Geometria

Nozione di Matrice

Le matrici sono tabelle formate da numeri, disposti in righe e colonne.

Vengono comunemente indicate con lettere maiuscole, mentre un numero con lettere minuscole.

La notazione più comune per indicare una matrice è:

" $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ "

Ciò indica una matrice A appartenente all'insieme delle matrici reali a 3 righe e 3 colonne.

Viene definita "quadrata" la matrice con ~~numero~~ di righe uguale a numero di colonne (comunemente si indica il primo come "m", il secondo come "n").

Altra notazione molto utile in certi casi per indicare una matrice è:

" $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ "

Con " $a_{i,j}$ " intendiamo ogni singolo elemento della matrice, usando come riferimento il numero di riga "i" e di colonna "j" per identificarlo.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 7 \\ \frac{1}{2} & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{3,3}$$

Sottoesempio: l'elemento di riga 3 e colonna 2 di A, ossia $a_{3,2}$, è $\boxed{4}$

A partire da una matrice è possibile far nascere altre matrici con una riga sola e una colonna sola; essi vengono detti "vettori riga" se è stata estratta una riga, "vettori colonna" se è stata estratta una colonna.

Esempio:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad B \in \mathbb{R}^{2,3}$$

Da B possiamo ~~estrarre~~ 2 vettori riga e 3 vettori colonna.

Operazioni con le matrici

Somma di matrici:

La condizione necessaria per sommare due matrici, è che queste abbiano lo stesso numero di righe e di colonne, ossia, siano dello stesso ordine

"$A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$"

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \dots & \dots & \dots \\ b_{m,1} & \dots & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

Si fa la cosiddetta "somma posto per posto": si fa la somma algebrica di ogni elemento di A e B con $i_a = i_b$ e $j_a = j_b$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{perché:} \quad \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 & 5+2 \\ 3+3 & 4+0 & 0+4 \end{pmatrix}$$

A questo proposito, diamo alcune definizioni:

- Matrice nulla: tutti i suoi numeri sono uguali a 0

"$A = (a_{i,j}) = 0 \quad \forall i,j$"

- Matrice opposta di A: viene detta opposta di una matrice la matrice con tutti gli elementi cambiati di segno

"$-A = (-a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m,n}$"

La somma di due matrici dispone delle proprietà:

- Commutativa: $A+B = B+A$
- Associativa: $(A+B)+C = (A+C)+B = (B+C)+A$

Prodotto di una matrice per un numero:

$A \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad c \in \mathbb{R}$

$c \cdot A = c(a_{i,j}) \quad \forall i,j$

Si moltiplica il valore per ogni elemento della matrice.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad c = 3$$

$$c \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 24 & 15 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{Perché: } \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & 7\cdot 3 \\ 8\cdot 3 & 5\cdot 3 \\ -4\cdot 3 & 3\cdot 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto di un numero per una matrice:

- Commutativa: $(cA)d = (dA)c = (cd)A$
- Distributiva: $c(A+B) = cA + cB$; $A(c+d) = cA + dA$

Prodotto di matrici:
La condizione necessaria per moltiplicare due matrici è che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda. Il risultato sarà una matrice con il numero di righe della prima e il numero di colonne della seconda

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n,p}$

$A \cdot B \in \mathbb{R}^{m,p}$

Questo procedimento è detto "prodotto riga per colonna", e sarà illustrato con un esempio per comodità:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per effettuare il prodotto, è necessario moltiplicare una riga del primo per una colonna del secondo.

A è una matrice 2x3, B è una matrice 3x3, AB sarà dunque 2x3.

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 4 - 4\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 3\cdot 5 - 4\cdot 1 & 2\cdot 9 + 3\cdot 0 - 4\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 4 + 2\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 5 + 2\cdot 1 & 0\cdot 9 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 9 & 14 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Proprietà del prodotto di matrici:

- Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{m,n}$
- Distributiva: $(A+B)C = AC + BC$ $\qquad B \in \mathbb{R}^{n,p}$
- Associativa con numero: $c(A \cdot B) = A(c \cdot B)$ $\qquad C \in \mathbb{R}^{n,q}$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

N.B.: NON È POSSIBILE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA, DUNQUE È VIETATO CAMBIARE DI ORDINE A, B, C, TRANNE RARI CASI.

Matrice Identica (o Identità)
Viene definita "identica" la matrice in cui, con $i=j$, $a_{ij}=1$, e con $i = j$ $a_{i,j} = 0$
Dunque, tutti 1 nella "diagonale principale", e 0 in tutti gli

altri valori

Esempio:

I_3 (Matrice identica 3x3)

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come si può intuire dall'esempio, la matrice identica si indica con I_n, e ogni matrice identica è quadrata ($n \times n$)

Proprietà della matrice identica:

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$, I_n

$$\left.\begin{array}{l} - A \cdot I_n = A \\ - I_n \cdot A = A \end{array}\right\} \text{Vale la proprietà commutativa}$$

Riprendiamo ora il concetto di vettore riga e vettore colonna:
Indichiamo I_j un particolare vettore colonna di I_n, e con A la matrice che studiamo.
Il prodotto riga-colonna non commutativo:
"$A \cdot I_j$"
darà come risultato la j-esima colonna di A.

Caso simile con i vettori riga: indichiamo I_i un particolare vettore riga di I_n, con A la solita matrice, e il prodotto riga-colonna non commutativo:

"$I_i \cdot A$"
darà come risultato la i-esima riga di A

Riassumendo:

"$A \cdot I_j$" = vettore colonna j-esimo di A

"$I_i \cdot A$" = vettore riga i-esimo di A

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo il 2° vettore riga di A, dunque

$$I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Vogliamo il 3° vettore colonna di A ora, dunque

$$A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Trasposta di una matrice data:

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Si dice trasposta di A la matrice che si ottiene "scambiando le righe con le colonne"

La notazione più comune è ^tA

" $A = (a_{i,j})$; $^tA = (a_{j,i})$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà della matrice trasposta:

- $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- $^t(c \cdot A) = c \cdot {}^tA$
- $^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

Alcune proprietà delle matrici, e alcune nomenclature

Nell'algebra, vale il principio di annullamento del prodotto, ossia, quando abbiamo

$a \cdot b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

Sappiamo che

$a = 0 \vee b = 0$

Ciò nelle matrici non vale: esistono matrici che, moltiplicate tra loro, danno come risultato la matrice nulla.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1-2+1 & 0 \\ 2-4+2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dal momento che non vale la legge dell'annullamento del prodotto, non è neanche possibile semplificare espressioni del tipo

"$AB = AC$" , che, numericamente, permetterebbero la divisione in entrambi i membri di "A"

Esistono in realtà, dopo aver fatto alcune supposizioni, casi in cui è possibile una semplificazione di questo tipo, ma non si tratta di un caso generale, ergo non è una proprietà.

Potenza di una matrice, e proprietà relative

$A \in \mathbb{R}^{m,m}$,

$A^2 = A \cdot A$ (dunque ha solo senso con matrici quadrate)

A^n sarà dunque sempre dello stesso ordine di A

Proprietà :

- $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$
- $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$
- $A^0 = I_m$ con $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

Particolarità :

- Esistono matrici non nulle le cui potenze A^n da un certo n in avanti danno una matrice nulla. Esse vengono dette "Matrici Nilpotenti".

- Esistono matrici non banali ($A \neq I_m$; $A \neq 0$) per cui $A^n = A$, e vengono dette "Matrici idempotenti".

Matrici inverse (caso 2x2)

Tra matrici, non esiste il concetto di divisione, ma ciò che più si può avvicinare ad esso è il concetto di "matrice inversa".
Immaginiamo di avere un numero razionale qualunque, il suo inverso è il numero che, se moltiplicato con esso, da 1

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

L'inversa di una matrice è quella particolare matrice che, se moltiplicata con quella iniziale, dà la matrice identica.

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,m}$.

