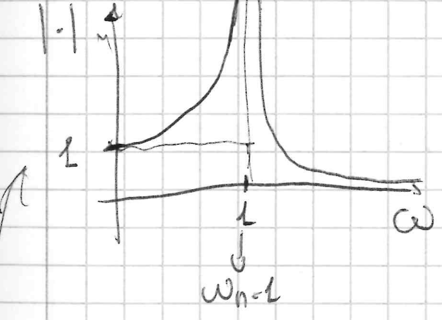


In corrispondenza dei poli si deve immaginare un cono che va a ∞, con linee del tipo . Dove c'è la crocetta c'è un "cono". Qui, in questi punti, il polo va a ∞. Nello zero, la funzione va in un "avvallamento", tende a zero, c'è una BUCA!

Questa è una rappresentazione del modulo della funzione di trasferimento. La risposta in frequenza è contenuta qui! Ponendo $s = j\omega$, ottengo, sezionando il piano complesso, la risposta in frequenza.

Si fa confusione tra la posizione del polo sul piano complesso e la "frequenza di rottura" che noi poniamo su un foglio di carta semilog, legato a questi zeri e questi poli.

Esempietto: in presenza di poli immaginari puri, prendiamo la risposta in frequenza: data $H(s) = \frac{1}{1+s^2}$, $H(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2}$, $\omega = \pm 1$

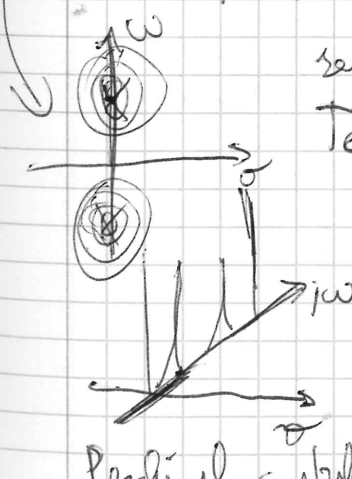


Qua, $\xi = 0$, $\omega_n = 1$.

Qui vedo, che per $\omega \to 0$, $|\cdot| \to 1$

Quando $\omega \to 1$, il modulo tende a ∞.

Se ci fosse sul piano di prima solo i poli ±ω, il corrispondente sarebbe proprio questo!



Taglio col piano jω, e guardo!

Provare con Matlab e cercare di capire!!! :-)

Perché il contributo di uno zero reale con parte reale negativa? ~~carta semilogaritmica~~ Beh, per frequenze inferiori a un certo punto di rottura, il modulo coincide con il modulo dello zero.

DISTINGUI BENE RISPOSTA IN FREQ. E FDT

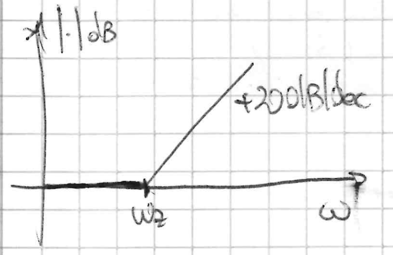
Si supponga che la fdt sia del tipo:

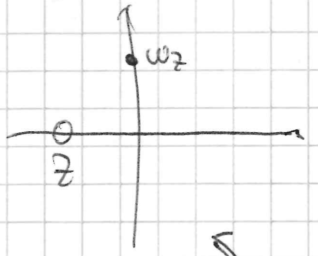
$H(s) = s+1 \longrightarrow H(j\omega) = 1 + j\omega$

$\longrightarrow$ zero $\longrightarrow s_z = -1$

pulsazione : $\underline{\omega_z = |z| = 1}$

La pulsazione alla quale si vede la rottura coincide sempre col modulo dello zero.





Quel che bisogna dire è: dato uno zero in un certo punto, perché tagliando e facendo il logaritmo, per $\omega_z = |z|$, si vede quella cosa lì? Beh, è così!

Si vede che per $H(j\omega) = 1 + j\omega$, $|H(j\omega)| = \sqrt{1+\omega^2}$, e qui CRESCE!

RIFLETTERE, PROVARE, CAPIRE, CHIEDERE!

Ricorda: la fase dello zero con parte reale negativa ricapola come p. 1.

Se lo zero è a parte reale positiva il sistema è a "fase non minima", ed è generalmente anche per sistemi con poli a parte reale positiva.

È facile notare che il contributo della fase è opposto a questo.

N.B. : questa regoletta si può usare se abbiamo avuto l'avvertenza di usare la forma a costanti di tempo, altrimenti si rischia di commettere errori. Usare sempre LEI.

2) Polo a parte reale negativa. Ha un contributo opposto rispetto a quello dello zero, che diventa opposto.

Per quanto riguarda i poli complessi coniugati, il modulo dipende dallo smorzamento. (p. 3)

Se i poli si avvicinano all'asse immaginario, lo smorzamento diminuisce fino a diventare zero; il modulo va a ∞! Questo, nella RISPOSTA IN FREQUENZA! Ricorda, i poli in una fdt vanno a ∞, la risposta in freq. NO, a meno che non si parli di poli sull'asse $j\omega$!!! CAPIRE! FARE!

La fase idem: per $\xi \to 0$ si va sempre più velocemente verso 0; per $\xi = 0$ si ha PROPRIO UN GRADINO!

Alcuni suggerimenti per disegnare i diagrammi di Bode.

Noi li disegneremo con MATLAB. Dobbiamo però essere in grado di fare dei test, dei check su quel che matlab fa, in modo di capire se va bene o no.