A è invertibile se esiste una matrice B per cui risulta
$A \cdot B = I_m$ o $B \cdot A = I_m$
Comunemente, l'inversa di una matrice A è indicata con A^{-1}

Esiste un criterio per verificare se una matrice è invertibile o meno.
Abbiamo $A \in \mathbb{R}^{2,2}$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A è invertibile se e solo se :
"$(ad - bc) \neq 0$"

Intendiamo ora dimostrare questo teorema, e la dimostrazione sarà divisa in 2 punti :
1) Determinare l'inversa di A sapendo che $(ad - bc) \neq 0$
2) Verificare che la matrice non è invertibile con $(ad - bc) = 0$

1) - Consideriamo una matrice B, nella quale scambiamo di posto i termini della diagonale principale, e cambiamo di posto gli altri

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Moltiplichiamo A e B

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & \cancel{-ab}+\cancel{ab} \\ \cancel{cd}-\cancel{dc} & -bc+ad \end{pmatrix}.$$

- Moltiplichiamo ora la matrice per $\dfrac{1}{ad-bc}$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto la matrice identica

2) - Abbiamo $ad-bc=0$, vogliamo verificare che A non è invertibile.

- Torniamo ad $A\cdot B$, troveremo che

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad \text{ma } ad-bc=0 \implies AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Supponiamo per assurdo che l'inversa ci sia, dunque $AA^{-1}=I$
- Moltiplichiamo a sinistra per la nostra B

$B\cdot(AA^{-1}) = B\cdot I$ $\qquad B\cdot I = B$

Vale la proprietà associativa, dunque

$(B\cdot A)\,A^{-1} = B$ $\qquad B\cdot A=0,\ A=0$, dunque

$0=B$

Siamo arrivati a un assurdo.

Inoltre, il numero $(ad-bc)$ è definito come "determinante della matrice", e si indica:

- $\det A$
- $|A|$
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Dunque, se $|A|\neq 0$, la matrice è invertibile.

Estensione del teorema sull'invertibilità delle matrici

Finora abbiamo studiato matrici $M\in\mathbb{R}^{2,2}$, ma in realtà il caso si può estendere a ogni n reale, sempre con matrici quadrate. L'inversa di una matrice sarà sempre unica, e la condizione di invertibilità sempre la stessa: $\det(M)\neq 0$.

Complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata

Il complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata, è il determinante della matrice ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, con i, j indicanti la posizione dell'elemento della matrice. Questo numero andrà ancora moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. In parole povere, se $i+j$ è pari, si mantiene il segno, se dispari si cambia.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 4 & 5 & \cancel{7} \\ 0 & 0 & \cancel{1} \end{pmatrix} \qquad A_{1,3} = 4\cdot 0 - 0\cdot 5 = 0$$

Come visto dall'esempio, il complemento algebrico si indica con $A_{i,j}$.

Vengono dimostrate le seguenti cose:

- Sia A^* (o "aggiunta di A"), la trasposta della matrice che si ottiene da A sostituendo a ogni elemento il suo complemento algebrico; Per i teoremi di Laplace, si ha che $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, e il prodotto da come risultato un "$d \cdot I$", ossia la matrice identica per un numero. Questo è il determinante di A.
- Se $\det A \neq 0$, A è invertibile, e $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$
- Se $\det A = 0$, A non è invertibile

Teoremi di Laplace per il calcolo del determinante

- Se si moltiplicano gli elementi di una riga o di una colonna di una matrice quadrata, ognuno per il rispettivo complemento algebrico, e si sommano, si ottiene sempre lo stesso numero, ossia il determinante della matrice
- Se il determinante da una riga viene 0, dunque è sempre 0

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \cdot A_{k,j} \quad \text{(colonne)}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot A_{i,j} \quad \text{(righe)}$$

Regola di Sarrus per trovare il determinante di una matrice 3x3

1) Copio le prime due colonne a lato della matrice a destra
2) Moltiplico le diagonali dando a quelle da alto-sinistra a basso-destra segno +, e cambiando il segno a quelle da alto-destra a basso-sinistra
3) Sommo algebricamente il tutto

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 - \left(2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2\right) = 3$$

$\det(A) = 3$

Questa regola si può solo usare con questo tipo di matrici. È tuttavia consigliabile cercare degli "0" nella matrice, e usare il teorema di Laplace

Sistemi Lineari

Viene definito "lineare" un sistema di equazioni di I grado di m equazioni ed n incognite.
Siamo abituati a studiare sistemi tramite sostituzioni di variabili, metodo corretto ma lento e difficile.
Quando le incognite sono tante, è praticamente impossibile usare sostituzione, sistema oltretutto difficilmente implementabile in un calcolatore.
Tramite l'introduzione delle matrici, è possibile velocizzare molto i conti.

La notazione con la quale siamo abituati a vedere un sistema, è questa:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + \dots \quad \dots \quad \dots a_{2,n}x_n \\ \dots \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots \dots a_{m,n}x_n \end{cases}$$

È possibile esprimere con una notazione matriciale il sistema, in questo modo:
"$AX = B$"
Dove
$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ed è la MATRICE DEI COEFFICIENTI
$B \in \mathbb{R}^{m,1}$ ed è la MATRICE DEI TERMINI NOTI
$X \in \mathbb{R}^{n,1}$ ed è la MATRICE DELLE INCOGNITE

Il prodotto riga-colonna $AX = B$ darà come risultato la notazione classica del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \dots \\ b_{m,1} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$$

Altra notazione comune è quella che permette, reinterpretando B, di ottenere la notazione classica mediante una sommatoria

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \dots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \quad x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \dots + \dots = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si inizia a introdurre il concetto di combinazione lineare di vettori: prendere cioè un vettore, moltiplicarlo per un numero e sommare.
Qua la colonna B dei termini noti è espressa come combinazione lineare delle colonne $C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)$

Combinazioni lineari

Prima abbiamo visto un esempio

$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = B$

E abbiamo detto che B é combinazione lineare di C_n

Definiamo meglio il fatto: abbiamo n vettori (negli esempi, usiamo vettori colonna). Se moltiplicando e sommando tra loro i vettori (moltiplicando i singoli vettori per numeri anche diversi, e sommare i risultati, NON moltiplicare riga-colonna), si riesce a ottenere B, allora B é combinazione lineare dei vari vettori

Esempio:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B non é combinazione lineare di C_1, C_2, perché non esiste numero che, moltiplicato per il vettore e sommando tra loro i vettori, permetta di raggiungere l' "1" dell'elemento "b_{31}".

Se $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ sono vettori riga o colonna, si indica con

"$\mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots \bar{v}_n)$"

l'insieme di tutti i vettori riga o colonna combinazioni lineari dei vari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n$

Nell'esempio, $B \notin \mathcal{L}(C_1, C_2)$

Metodo di riduzione per risolvere sistemi lineari

Introduciamo due fondamentali concetti, necessari ad applicare il metodo di riduzione:

- Matrice ridotta: si dice ridotta (per righe) la matrice per la quale, in ogni riga non nulla, c'é almeno 1 elemento non nullo sotto il quale vi sono tutti zeri.

  N.B.: Nessuna richiesta viene fatta all'ultima riga.

- Trasformazioni elementari nella matrice: sono 3 tipi di operazioni che si possono applicare ad una matrice, e che seguono le seguenti proposizioni:

a) Con un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe si può trasformare ogni matrice A in una sua ridotta A'

b) Ogni trasformazione elementare sulle righe di A trasforma il sistema $AX=0$ (per ora, studiamo solo sistemi omogenei) in un altro sistema, equivalente (ossia, con le stesse soluzioni)

Trasformazioni elementari:

I tipo) $r_i \longrightarrow r_i + a r_j$ con $i \neq j$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(Si prende una riga, e la si sostituisce nella riga che ottengo sommando a quella un'altra moltiplicata per un numero)

II tipo) $r_i \longrightarrow a r_i$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(Prendo una riga e la moltiplico per un numero)

III tipo) $r_i \longleftrightarrow r_j$ $i \neq j$

(Scambio tra loro 2 righe)

Osservazioni e consigli:

- In presenza di un parametro, è consigliabile evitare di far apparire "0" al di sotto di esso (per comodità di calcoli)
- Dopo aver ridotto con successo la matrice, conviene cercar di far apparire degli "0" anche sopra, e non solo sotto, per avere meno complicazioni in seguito (matrici fortemente ridotte - parte 1)
- Conviene far anche apparire degli "1", in quanto più semplici da gestire. (matrici fortemente ridotte - parte 2)

Rango di una matrice: una prima definizione

Data A, matrice ridotta, il rango di A è il numero di righe non nulle.

Se A non è ridotta, allora è il numero di righe di una matrice ridotta da lei "A'" con un numero finito di trasformazioni

Il rango di una matrice A si indica con

$\rho(A)$, $rank(A)$, $rk(A)$

Parlando di sistemi omogenei, ossia con il vettore dei termini noti nullo,

- Se $\rho(A) = n$, c'è solo la soluzione banale, ossia quella nulla
- Se $\rho(A) < n$, vi sono $n - \rho(A)$ incognite, e le altre sono determinate di conseguenza.

Altre osservazioni sul rango

Abbiamo per ora definito il rango di una matrice $\rho(A)$ il numero di righe non nulle di una matrice ridotta equivalente ad una di partenza, ossia ottenuta da A dopo aver applicato un numero finito di trasformazioni elementari

Questa definizione è importante in quanto non dipende da quante e quali trasformazioni vengono applicate alla matrice

Facciamo alcune osservazioni, dopo aver semplificato alcune cose:

$p = \rho(A)$ $\quad n =$ numero di incognite $\quad m =$ numero di equazioni

Esaminiamo 2 casi:

- $p = m = n$

L'ultima riga sarà composta da $ax_i = 0$, la penultima $cx_i + dx_i = 0$, e così via. Per sostituzione, tutte le incognite varranno 0.

N.B: la matrice dei coefficienti è la solita A, X è il vettore colonna delle incognite, B per ora è uguale a 0, in quanto parliamo ancora di sistemi omogenei

- $p < n$

Avremo, in fondo, un certo numero di righe nulle, che verificheranno la soluzione $0 = 0$ (quindi, indeterminate, ma sempre valide).

Al di sopra di queste, la matrice è riconducibile a una matrice triangolare.

Si ricaveranno, in questi sistemi, tante incognite quanto il rango, ma alcune in funzione di alcune particolari incognite, che saranno "$n-p$". Esse sono dette "incognite libere".

Si dice dunque che vi sono ∞^{n-p} soluzioni.

Notiamo che i casi vengono studiati non tanto dal numero di equazioni m, quanto a partire dal rango p.

Proprietà importante:

Abbiamo un sistema omogeneo $AX=0$; la matrice A è invertibile per ipotesi; in questo caso,

$$AX=0 \quad ; \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}\cdot 0 \quad ; \quad \boxed{X=0}$$

Teorema: sia A matrice quadrata, e invertibile. Sappiamo che la condizione di invertibilità è il fatto che $\det(A) \neq 0$.

Ciò crea un legame tra determinante e rango: il rango di A è uguale a ~~n~~ se e solo se il determinante di A è diverso da 0, e dunque la matrice invertibile

$$A \in \mathbb{R}^{n,n} \; ; \; \exists\, A^{-1} \iff \det A \neq 0 \iff \rho(A) = n$$

Sistemi Lineari "$AX=B$"

Finora abbiamo sempre parlato di sistemi omogenei, ossia $AX=0$; $B=0$.

Essi sono sempre risolubili, in quanto possono avere sempre almeno la soluzione banale $X=0$.

Un sistema lineare può non avere soluzioni

Iniziamo a introdurre nuovi concetti per lo studio di sistemi di questo tipo: sappiamo già che A è definita "matrice dei coefficienti", introduciamo ora il concetto di "matrice completa" $(A|B)$

Questa è semplicemente la matrice dei coefficienti e quella dei termini noti unite, separate da una riga verticale per distinguere.

Proposizione: se il rango della matrice completa $A|B$ è maggiore del rango della matrice dei coefficienti A, il sistema non ha soluzioni

Dimostrazione:

Come per i sistemi omogenei, è possibile applicare il metodo di riduzione, riducendo la matrice tramite un numero finito di applicazioni delle varie operazioni (o trasformazioni) elementari.

Se "a sinistra" otteniamo delle righe nulle, per la nostra definizione di rango, $\rho(A) < \rho(A|B)$, e vedremmo che un numero, in un'equazione, dovrebbe essere uguale a 0

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{1,1} & a_{1,p} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_n \end{array}\right) \qquad \text{quindi, } b_n = 0$$

Ma ciò è un assurdo: b_n è un numero, e solo 0 può essere uguale a 0.

Il sistema dunque non è compatibile.

Se $\rho(A) = \rho(A|B)$, non vi sarà nessuna relazione assurda.

Un sistema non omogeneo da qui in poi viene studiato come uno omogeneo.

Tutto, dunque, dipende dal rango delle due matrici. Lo studio di questi sistemi è effettuabile grazie al Teorema di Rouché-Capelli

Teorema di Rouché - Capelli

Dato un sistema lineare $AX=B$,

1) Il sistema è compatibile (ossia ha almeno una soluzione) se e solo se $\rho(A)=\rho(A|B)$ con A matrice dei coefficienti e $A|B$ matrice completa

2) Se il sistema è compatibile, abbiamo due sottocasi:

a) Se $\rho(A)=\rho(A|B)=n$, il sistema ammette 1 soluzione

b) Se $\rho(A)=\rho(A|B) < n$, si possono esprimere p (con $p=\rho(A)=\rho(A|B)$) incognite, in funzione di $n-p$ incognite dette "libere", ossia che possono assumere valore arbitrario. Si dice che vi sono ∞^{n-p} soluzioni.

Sistemi lineari non omogenei e sistemi omogenei associati

Sia $AX=B$ un sistema non omogeneo, chiamiamo "sistema omogeneo associato" il sistema $AX=0$.

Ci riferiamo di solito a sistemi con almeno 1 soluzione

Proposizione: se il sistema $AX=B$ è risolubile (compatibile), ossia ha almeno una soluzione che chiamiamo "X_0", le soluzioni sono tutti e soli vettori colonna del tipo $X=X_0+Y$, con Y soluzione del sistema omogeneo associato

Abbiamo 2 punti da analizzare:

1) Se Y è soluzione del sistema omogeneo associato ad $AX=B$, allora X_0+Y è soluzione di $AX=B$

2) Se $\overline{X}$ è soluzione di $AX=B$, allora è necessariamente della forma

$\overline{X}=X_0+$ Soluzione di $AX=0$, e quindi, $\overline{X}-X_0=$ Soluzione di $AX=0$

Dimostrazione punto 1: se Y è soluzione di $AX=0$, allora anche di $AX=B$

$A(X_0+Y)=B$; Ma AX_0 è soluzione di $AX=B$

$AX_0+AY=B$ Ma $AY=0$, in quanto soluzione del sistema omogeneo

Dunque, X_0+Y è soluzione di $AX=B$

Dimostrazione punto 2:

$$A(\overline{X}-X_0) \; ; A\overline{X}-AX_0 = \begin{cases} A\overline{X}=B \\ AX_0=B \end{cases} \Rightarrow = B-B=0$$

(e quindi, soluzioni del sistema associato omogeneo).

Equazioni matriciali $AX=B$, con soluzioni "a più colonne".

Finora abbiamo studiato sistemi con soluzioni "a una sola colonna", ossia in cui B era solo un vettore colonna.

È possibile lavorare, sempre e solo a condizione "n righe A = n righe B", anche con matrici dei termini noti B con più di una colonna.

Si tratterebbe in realtà di risolvere sistemi multipli, uno per ogni colonna di B ma in realtà, è possibile lavorare contemporaneamente su tutti i sistemi.

Considerando la matrice $(A|B)$ con tutte le colonne, applicando quindi la riduzione a ogni membro della matrice, e risolvendo il sistema usando dei vettori riga come termini noti, si può alla fine scomporre il tutto.

Riportato ora un esempio per chiarificare il tutto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Per fare B in seguito ad essere moltiplicata per A, $X \in \mathbb{R}^{3,2}$.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Applicando una trasformazione "$R_2 = R_2 + 6 \cdot R_1$" otteniamo

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 16 & 23 & 0 & 9 & 4 \end{array}\right)$$

Il sistema ridotto sarà:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = (1;0) \\ 16x_1 + 23x_2 = (9;4) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{23}{16}x_2 + \left(\frac{9}{16} ; \frac{1}{4}\right) \\ x_3 = 2x_1 + 3x_2 - (1;0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{23}{16}x_2 + \left(\frac{9}{16} ; \frac{1}{4}\right) \\ x_3 = \frac{1}{8}x_2 + \left(\frac{1}{8} ; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Abbiamo trovato 1 incognita libera

Dividiamo ora le soluzioni:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{23}{16}t + \frac{9}{16} & -\frac{23}{16}s + \frac{1}{4} \\ t & s \\ \frac{1}{8}t + \frac{1}{8} & \frac{1}{8}s + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Attenzione: se troviamo un sistema in forma "$X \cdot A = B$", trasponiamo il tutto, ottenendo

$${}^tA \cdot {}^tX = {}^tB$$

E risolviamo.