1) Dati poli complessi coniugati, tipo:

$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

A partire da un generico $s^2 + as + b$

Dobbiamo identificare subito ω_n e ξ :-)

Ovviamente, ω_n è presto calcolabile! $\omega_n = \sqrt{b}$

Dato $2\xi\omega_n = a$, $\xi = \dfrac{a}{2\omega_n}$:-)

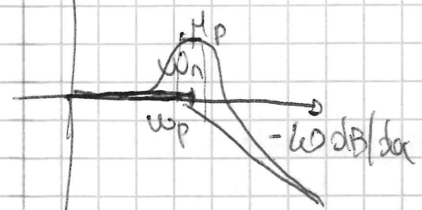
Questi dati sono utili per identificare la pulsazione di picco:

$\omega_{pk} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

Il valore del picco, M_p, è: $M_p = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ se $\xi \leq 0.707$

CI INTERESSA SOLO IL COMPORTAMENTO A BASSA FREQ.
STESSE COND. PER $H'(s)$! SCRIVTRO!

Volendo disegnare la funzione di trasferimento di questa, sapendo che $K_{st} = 1$, quindi per $\omega = \omega_n$ si scende a -40 dB/dec!

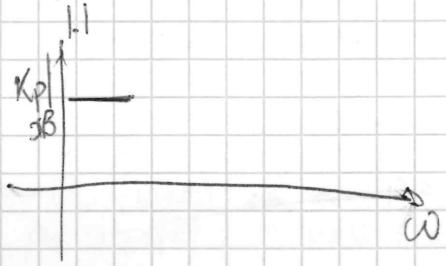


Volendo si può anche valutare il picco!

NOTA! $K_{st} \neq 1$, no va beh!

2) Supponiamo che $H(s) = K_p H'(s)$, $H'(s)$ senza poli nell'origine! Qual è il modo a bassa frequenza? Beh, se $H'(s)$ non ha poli nell'origine o qualcosa simile, ossia:

$$\lim_{s\to 0} H'(s) = 1$$

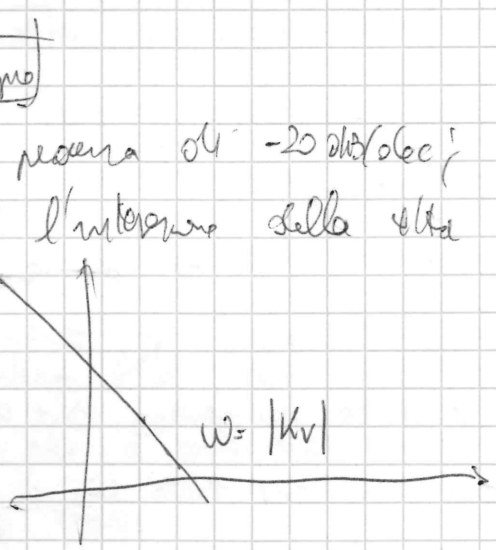


Come farà il diagramma del modulo?

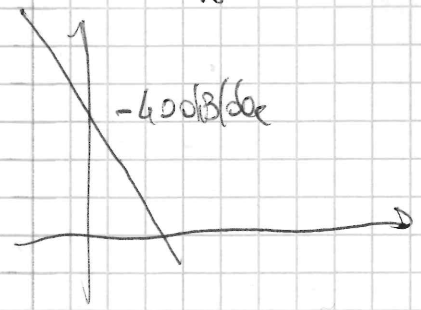
Il guadagno a bassa frequenza sarà costante!

3) Se $H(s) = \frac{K_v}{s} H'(s)$ $\boxed{1 \text{ polo nell'origine}}$

Evidentemente un polo nell'origine dà una pendenza di -20 dB/dec; si individua l'asse a 0 dB, quindi l'intersezione della retta con l'asse 0 dB avviene per $\omega = |K_v|$!



4) $H(s) = \frac{K_a}{s^2} H'(s)$.



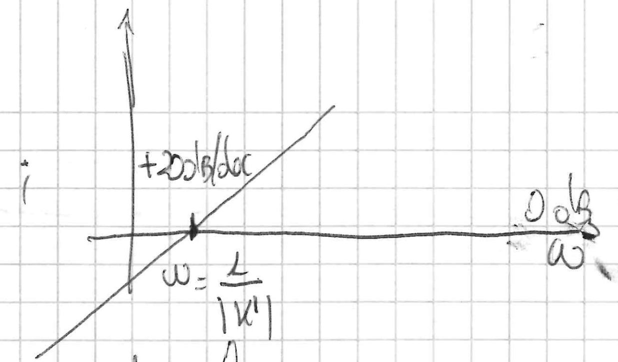
L'intersezione della retta con l'asse 0 dB si ha con $\omega = \sqrt{|K_a|}$

Casi particolari: zeri nell'origine (ex: sospensioni dell'automobile!)

5) $s K' H'(s)$;

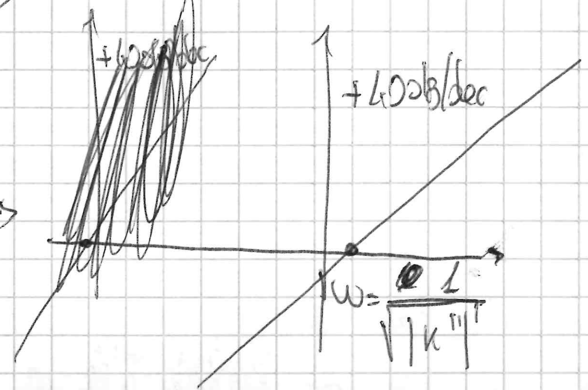
In questo caso, $K' = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} H(s)$;

capita ciò!



6) Due zeri nell'origine:

$$K'' = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2} H(s) \qquad H(s) = s^2 K'' H'(s) \longrightarrow$$



Trucchetto per "tracciare il modulo": data la fattorizzazione zeri-poli,

$$H(s) = K_\infty \frac{(\,)(\,)(\,)}{(\,)(\,)(\,)} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ordine } m \\ \leftarrow \text{ordine } n \end{array}$$

Il comportamento ad alta frequenza dipende dal numero di zeri e poli.

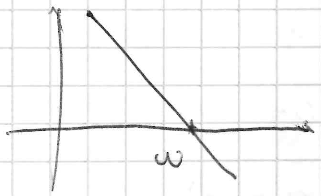
È facile vedere che:

$$\lim_{\omega\to\infty} |H(j\omega)| = \frac{|K_\infty|}{\omega^{n-m}}$$

Ad alta frequenza, il modulo della risposta in frequenza si presenterà come una retta di pendenza 20·(n-m) dB/dec.