Equazioni matriciali e invertibilità di una matrice

L'inversa di una matrice è quella matrice che, se moltiplicata per quella di partenza, dà come risultato la matrice identica I

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

Considerando A^{-1} incognita, trovare l'inversa diventa risolvere l'equazione matriciale

$$AX = I_n$$

Notiamo che il rango di I_n è sempre n. Dunque, $\rho(A) = \rho(A|I)$ è condizione necessaria e sufficiente per risolvere il sistema.

$\rho(A)$ deve essere massimo, e dunque $\det(A) \neq 0$

Abbiamo a questo punto 2 strade per trovare l'inversa:

1) Risolvere l'equazione matriciale $AX = B$ e relativo sistema, con $B = I$

2) Lavorare su $(A|B)$, e applicare riduzioni (tramite trasformazioni elementari) fino a quando a sinistra non si otterrà la matrice identica. A questo punto, a destra di "|" ci sarà A^{-1}.

Determinanti e trasformazioni elementari
Calcolare con Laplace il determinante di una matrice può essere scomodo, ma è possibile facilitare i calcoli tramite la riduzione: aggiungendo degli zeri alla matrice, tramite le trasformazioni elementari, il calcolo del determinante è molto facilitato.
Bisogna però tener conto degli effetti delle trasformazioni lineari elementari sul determinante:

1) Ogni trasformazione del tipo $R_i \to R_i + a R_j$ con $a \neq j$ non provoca variazioni del determinante

2) Lo scambio di due righe provoca un cambio di segno del $\det(A)$

3) Moltiplicando una riga per un numero, il determinante andrà diviso per quel numero.

N.B.: la condizione ottimale per il calcolo del determinante è quella della matrice triangolare (superiore o inferiore), in cui il determinante è il prodotto degli elementi della diagonale principale.

Dipendenza o indipendenza lineare tra vettori
Finora abbiam trovato la parola "vettore" parlando di matrici riga o colonna.
Vi sono diverse notazioni per indicare vettori, quella che userò io è una lettera minuscola dell'alfabeto (una delle ultime) con sopra una freccetta (es: $\vec{v}$).

Identifichiamo dunque per ora come un vettore una sequenza di elementi
Es:
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots)$ se $\vec{v} \in \mathbb{R}^{1,n}$, $\vec{v} = (v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_n)$

se $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}$

Dove i vari v_i sono dei valori reali
Torniamo ora ai sistemi lineari, per poter dare una definizione di dipendenza lineare tra vettori.
Avevamo detto che un sistema lineare $AX=B$ si può scrivere come combinazione lineare di B, ossia come somma di ogni vettore colonna di A
$x_1 \vec{A}_1 + x_2 \vec{A}_2 + \ldots x_n \vec{A}_n = \vec{B}$

Per arrivare alla definizione, prendiamo in analisi il sistema omogeneo, ossia $A \cdot X = 0$
$x_1 \vec{A}_1 + x_2 \vec{A}_2 + \ldots + x_n \vec{A}_n = \vec{0}$
Vi sono due casi possibili:
1) Vi è solo la soluzione banale
2) Esistono soluzioni non nulle, ossia non solo quella banale

È possibile riscrivere questi due casi in altro modo:
1) Il vettore nullo si scrive come combinazione lineare di $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \ldots \vec{A}_n$, solo se tutti i coefficienti $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sono nulli

2) Esistono valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tutti nulli con, come risultato

della combinazione lineare, il vettore nullo.
Nel primo caso diremo che i vettori colonna sono linearmente indipendenti, nel secondo caso che sono linearmente dipendenti.

Definizione: dati r vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$, i vettori si dicono linearmente indipendenti se, avendo:

$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_r \vec{v}_r = \vec{0}$, $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$

In parole povere, se scrivo una combinazione lineare dei vettori e voglio ottenere il vettore nullo, se i vettori sono linearmente indipendenti, posso solo moltiplicare per zero i singoli vettori.
In questo caso, l'insieme $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$ si dice "libero".

Se invece esiste una combinazione lineare di $\vec{v}_1, v_2, \dots, \vec{v}_r$, con i relativi coefficienti non tutti nulli e con risultato il vettore nullo, i vettori sono dipendenti linearmente tra loro.

Osservazioni: se abbiamo un unico vettore, e $x_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$,
a) O $x_1 = 0$, $\vec{v}_1 \neq 0$, e il vettore è linearmente indipendente
b) O $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $x_1 \neq 0$, e il vettore è linearmente dipendente.

La proprietà di dipendenza o indipendenza lineare, non dipende dalla posizione (meglio dire, dall'ordine) dei vettori
La presenza del vettore nullo in un insieme, inoltre, fa sì che l'insieme sia linearmente dipendente.
Infine, se a un insieme linearmente dipendente aggiungiamo un vettore, il sistema rimarrà linearmente dipendente.

Un caso particolare:
Consideriamo i vettori

$\vec{e}_1 = (1 \ 0 \ 0 \dots 0)$
$\vec{e}_2 = (0 \ 1 \ 0 \dots 0)$
$\vec{e}_3 = (0 \ 0 \ 1 \dots 0)$
$\vec{e}_n = (0 \ 0 \ 0 \dots 1)$

$\mathcal{E}$ essi vengono chiamati "versori della base canonica di $\mathbb{R}^n$".
Questi vettori, sono linearmente indipendenti.

Torniamo alla definizione mediante i sistemi omogenei.
Abbiamo:

$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$, $x_1, x_2 \neq 0$

$$\vec{v}_2 = -\frac{x_1}{x_2} \cdot \vec{v}_1$$

Dunque, in caso di dipendenza lineare, i due vettori sono proporzionali.

Teorema
Proposizione 1: $\exists$ vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.
Se sono dipendenti, dunque, posso ricavare il vettore come combinazione lineare degli altri
Proposizione 1-bis: $\exists$ vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se si ha uno di questi casi:

1) Il primo vettore è nullo $(\vec{v}_1 = 0)$

2) Esiste un indice tale per cui $\vec{v}_i$ è combinazione lineare di $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_{i-1}$

In parole povere, o un vettore è nullo, o il secondo è multiplo del primo, o il terzo combinazione lineare dei primi due, e così via.

N.B.: nel caso 1 abbiamo detto "il primo", ma in realtà, può essere un vettore qualunque.

Torniamo ora alle matrici, e riportiamo le definizioni ora viste ad esse.

Consideriamo una matrice $A \in R^{m,n}$, possiamo dire che

1) Le colonne di A sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema omogeneo $AX=0$ ha solo la soluzione nulla, e quindi se e solo se $\rho(A) = n$

2) Le righe non nulle di una matrice ridotta sono linearmente indipendenti

Abbiamo definito ridotta una matrice in cui sotto almeno un elemento per riga non nullo vi son solo zeri. Applicando la proposizione 1-bis a ciò, possiamo dimostrare ciò che abbiamo appena detto, partendo dal basso verso l'alto.

Proposizione 2: se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ sono le righe di una matrice A, ogni trasformazione elementare trasformerà A in un'A' le cui righe sono linearmente indipendenti se e solo se lo erano quelle di A.
Se al termine della riduzione appare almeno o anche solo una riga vuota, la matrice A ha righe linearmente dipendenti tra loro. Dunque,

Proposizione 3: sia A una matrice, le cui righe sono linearmente dipendenti. Queste lo sono in effetti, come già accennato, se e solo se riducendo si ottiene una riga nulla.
Riprendiamo la prima nozione di rango; uniamola a quella di dipendenza lineare, e vediamo che, se $\rho(A) = r$, i vettori sono linearmente indipendenti, se $\rho(A) < r$, i vettori sono linearmente dipendenti.

Osservazione: se $r > n$, ossia il numero di vettori è maggiore del numero di colonne, allora i vettori sono sempre linearmente dipendenti.