L'intersezione sarà:

$$\omega = \sqrt[n-m]{|K_\infty|}$$



Per quanto riguarda la fase, il segno del guadagno stazionario è IMPORTANTE! Il diagramma della fase si può allora fare "vero male": è molto distante da quello reale!

ESEMPI

1) $H(s) = \frac{2\cdot 10^4 (s+100)}{(s+20)(s+1000)}$ Voglio fare il Bode

$K_\infty = 2\cdot 10^4$;

(*) L'andamento asintotico per la fase pendo approssimato con una retta che va da un quinto della pulsazione di rottura e finisce a 5 volte la pulsazione di rottura. Più PRECISA rispetto una decade prima e dopo! :-) BELLO!

Nella forma costanti di tempo, questo è:

$$H(s) = \cancel{2}\cdot\cancel{10^4}\cdot\frac{\cancel{100}\,10}{\cancel{20}\cdot\frac{1000}{100}}\cdot\frac{\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{20}\right)\left(1+\frac{s}{1000}\right)}$$

$\cdot 100 = K_p$

100 è un K_p; K di posizione (perché non ho ~~zeri~~ zeri nell'~~orig~~ origine)

Come si costruisce questo grafico? Ho un polo a 20 rad/s, uno zero a 100, un polo a 1000; a questo punto è già ordinato!

CHIEDERE!

(*) Si parte da $20\log_{10}(K_p) = 40$ dB. Per la fase, si fa che iniziare la variazione a ~~un~~ ~~quinto~~ cinque volte della frequenza prima e a 5 volte di quella dopo

2) Modifichiamo questa funzione:

$$H(s) = 2\cdot10^4\,\frac{(s+100)}{(s-20)(s+1000)}$$

$$\longrightarrow H(s) = -100\,\frac{1+\frac{s}{100}}{\left(1-\frac{s}{20}\right)\left(1+\frac{s}{1000}\right)}$$

Il guadagno stazionario è negativo.

Le singolarità sono quelli termo $\left(1-\frac{s}{20}\right)$, che ha parte reale positiva. Quel che capita è che il polo a parte reale positiva darà uno sfasamento da "0" a "+90°". La fase CAMBIA!

3,4,2) Diagrammi polari e diagrammi di Nyquist

Diagrammi polari: data ad esempio:

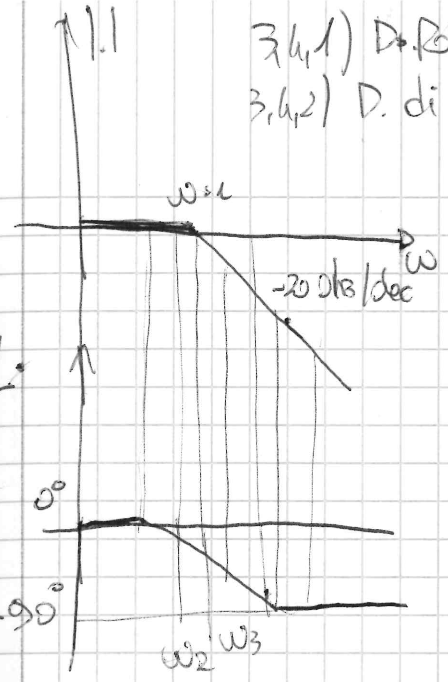
$$H(s) = \frac{1}{1+s}$$

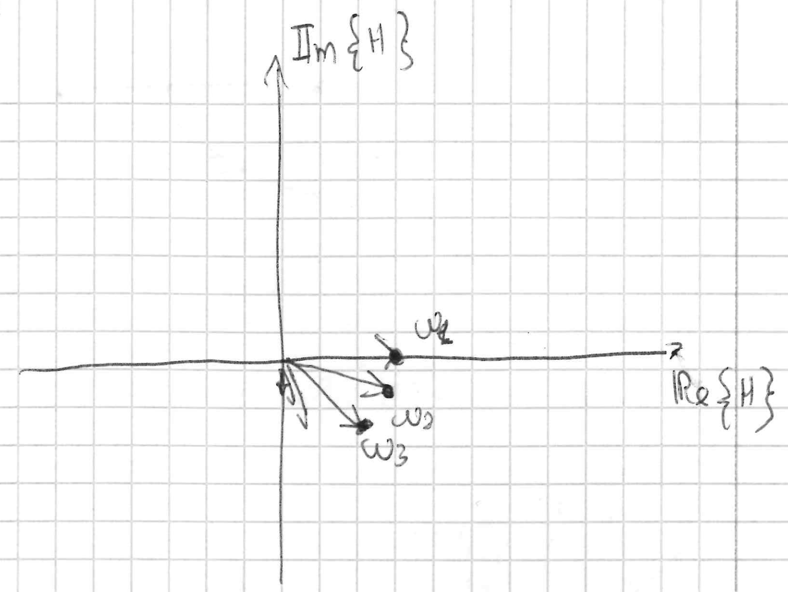
La risposta in frequenza è:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

Bisogna disegnare prima di tutto dei diagrammi qualitativi di Bode

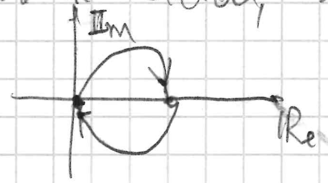
3,4,1) D. Polari
3,4,2) D. di Nyquist





Supponiamo di collocare dei valori di modulo e fase su di un piano DEI VALORI DELLA FUNZIONE. A ~~fre~~ frequenza bassa, il vettore con modulo unitario ~~e~~ fase 0, è (0;1)! $1e^{j0}$!

A ω_2 avremo un vettore con lo stesso modulo, e una fase leggermente negativa! A ω_3 la fase sarà scesa di 45°, il modulo calerà. Poi i vettori inizieranno ad avere un modulo che si accorcia, la fase si stabilizza a -90°, ecc.!

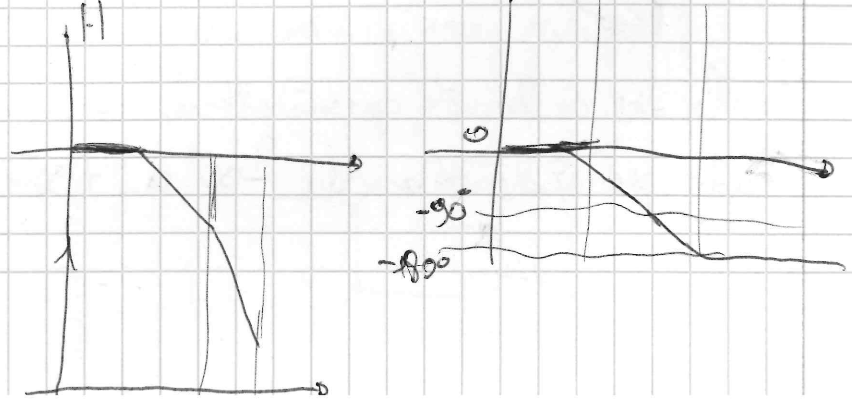


Inviluppando le punte dei vettori, trovo una curva di questo tipo: il diagramma polare della risposta in frequenza per le ω positive! Data la risposta in frequenza positiva, la negativa è coincidente, solo simmetrizzata rispetto all'asse reale.

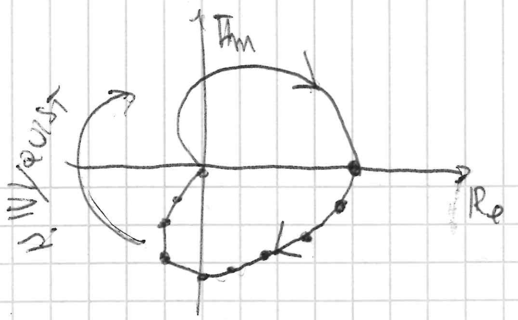
Questo diagramma completo sia delle pulsazioni positive che di quelle negative è detto "diagramma di Nyquist".

Esempi

1) $H(s) = \dfrac{1}{(1+s\tau_1)(s+s\tau_2)}$



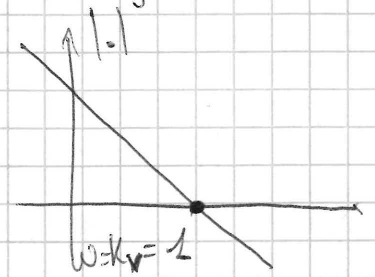
Di polare:

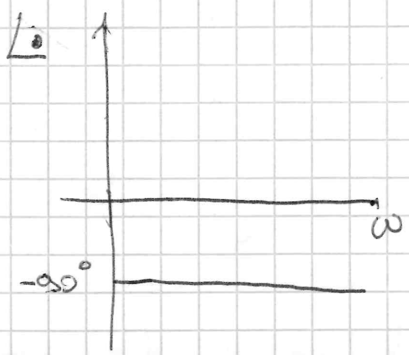


Anche questo lo fa Matlab, ma meglio capire!

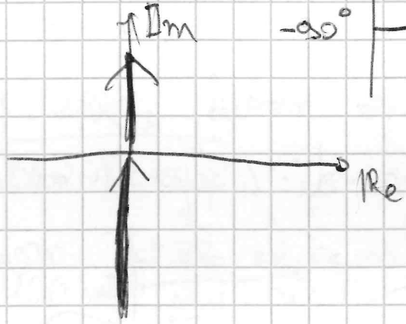
2) Situazioni critiche: POLI NELL'ORIGINE

$H(s) = \frac{1}{s}$





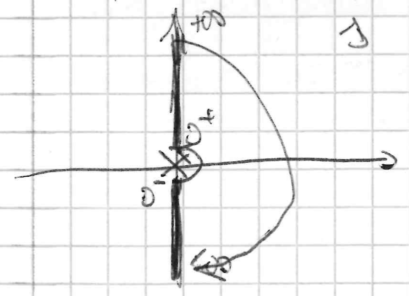
Polare:



il Nyquist, con le ω negative, è il duale, con la freccia in su!

PROBLEMA: il Nyquist deve essere una curva chiusa (cosa non detta precedentemente!) SEMPRE

Quando da H(s) passiamo a H(jω), per calcolare la risposta in frequenza, dal piano $s = \sigma + j\omega$, facciamo una cosa di questo tipo:



Facendo assumere SOLO valori sull'asse immaginario. Col polo nell'origine il modulo va a ∞, ma anche il modulo della risposta in frequenza.

Quello che si fa è "girarci attorno", con un raggio piccolo a piacere. Questo per θ che varia da -90° a +90°: $s = \varepsilon e^{j\theta}$, da -90° a +90°

Con 2 poli, $\frac{1}{r^2 e^{2j\varphi}}$! → PER QUESTO, 2 crf.!

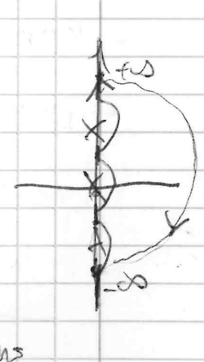
Ma $H(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{r e^{j\theta}} = R e^{j\varphi}$, con $\varphi = -\theta$.

Questi sono i valori della funzione

Quando la variabile indipendente fa questo giro, l'informazione che manca è quella di ω che va da 0^- a 0^+! Dovrebbe fare mezzo giro antiorario! H(s) però si muove con un modulo molto grande, e fa un salto opposto, da +90° a -90°, e così CHIUDE LA CURVA! Circ. di $r \rightarrow \infty$! Vista come limite della circonferenza di raggio infinito!