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Per $\mathbb{R}^n$ intendiamo tutte le possibili successioni di n numeri, rappresentabili con dei vettori.
Tra queste successioni, ve ne sono alcune particolari, dette "sottospazi", in quanto rispecchiano alcune caratteristiche, e soddisfano alcune condizioni; si dice dunque che un sottoinsieme V di $\mathbb{R}^n$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se queste 3 richieste sono soddisfatte:

1) Il vettore nullo $\vec{0}$ appartiene a V (V non deve essere vuoto)
2) Se prendo due vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ appartenenti a V, anche la loro somma deve appartenere a V
3) Se prendo un numero $a \in \mathbb{R}$, un vettore appartenente al sottoinsieme $\vec{v_i} \in V$, moltiplicato per a, deve dare un $a \cdot \vec{v_i} \in V$.

Per verificare se un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è effettivamente un sottospazio, conviene prima controllare la condizione 1, poi eventualmente andare avanti.

Osservazione 1: se prendo un vettore della forma
$\vec{v} = (x; y; 0) = x(1; 0; 0) + y(0; 1; 0)$
gli elementi di $\vec{v}$ si possono ottenere come combinazione lineare dei due vettori
$\mathcal{L}\{(1 \ 0 \ 0); (0 \ 1 \ 0)\}$

Osservazione 2: più avanti dimostreremo che con $\mathbb{R}^2$, tutti i sottospazi sono rappresentabili con rette passanti per O, con $\mathbb{R}^3$ tutti i piani a quota $= 0$ passanti per O.

L'osservazione 1 si può generalizzare dicendo:
Proposizione 1: Siano $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_r}$ vettori di $\mathbb{R}^n$, e sia
$V = \mathcal{L}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \dots; \vec{v_r})$
Dunque V è un sottospazio.
Dimostrazione: caso con $r = 2$
1) Il vettore nullo appartiene al sottospazio

2) $\mathcal{L}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \dots \vec{v_r})$ è chiuso rispetto alla somma
Prendiamo due vettori $\vec{u}$; $\vec{w} \in V$
$\vec{u} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$
$\vec{w} = b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} \qquad b_1, b_2 \in \mathbb{R}$
$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1)\vec{v_1} + (a_2 + b_2)\vec{v_2}$, e dunque è combinazione lineare di $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$

3) V è chiuso rispetto al prodotto di numero per vettori
$\vec{u} \in V$, $\vec{u} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$
$K \in \mathbb{R}$
$K \cdot \vec{u} = K(a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}) = Ka_1\vec{v_1} + Ka_2\vec{v_2}$
E quindi è combinazione lineare.

Da ciò possiamo trarre una proposizione "gemella":
Proposizione 2: ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è del tipo $\mathcal{L}(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \dots \vec{v_r})$ (per opportuna scelta di $\vec{v_1} \dots \vec{v_r}$).
Dimostrazione: Sia V un sottospazio. Nel sottospazio deve esserci $\vec{0}$. Analizziamo i casi possibili:

$$
V \begin{cases} V = \{\vec{0}\} = \mathcal{L}\{\vec{0}\} \\ V \neq \{\vec{0}\} \rightarrow \exists\, \vec{v_1} \in V \begin{cases} V = \{\vec{0}; \vec{v_1}\} = \mathcal{L}\{\vec{v_1}\} \\ V \neq \mathcal{L}\{\vec{v_1}\} \rightarrow \exists\, \vec{v_2} \in V \begin{cases} V = \mathcal{L}\{\vec{v_1}; \vec{v_2}\} \\ V \neq \mathcal{L}\{\vec{v_1}; \vec{v_2}\} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

In realtà, la biforcazione non è illimitata: a un certo punto finisce, e la seconda eventualità non si verifica più;

il procedimento infatti finisce perché i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_z}$ sono uno non nullo, l'altro non multiplo, il terzo non combinazione lineare dei primi e dunque linearmente indipendenti. Su $\mathbb{R}^n$, dunque, il massimo numero di vettori linearmente dipendenti è n, e qui finirà il ciclo.
Ciò crea una successione di vettori generatori del sottospazio, e da qui partiremo per studiare la definizione di base.

Sottospazi e Matrici
Consideriamo un sistema omogeneo $AX=0$
Per quanto riguarda le soluzioni, abbiamo 2 casi fondamentali:
1) La soluzione banale $(\rho(A)=n)$
2) Altre soluzioni $(\rho(A)<n)$

Le soluzioni si possono scrivere come combinazione lineare delle colonne (nel caso 2 ovviamente).
Ogni soluzione è combinazione lineare delle $n-\rho(A)$ soluzioni libere.
Per questo, possiamo affermare che (con la terminologia dei sottospazi), le soluzioni del sistema omogeneo, sono gli elementi del sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ $V=\mathcal{L}\{X_1; X_2; \dots X_n\}$
Proposizione generale: le soluzioni di un sistema omogeneo $AX=0$ con $A\in\mathbb{R}^{m,n}$ formano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.
N.B. : Esso può essere banale $(V=\{\vec{0}\})$ o meno.

Ciò vale solo per i sistemi omogenei: negli altri, la soluzione nulla infatti non esiste.

Spazio delle righe, spazio delle colonne
Definizione: data una matrice $A\in\mathbb{R}^{m,n}$, lo spazio delle righe $\mathcal{R}(A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (identificato con $\mathbb{R}^{1,n}$, in quanto ogni riga ha n elementi) identificato dalle righe di A. I suoi elementi sono tutte le combinazioni lineari delle righe.
Analogamente, $\mathcal{C}(A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (identificato con $\mathbb{R}^{m,1}$), formato dalle combinazioni lineari delle colonne di A.
Osservazione: $\mathcal{C}(A)=\mathcal{R}({}^tA)$

Proposizione: se su A si operano trasformazioni elementari (sulle righe), ottenendo la matrice ridotta B, si ha che:
1) I sottospazi delle soluzioni di $AX=0$ e $BX=0$ sono uguali
2) $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(B)$

La 1 si può anche scrivere
$Ker(A)=Ker(B)$
Ossia, $Ker(M)$ indica "l'insieme di soluzioni del sistema $MX=0$".

N.B. : Se si riduce una matrice A, ottenendo B, le righe non nulle di B sono generatori, linearmente indipendenti.
I vettori generati da A sono gli stessi da B, ma i generatori di B sono linearmente indipendenti, e da qui diamo una definizione di base

Base:

Definizione: dati n vettori $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n$ di sottospazio $V \in \mathbb{R}^n$, si dice che essi formano una base per V se
1) Generano V $\left(V = \mathcal{L}\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \dots \vec{v}_n\}\right)$
2) Sono linearmente indipendenti tra loro.

Se abbiamo un sottospazio, è possibile che alcuni generatori siano inutili, ossia, che anche senza di loro è possibile generare il sottospazio.
Essendo generatori, e indipendenti, sono anche tutti indispensabili
Proposizione: ogni vettore, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m$, se essi formano una base, si può esprimere in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base.
In parole povere, se ho una base di tre vettori, e quindi se i tre vettori sono linearmente indipendenti e generatori, allora quella specifica base si può scrivere in modo unico
Dimostrazione: supponiamo per assurdo che ci sia un vettore $\vec{v}$ che si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ in 2 modi

$$\vec{v} = \begin{cases} a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n \\ b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \dots + b_n\vec{v}_n \end{cases}$$

Le due forme dovrebbero essere uguali, e, dunque, sommando, si dovrebbe ottenere $\vec{0}$
$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 + \dots + (a_n - b_n)\vec{v}_n = \vec{0}$$
Per essere linearmente indipendenti i vettori, i coefficienti perché vi sia $\vec{0}$ devono essere tutti uguali a 0, e dunque
$a_1 - b_1 = 0$; $a_2 - b_2 = 0$; $\dots$; $a_n - b_n = 0$;
$a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $\dots$; $a_n = b_n$

Definizione: Se $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ formano una base per V e $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots a_n\vec{v}_n$, allora $a_1, a_2, \dots a_n$, si dicono componenti di $\vec{v}$ rispetto alla base

Le basi sono insiemi ordinati, e se scambio l'ordine dei vettori, avrò sempre una base, ma non la stessa.
Ogni sottospazio, tranne $V = \{\vec{0}\}$, ha una base. Per convenzione, si dice che il sottospazio banale abbia come base l'insieme vuoto.
L'esigenza di introdurre questa convenzione è data dalla definizione di dimensione di un sottospazio.