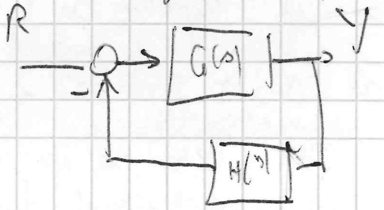
Con poli nell'origine, la chiusura di Nyquist va fatta con tante semicirconferenze quanti sono i poli nell'origine, partendo da 0^- e chiudendosi a 0^+, poi con la circf. di raggio infinito da +∞ si salta da +90° a -90°, completando la chiusura.

3.3) Il criterio di Nyquist per lo studio della stabilità di sistemi retroazionati



Sul piano della variabile $s = \sigma + j\omega$, il percorso indicato poc'anzi (in presenza di diversi poli sull'asse immaginario, questo percorso completato in questo modo, con la semicirc. di raggio infinito (il tutto si chiama Percorso di Nyquist), abbraccia tutto il semipiano destro esclusi poli immaginari ("individuati" i relativi nei cerchietti). Questo è il percorso di Nyquist.

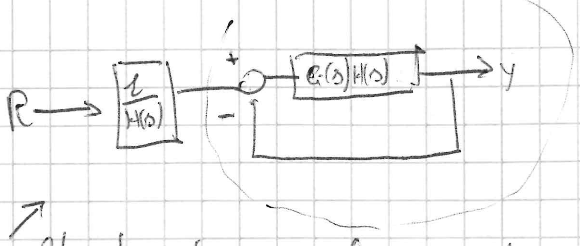
Prima di formulare il criterio, alcuni ingredienti e una notazione: i sistemi di controllo che andremo a studiare e progettare, si riducono SEMPRE A QUESTO:



$G_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

Si può dire che:

$G_{ry}(s) = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$



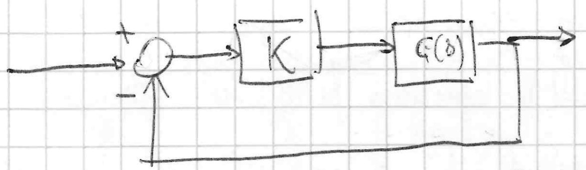
Ciò suggerisce una visione grafica alternativa! uso di un sistema di controllo con retroazione unitaria.

Lo studio della stabilità esterna in questo sistema si fa studiando i poli della funzione di trasferimento. I poli sono le radici di "1 + G(s)H(s)". Se poi aggiungiamo un fatto, quello che si ha la cancellazione di H, siamo a posto.

Vedremo che H(s) spesso è una costante, quindi non introduce radici! Possiamo studiare la stabilità del sistema a retroazione unitaria!

Quali sono gli ingredienti per la "ricetta" del criterio di Nyquist?

- npa : numero di poli di Ga = G(s) H(s) [funzione d'anello!] con parte reale positiva
- npr : numero di poli di Gry con parte reale positiva
- Dato il percorso di Nyquist
- Introdotto il "punto critico" con riferimento alla struttura di controllo



P.C. = $\mp \frac{1}{K}$

DOMANDA FONDAMENTALE!

K è un coefficiente; "Si chiede se si può fare lo studio di stabilità al variare di K?" Esiste un qualche controllore che riesce a stabilizzare il sistema? (poi ci preoccuperemo anche di altro).

- N indica il "numero di rotazioni" compiute dal diagramma di Nyquist intorno al punto critico. Per noi, N>0 se le rotazioni sono in senso orario, N<0 se in senso antiorario.
- Dato il diagramma di Nyquist di Ga(s)

N.B: se il d. di Nyquist passa per il punto critico, allora si dice che N "non è ben definito". Ciò significa che c'è un passaggio da una situazione di stab. esterna a una di instab. esterna. Ciò capita se la fdt presenta dei poli sull'asse immaginario, ovvero dei punti di passaggio da stab. a instab.

Teorema (principio della fase di Cauchy)

Sia N ben definito. Il numero di poli di Gry con parte reale positiva è dato da: "npr = npa + N"

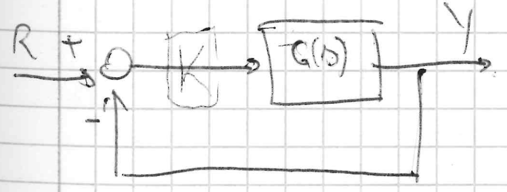
Il sig. Nyquist ha detto così:

Teorema (criterio di Nyquist): sia N ben definito, il sistema retroazionato (in figura) è stabile esternamente se e solo se npr = 0

Ossia se N = − npa

Esempio

Dato il seguente sistema:



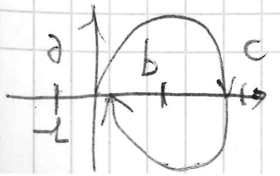
$G(s) = \frac{10}{s+1}$

Applichiamo Nyquist! Ga non ha poli instabili! Ga = G!

npa = 0!

Il punto critico in questo caso è $\mp \frac{1}{K}$. Ora non c'è K, quindi vale 1! Abbiamo reazione negativa, quindi $-\frac{1}{K} = -1 = P.C.$

Dovremo disegnare il diagramma di Nyquist:



N = 0, perché non ci sono ~~[illegible]~~ rotazioni attorno al punto critico! N = npa! npr = 0! → IL SISTEMA È ESTERNAMENTE STABILE!

Aggiungendo "K", npa non cambia, K però non è 1, il punto critico è $-\frac{1}{K}$.

Se siamo in ~~posto~~ posizione a vuol dire che $-\frac{1}{K} < 0$, quindi:

a) $-\frac{1}{K} < 0$

→ il sistema è stabile! N = 0, npr = 0, stabilità!

b) $0 < -\frac{1}{K} < 10$

In questo caso, N = +1 ; npr = 1 → NO! 1 polo con parte reale positiva!

c) $-\frac{1}{K} > 10$, N = 0, npr = 0 → sys stabile.

20/05/09

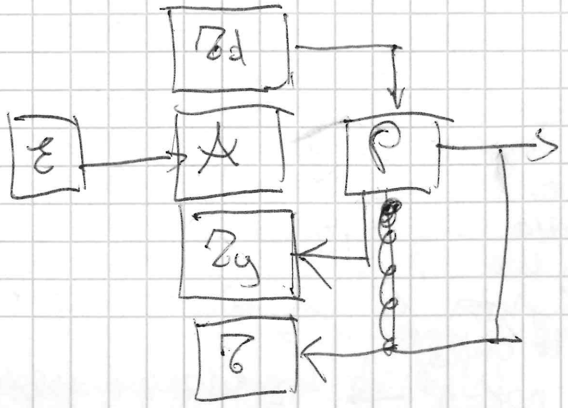
Iniziamo 4° capitolo

4) Le caratteristiche dei sistemi di controllo retroazionati con un ingresso e una uscita (SISO)

Abbiamo finora fatto un volume di alcuni strumenti utili, quindi abbiamo insistito sulla stabilità! Abbiamo parlato del criterio di Nyquist

Questo capitolo entra nel cuore del corso, e sarà la base per poi affrontare il problema del progetto del controllore

4.1) Una struttura di sistema di controllo

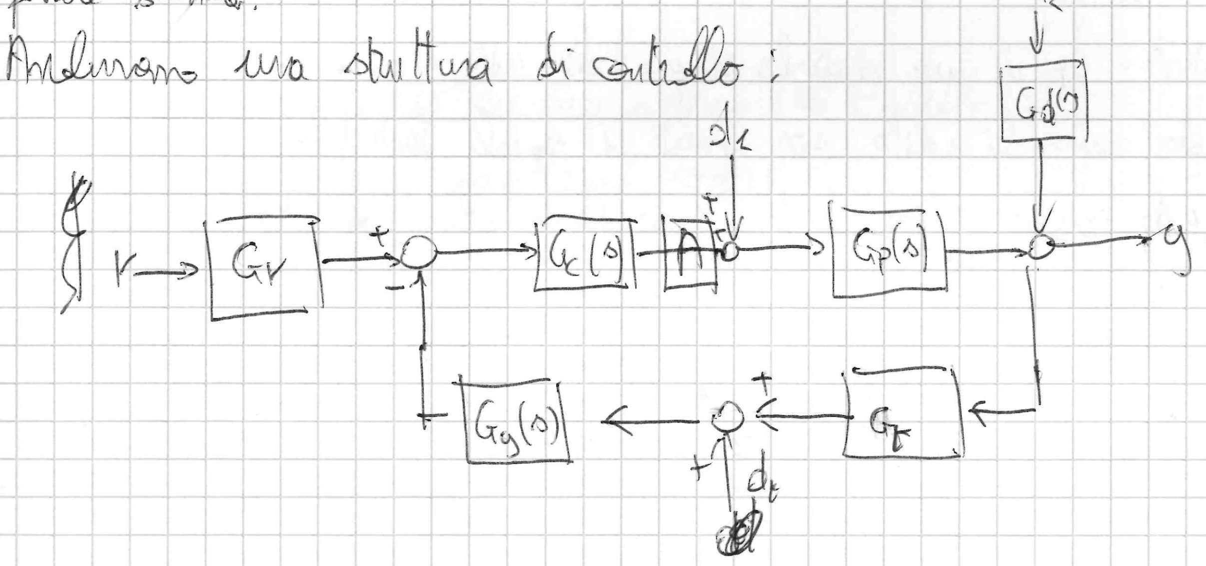


Questa è la struttura generale vista a inizio corso.

Raccolte queste informazioni e quella sull'uscita desiderata, si decide quale deve essere la legge del controllo IN MANIERA AUTOMATICA. Di solito è un segnale a bassa potenza, dunque si usa un attuatore o amplificatore "A".

Questa è ~~la~~ una struttura generale di controllo. Noi ci occuperemo di una struttura PARTICOLARE. Si noti che spesso (soprattutto ad es) gli stati non si misurano, si STIMANO! Il lev. era una possibile struttura.

Analizziamo una struttura di controllo:



Gp(s) indica la fdt dell'impianto, NORMALMENTE DATO. Gd(s) tiene conto del legame tra i disturbi (d2) e l'uscita! d1 è un disturbo additivo sull'attuatore A. Gc, Gy, Gr sono blocchi da progettare. Gc e è il cuore del controllo e va progettato. Gt è la fdt di un trasduttore, di solito non va progettato. In questo corso non approfondiremo tecnologie, ma solo metodologia. Noi impareremo a scegliere, a controllare solo Gc e altri. Gt è una funzione a volte statica, a volte dinamica. Se si fa in modo da avere una dinamica ampia, si fa in modo da considerarlo costante; avrà nessun poli e zeri ad alta frequenza. Idem l'attuatore.

G_y e G_r servono per gestire il rapporto di scala in regime permanente, il guadagno stazionario, per il sistema di controllo.
Normalmente si userà solo G_y; tuttavia G_r sarà presente fisicamente in alcuni sistemi, in questi casi G_r è detto "trasduttore del riferimento".
Abbiamo imparato che la "y" VA MISURATA. Il riferimento "r" è "l'uscita desiderata", il segnale che il sistema di controllo deve riprodurre.
Disturbi: d_t è un disturbo sinusoidale nel ramo di reazione; in questo ramo di solito son questi i segnali fastidiosi.
d_1 e d_2 possono essere di tipo sinusoidale o polinomiale. Nel caso di A, un disturbo può essere un offset, una deriva nel tempo di tipo lineare (rampa); questi sono segnali polinomiali.
Per fissare qualche idea consideriamo altri problemi: posizionamento di un'antenna parabolica. Ci sono sistemi di ingranaggi con dei motori di tipo elettrico o pneumatico.
Supponendo di essere di elettrica, l'impianto è l'antenna da usare; l'antenna si posiziona con dei motori ELETTRICI. Di fatto questo motore è l'attuatore, l'antenna è G_p; con gli ingranaggi c'è un POTENZIOMETRO, che si usa come trasduttore di posizione angolare. Come si fa a dire "posizionati in quell'angolo"? Beh, la "console" di controllo è un trasduttore di riferimento, G_r. G_c e G_y sono da progettare. ‖ L'antenna avrà inerzia, avrà un attrito inverso al movimento, ecc. Il motore va a muovere l'antenna; l'informazione tornando verso il K, in cui arriva anche l'informazione sul riferimento. Si costruisce l'errore, si prende, e si usa come informazione per correggere, muovendo il motore. Abbiamo individuato il sistema di controllo retroazionato! Lo si può modellizzare con un diagramma a blocchi simile allo schema prima proposto.
Dobbiamo imparare a progettare il controllore K
G_y di solito sarà statico, ma potrebbe anche essere dinamico, per filtrare via del rumore.