Lemma di Steinitz: supponiamo di trovare in un sottospazio V due insiemi di vettori $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_m\}$ e $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_s\}$ con queste proprietà:
1) $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_m$ generano V
2) $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_s$ sono linearmente indipendenti
Allora, $m \geq s$
Conseguenze del Lemma di Steinitz:
1) Due basi dello stesso sottospazio vettoriale V hanno lo stesso numero di elementi
Dimostrazione: prendiamo due basi, $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_{n_1}\}$ e $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_{n_2}\}$ due basi di V. I primi sono generatori per V, i secondi

linearmente indipendenti. Facendo intervenire il lemma, $r_1 \leq r_2$.
Posso però, in quanto i due insiemi entrambi basi, dire che i primi sono linearmente indipendenti e i secondi generatori, dicendo così che $r_1 \leq r_2$

Dunque, $r_1 = r_2$.

2) Se $\vec{v_1} \dots \vec{v_s}$ sono linearmente indipendenti, allora $s \leq r$

3) Se $\vec{v_1} \dots \vec{v_t}$ sono generatori, allora $t \leq r$

Definizione: viene definita dimensione di un sottospazio V $\dim V$ il numero di vettori che costituisce la base (una base).
Tramite questa definizione, motiviamo e spieghiamo le conseguenze del Lemma:

2) Se i vettori sono linearmente indipendenti, allora il loro numero è minore o uguale della dimensione, e si ottiene confrontando il loro numero con il numero di una base (di vettori)

3) La dimensione è il minimo numero di vettori di un insieme che genera V

4) Se $\dim V = r$ vettori sono linearmente indipendenti, allora sono anche generatori, e viceversa.

Esistono fondamentalmente due metodi per trovare una base di V e determinarne la dimensione:

1) Metodo degli scarti successivi: dato un certo numero di generatori, controllo che il primo non sia multiplo del secondo, il terzo combinazione lineare degli altri due, e così escludo i vettori "di troppo".

2) Considero V come spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo $AX=0$. Abbiamo ora due casi:

a) Se $V = \{\vec{0}\}$, una base per V è l'insieme $\emptyset$, $\vec{v}=0$, $\dim V = 0$

b) Se $V \neq \{\vec{0}\}$, una base di V si ottiene mettendo in evidenza le incognite libere della soluzione: ogni soluzione è combinazione lineare di $n-\rho(A)$ vettori, linearmente indipendenti. Inoltre, $\dim V = (n-\rho(A))$. La base si ottiene dando valore 1 a un'incognita libera e 0 alle altre.

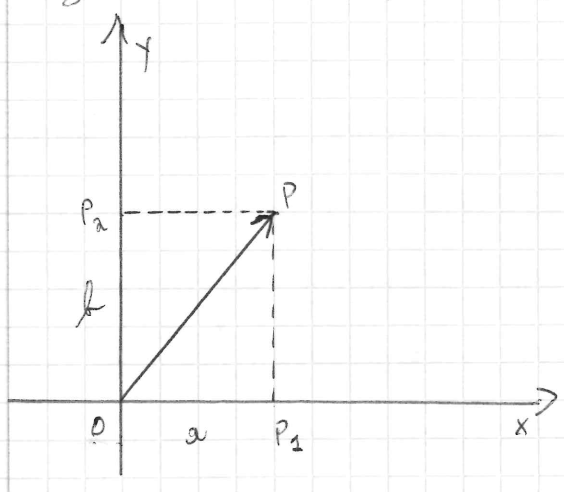
2-bis) Studio lo spazio delle colonne di $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, passando a ${}^tA$, e tornando ai casi precedenti.

Geometria

Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$

In algebra lineare abbiamo definito $\mathbb{R}^2$ come l'insieme delle coppie di numeri reali.
Diamo ora a $\mathbb{R}^2$ un significato geometrico: prendiamo una coppia di assi ortogonali tra loro (ossia perpendicolari, che formano tra di loro un angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$); una coppia di numeri si può rappresentare, sul piano "delimitato e generato" dagli assi, come un punto, e i valori sono le sue coordinate.
Tuttavia, la nozione di punto (o meglio, il suo utilizzo) è limitante, in quanto non ha senso parlare di somma o prodotto di due punti. Per questo, è stata introdotta la nozione di "vettore nel piano", ossia il segmento che unisce l'origine

degli assi O al punto P, orientato da una freccia.



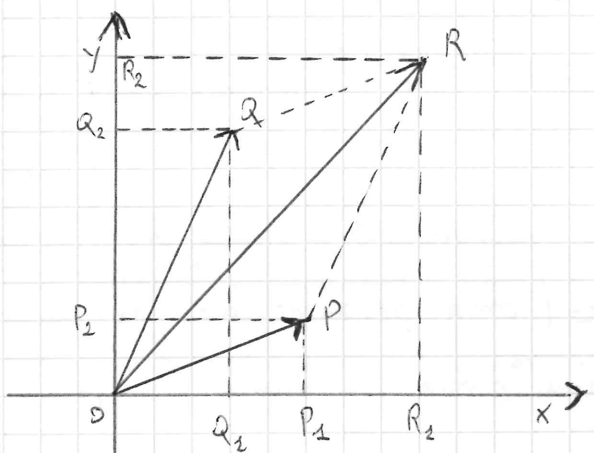
Data una coppia di valori $(a;b)$, di fianco è riportata la rappresentazione del vettore $\vec{v}=(a;b)$ nel piano.

Come abbiamo già visto in algebra lineare, anche nel piano è possibile effettuare alcune operazioni. Studiamone il significato geometrico:

Somma di due vettori

Dati due vettori $\vec{v}=(a;b)$ e $\vec{w}=(c;d)$;

$\overline{OP_1}=a$
$\overline{OQ_1}=c$
$\overline{OP_2}=b$
$\overline{OQ_2}=d$



La somma dei due vettori sarà $\vec{v}+\vec{w}=(a+c;\ b+d)$.
Graficamente, viene detta "regola del parallelepipedo", in quanto il vettore risultante è la diagonale del parallelepipedo sopra rappresentato

$\overline{OR_1}=a+c$; $\overline{OR_2}=b+d$

Prodotto di un numero per un vettore

$\vec{v}=(a;b)$; $c\in\mathbb{R}$

$c\cdot\vec{v}=c\cdot(a;b)=(c\cdot a;\ c\cdot b)$

Geometricamente, ciò che otterremo, sarà un altro vettore, di lunghezza differente, ma appartenente alla stessa retta del vettore di partenza

Fermiamoci un momento per riflettere sulle seguenti cose: se abbiamo due vettori sulla stessa retta, sommandoli o moltiplicandoli per un numero non possiamo ottenere altro che un vettore sempre appartenente alla stessa retta. Questo capitava, algebricamente, quando i due o più vettori erano uno combinazione lineare dell'altro.

Avere una base in $\mathbb{R}^2$, geometricamente, vuol dire avere due vettori linearmente indipendenti, e dunque che stanno su rette diverse.

Essi, tramite le combinazioni lineari che si possono ottenere con le trasformazioni elementari (somma e prodotto per un numero), possono generare qualunque vettore nel sottospazio.

Dunque, vettori linearmente dipendenti possono solo dare altri vettori sulla stessa retta.

Studieremo ora altre operazioni, già analizzate in algebra, dando anche a loro un significato geometrico.

Prodotto scalare

$(a;b)\cdot(c;d) = ac+bd$

Il prodotto scalare di due vettori dà come risultato un numero.

Osservazioni e proprietà del prodotto scalare:

1) Il prodotto scalare di un vettore per sé stesso è:

$(a;b)\cdot(a;b) = a^2+b^2 = \overline{OP}^2$ = distanza di P da O al quadrato.

2) $(a;b)\cdot[(c_1;d_1)+(c_2;d_2)] = (a;b)(c_1;d_1) + (a;b)(c_2;d_2)$

N.B.: dentro le [], è rappresentata una somma di due vettori, dopo l'uguale, una somma di due numeri

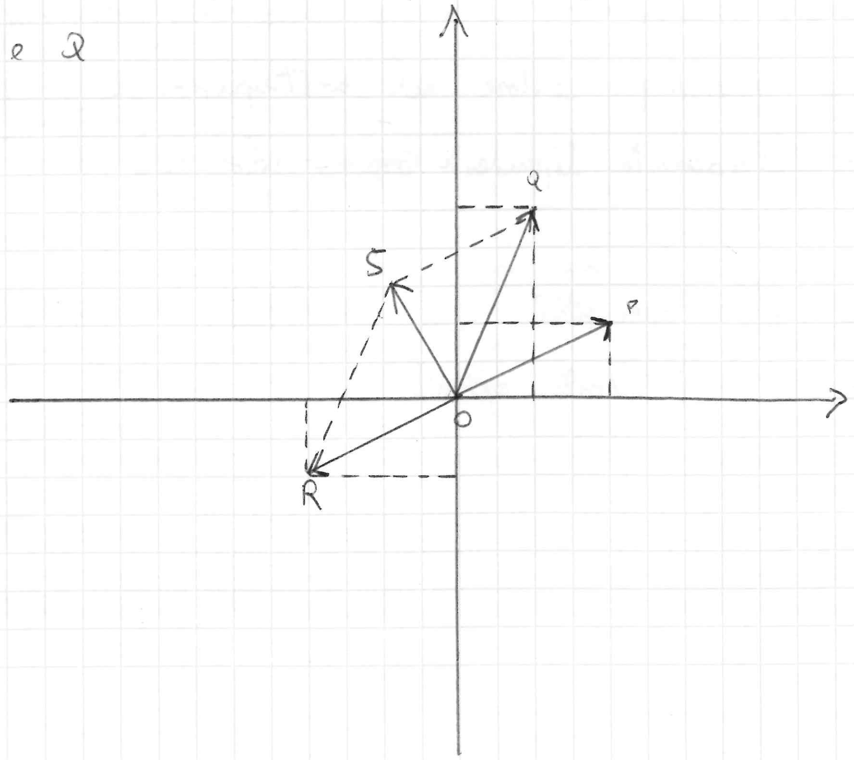
3) $(a;b)[k\cdot(c;d)] = k\cdot[(a;b)\cdot(c;d)]$

N.B.: il primo è un prodotto scalare, il secondo un numero per un altro numero

4) $(a;b)\cdot(c;d) = (c;d)\cdot(a;b)$

Teorema di Carnot

Abbiamo due vettori, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, che raggiungono rispettivamente i punti P e Q



Vogliamo valutare e quantificare la distanza $\overline{QP}$

Consideriamo anche un vettore $\vec{w} = -\vec{u}$, che raggiunge un punto R.

$\overline{OS} = \overline{QP}$

Dunque,

$\overline{QP}^2 = \overline{OS}^2 = \overline{OS}\cdot\overline{OS} = (c-a)(c-a) + (d-b)(d-b) = (a^2+b^2)+(c^2+d^2) - 2(ac+bd)$

$= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,OP\cdot OQ\cdot \cos\alpha$

Dove α è l'angolo compreso tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Il prodotto scalare si può annullare o per uno dei fattori nulli (caso mai considerato), o se e solo se $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Il prodotto scalare è nullo se e solo se i due vettori sono ortogonali.

Proposizione: se, dati $P(a;b)$, e $Q(c;d)$, i relativi vettori sono ortogonali, allora $ac+bc=0$, ossia il loro prodotto scalare è nullo, e viceversa.

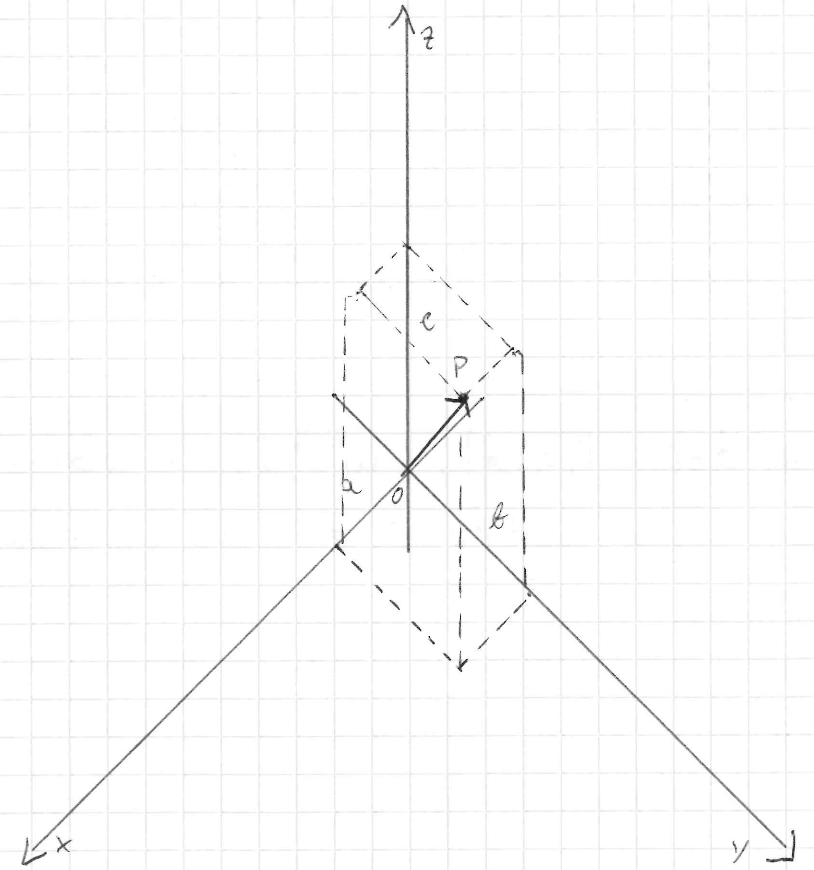
Definizione: la distanza di un punto dall'origine, e quindi la lunghezza del vettore, si dice, con punto P, "modulo" o "norma" di $\overline{OP}$ $|OP|$

Definizione: viene definito versore un vettore di norma uguale a 1

Definizione: ogni coppia di vettori ortogonali tra loro, e di modulo (o norma) uguale a 1, forma una base ortonormale in $\mathbb{R}^2$

N.B.: con i vettori, invece della $\vec{e}_n$, si usano $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ecc.

Finora abbiamo studiato delle coppie di numeri nel piano, ossia abbiamo dato un significato geometrico a $\mathbb{R}^2$.
Daremo ora un significato geometrico di ogni nozione finora analizzata in $\mathbb{R}^2$, in $\mathbb{R}^3$.
Innanzitutto, poiché lavoriamo nello spazio, il sistema di riferimento sarà dato da 3 assi, e ogni terna di numeri identifica un punto.



Volessimo identificare e rappresentare nello spazio una terna di numeri (A, B, C), dovremmo riportare rispettivamente le distanze a, b, c sugli assi x, y, z, e congiungere. P è la rappresentazione della terna nello spazio.

Per poter studiare meglio e definire un sistema di assi cartesiani, si può usare la regola della mano destra: se teniamo il pollice e le restanti dita perpendicolari tra loro, e identifichiamo come "asse x" il prolungamento del pollice, e "asse y" il prolungamento delle altre dita, il prolungamento del palmo ci darà direzione e verso dell'"asse z".

Dunque, è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra le terne di numeri e punti nello spazio, cioè tra $\mathbb{R}^3$ e lo spazio.

Tutte le operazioni finora studiate in $\mathbb{R}^2$, si possono tranquillamente riapplicare in $\mathbb{R}^3$; inoltre, è possibile aggiungerne di nuove che introdurremo dopo.

Somma, prodotto di numero per vettore e prodotto scalare di due vettori si comportano allo stesso modo.
Si parlava in $\mathbb{R}^2$ di "vettori sulla stessa retta", ora di "vettori complanari": se 3 vettori appartengono allo stesso piano, il prodotto scalare è 0.

Basi ortonormali

Definizione: viene detta ortonormale una base formata (in $\mathbb{R}^3$) da 3 versori a due a due ortogonali.
Lavorare con una base ortonormale è molto semplice. Per identificare la base ortonormale canonica di $\mathbb{R}^3$ si può usare la notazione
$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

Ogni vettore $\vec{u}$ è una combinazione lineare dei vettori di una base ortonormale.

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \qquad (\text{in } \mathbb{R}^3)$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $\vec{e}_1$

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = (u_1 \vec{e}_1)\cdot \vec{e}_1 + (u_2 \underbrace{\vec{e}_2)\cdot \vec{e}_1}_{\text{perpendicolari}} + (u_3 \underbrace{\vec{e}_3)\cdot \vec{e}_1}_{\text{perpendicolari}} = (u_1 \vec{e}_1)\vec{e}_1$$

$$u_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1$$

Analogamente per "$u_2 = \vec{u}\cdot\vec{e}_2$" e "$u_3 = \vec{u}\cdot\vec{e}_3$".