5 requisiti fondamentali di un sistema di controllo sono:
- Stabilità: un sistema deve essere STABILE
- Fedeltà di risposta: un sistema deve riprodurre l'uscita desiderata nella maniera più fedele possibile, sia in regime permanente sia nel transitorio
- Essere capace di attenuare i disturbi additivi: d_1, d_2, d_t; additivi, perché esiste un'altra classe di disturbi (reiezione) ↘
- Attenuare il più possibile disturbi PARAMETRICI, conoscenza non desiderata di parametri del nostro sistema di controllo.

Esempio
A partire da ciò che è stato visto prima, facciamo un esempio. Supponiamo che $A=1$, $G_r=1$, $G_d=1$, $G_c=K_c$ → un guadagno puro; $d_1=0$, $d_t=0$, c'è solo d_2; $G_y \cdot G_t=\frac{1}{K_d}$, dove questo K_d è chiamato anche "coefficiente di proporzionalità tra guadagno e uscita".

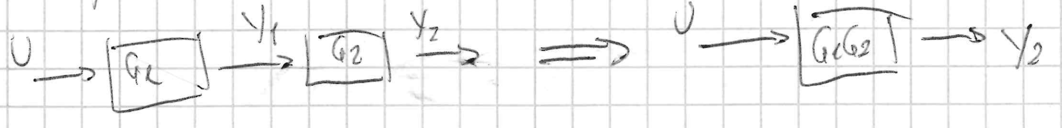
Vogliamo scrivere il contributo sull'uscita quando agiscono i due ingressi: il riferimento e d_2.

Z è da riprodurre, d2 da attenuare.
Si può sovrapporre gli effetti per linearità;

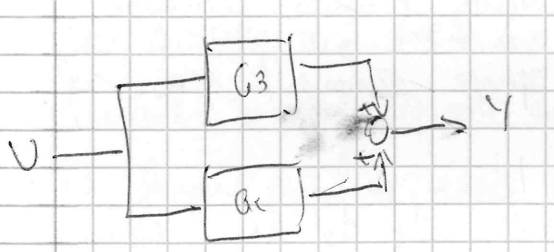
$Y(s) = G_{ry}(s) \cdot R(s) + G_{d2y}(s) D_2(s)$

Avrò due contributi: l'uscita è il contributo di riferimento e disturbo.
La fdt tra z e y è già nota; riprendiamo alcune regole:

1) Quando ho blocchi in cascata, il sistema è equivalente a un sistema con un solo blocco, dove la funzione equivalente è il prodotto delle due fdt

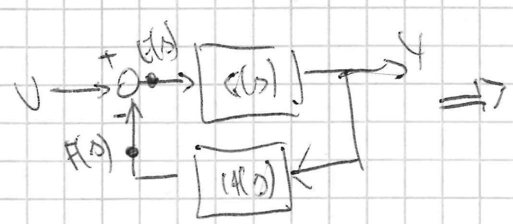


2) Quando ho due blocchi così:



$\Longrightarrow Y = U(G_3+G_4)$

3)

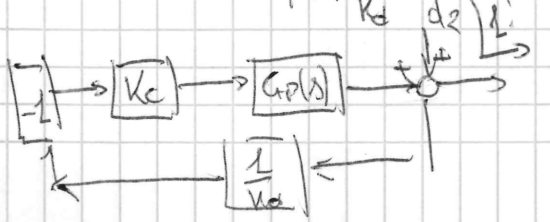


$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{1+\underbrace{G(s)H(s)}_{G_a(s)}}$$

$$G_a(s) = \frac{F(s)}{E(s)}$$

Ora, abbiamo da applicare 'ste regole:

$$G_{ry}(s) = \frac{K_c G_p(s)}{1+K_c G_p(s)\frac{1}{K_d}} \qquad G_{d2y} = \frac{1}{1-\underset{\text{retroazione POSITIVA!}}{\underbrace{(-1)}}\cdot\frac{1}{K_d}\cdot K_c G_p(s)}$$



$$Y(s) = \frac{K_c G_p(s)}{1+K_c G_p(s)\frac{1}{K_d}} R(s) + \frac{1}{1+\frac{K_c}{K_d}G_p(s)} D_2(s)$$

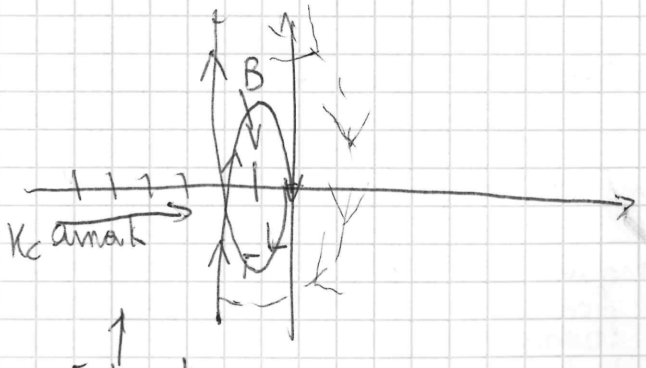
Ora: stiamo facendo agire un riferimento, su un sistema di controllo.

Cosa posso fare? Prendiamo Kc e proviamo a mandarlo a ∞ questo succede:

$$\lim_{K_c\to\infty} Y(s) = K_d \cdot R(s) + 0$$

Se facciamo crescere il guadagno, l'uscita è proporzionale al riferimento! Si ha R(s) per un Kd! Si è eliminato il rumore! Reiezione del rumore e fedeltà!
Mandare Kc a ∞ è intelligente? Beh, Kc per intenderci è parente con il K dello schema a blocchi, per Nyquist
In un sistema elettromeccanico si ha qualcosa di sto tipo:

$$G(s) = \frac{K_v}{s\underbrace{\left(1+\frac{s}{p_m}\right)}_{\text{polo meccanico}}\underbrace{\left(1+\frac{s}{p_e}\right)}_{\text{polo elettrico}}}$$



Il diagramma polare di sta cosa è questo
Il punto critico è

$C_p = -\frac{1}{K_c}$ → se la retroazione è negativa!

$n_a = 0$; $N = 0$ essendo esterno → $n_p = 0$!
Se si esagera col guadagno, $K_c \to \infty$, C_p finisce nel "cerchietto"! $n_a = 0$, $N = 2$! Sulla carta il sistema è fedele, MA instabile per il criterio di Nyquist.

"Non si può avere la botte piena e la moglie ubriaca!"
Troppo guadagno rende instabile!

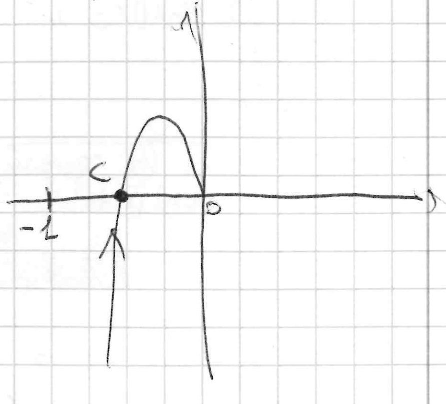
In generale, raddoppiando il guadagno si dimezza l'errore!
~~MA, se esageriamo col guadagno,~~
Cambia l'"utenza", la corrente del segnale, le ampiezze dei disturbi cambieranno! Il controllo regolerà di conseguenza!

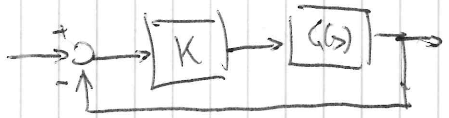
4.2) La stabilità nei sistemi di controllo con retroazione

Abbiamo parlato di quattro caratteristiche dei sistemi di controllo.
Il problema in questo paragrafo sarà: non è sufficiente parlare di stabilità, chiedere che un sistema sia stabile. Oltre ad esigere la stabilità si chiede anche che vi sia un certo "grado" di stabilità: "stabilità relativa", "quanto" il sistema è stabile.
Si tratta di problemi di robustezza: o si cambiano certi parametri, o si verifica che il sistema diventi instabile. Bisogna che il sistema sia lontano abbastanza dall'essere instabile.

Margine di guadagno

Il margine di guadagno è l'estremo superiore dei fattori moltiplicativi della funzione G(s) (quello col "K" in scala) che il sistema retroazionato può tollerare senza perdere la proprietà di stabilità esterna.
Supponiamo di avere un d. polare di questo tipo:





Se il punto critico è -1, se cambio il guadagno, succede che il punto critico cambia; ma non solo: fissando il punto critico e cambiando il guadagno, cambia il guadagno della funzione. Qual è il più grande dei fattori moltiplicativi prima che il sistema retroazionato diventi instabile?

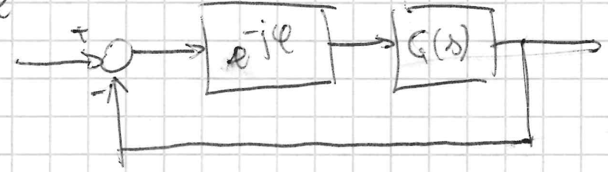
m_G $k \cdot c = -1 \longrightarrow k = \left| -\frac{1}{\overline{OC}} \right|$

tanto più è grande $\overline{OC}$, il segmento tra O e C, tanto più stabile sarà il sistema. Più siamo lontani da -1 e meglio è.

Margine di fase

Si considera questa situazione:

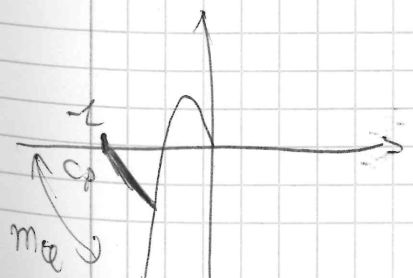
m_φ



Il margine di fase è il massimo ritardo di fase della funzione G(s) che il sistema retroazionato può tollerare senza perdere la proprietà di stabilità esterna.

Questa volta, al variare di φ, si introduce un ritardo di fase A MODULO COSTANTE.
Qual è il max ritardo di fase tollerabile prima di perdere la stabilità?

Ora ciò che cambierà sarà la fase!
Si interseca il d. di Nyquist con la circonferenza di raggio unitario.



Superando questo ritardo, il sistema diventa instabile perché il diagramma ruota fino a far raggiungere il punto critico. Questo m.e per cui capita ciò è il "margine di fase".

Esempio:

$$G(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+10)} \xrightarrow{\text{Nyquist}}$$

FAR CON MATLAB! :-)

Comando "margin()" fa calcolare i margini di modulo e fase

Sui diagrammi di Bode si possono leggere e interpolare; m. di guadagno è, preso il punto in cui la fase è -180°, si guarda per quale f. la fase vale 180°, e si vede il segmento che manca tale per cui il modulo vada a 0 db. Il m. di fase si guarda per quella frequenza in cui il modulo vale 1 (cioè - raggio unitario), si vede la distanza di φ da -180°, e quello è il margine di fase

Si deve studiare la distanza delle frequenze dal punto "-1".

CAPITO!