Prodotto vettoriale

Finora abbiamo considerato, come prodotto tra due vettori, il prodotto scalare, ossia un prodotto tra due vettori che restituisce un valore scalare.

Il prodotto vettoriale invece restituisce come risultato un vettore
La notazione per scrivere un prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è
"$\vec{u} \wedge \vec{v}$".

Consideriamo due vettori generici
$\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$

Per determinare il prodotto vettoriale di due vettori, si costruisce la matrice con prima il primo vettore, poi il secondo, e se ne fanno i minori, ossia i determinanti, escludendo la riga di cui si vuole trovare il minore.

Più pratico è il seguente metodo: calcolare un falso determinante (con Laplace o Sarrus che sia) usando come prima riga i vettori che compongono la base canonica ortonormale (di $\mathbb{R}^3$), come seconda e terza rispettivamente il primo e il secondo vettore.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Proprietà del prodotto vettoriale:

1) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$
2) $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$
3) $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ quando:
- $\exists$ tre minori si annullano, e quindi $\rho(A) < 2$
- $\alpha = 0$ o π $(0 + k\pi)$, i vettori sono paralleli, e quindi appartengono alla stessa retta passante per O
4) Se scambio di ordine i vettori di cui ~~voglio~~ il prodotto vettoriale, esso cambia di segno (proprietà anticommutativa); ciò è dato dal fatto che, se scambio l'ordine di due righe in una matrice, il determinante cambia di segno
5) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ (mantenendo questo ordine)
6) $\vec{u} \wedge (k \cdot \vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v}$ con $k \in \mathbb{R}$
7) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ in generale è diverso da $\vec{u} \wedge (\vec{v} \cdot \vec{w})$
8) $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$ ha significato geometrico di area.
9) Il verso di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è dato dalla regola della mano destra.

Prodotto misto

Il prodotto misto (o triplo) è un prodotto di 3 vettori che come risultato dà un numero.

Dati tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{z}(x_3, y_3, z_3)$

Il prodotto misto è dato da

"$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$"

E si calcola il determinante della matrice formata da $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Proprietà:

1) Il valore assoluto del prodotto misto non cambia con l'ordine dei vettori
2) Essendo un determinante, cambiando di ordine due vettori, il valore del prodotto misto cambia di segno
3) I tre vettori sono linearmente dipendenti (e dunque complanari) se e solo se il prodotto misto è uguale a 0
4) Geometricamente, possiamo pensare ai 3 vettori come gli spigoli di un parallelepipedo. Sappiamo che $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ rappresenta un'area, quella del parallelogramma di base. Moltiplicando scalarmente per il terzo vettore, otteniamo così il volume del parallelepipedo

Non sapendo se $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ha verso verso alto o basso, uso il valore assoluto.

Vettori liberi

Finora abbiamo pensato alla nozione di vettore come segmento che unisce l'origine del sistema di riferimento a un punto.

Geometricamente e fisicamente questa nozione può essere scomoda o limitante, per questo è stato introdotto il "vettore libero".

Per vettore libero si intende un vettore che mantiene il proprio verso e la propria inclinazione, ma "slegato dal punto di applicazione" (finora, l'origine).

Viene introdotto il concetto di equipollenza, ossia stessa lunghezza, direzione e verso.

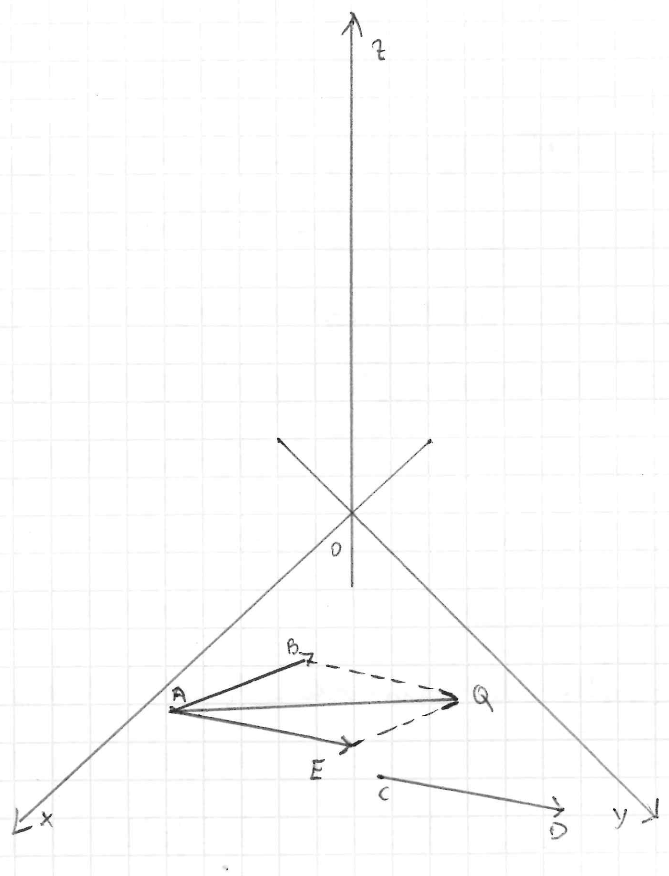
Per vettore libero, si intende l'insieme di tutti i vettori equipollenti al vettore di partenza applicato nell'origine, in ogni punto del piano (o meglio, dello spazio).

Se prendo il vettore applicato $\overline{OP}$, posso costruire tutti i vettori equipollenti, e viceversa.

Esiste una notazione precisa per definire un vettore libero. Dire che il vettore applicato $\overline{OP}$, equivale a "P-O", vuol dire che $\overline{OP}$ effettivamente corrisponde a ogni vettore P-O equipollente a $\overline{OP}$.

Qualsiasi scrittura "B-A" va bene per rappresentare "P-O", finché essi sono equipollenti.

Supponiamo di avere due vettori, $\vec{u} = (B-A)$, e $\vec{v} = (C-D)$. Se vogliamo fare $\vec{u} + \vec{v}$, dobbiamo usare la regola del parallelogramma, cercare vettori equipollenti, avere un punto di applicazione comune e da qui applicare la somma vettoriale.



$\overline{AE}$ è equipollente a $\overline{CD}$

Calcolare ora

$\overline{AB} + \overline{CD} = (B-A) + (D-C) = (B-A) + (A-E) = B-E$

Se avessi fatto i conti senza considerare il significato geometrico, sarebbe andato tutto bene lo stesso.

Rette nello spazio

Una retta nello spazio si può identificare in vari modi, ad esempio con un punto P_0 in cui passa e un vettore $\vec{v}$ ad essa parallelo, o con due punti appartenenti alla retta, ecc.

Per il postulato della parallela esiste una e una sola retta passante per P_0 e parallela a $\vec{v}$.

Dunque, P appartiene alla retta se e solo se esiste un numero reale t tale per cui $P - P_0 = t \cdot \vec{v}$

Al variare di t si ottengono tutti i punti della retta mediante la formula

$P = P_0 + t \cdot \vec{v} \quad = P_0 \cdot t(P - P_0)$;

Questa è la formula dell'equazione parametrica della retta passante per P_0 e parallela a $\vec{v}$

Volendola scrivere in forma esplicita,

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}, \quad \vec{v} = l \cdot \vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \quad e \; P_0 = (x_0; y_0; z_0)$$

I numeri l, m, n sono i parametri direttori della retta.

Per verificare se un punto Q appartiene alla retta, si vede se esiste il numero reale t tale per cui $Q = t \cdot \vec{v} + P_0$; passando alle parametriche,

$$\begin{cases} a = l \cdot t + x_0 \\ b = m \cdot t + y_0 \\ c = n \cdot t + z_0 \end{cases}$$ e queste devono essere verificate.

Abbiamo detto che possiamo considerare la retta passante per due punti. Essa deve essere parallela al vettore $P_1 - P_0$, dunque

$z = t(P_1 - P_0) + P_0$; in parametri,

$$\begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0 \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0 \\ z = t(z_1 - z_0) + z_0 \end{cases}$$

Se volessimo verificare se 3 punti sono allineati, basta vedere se i vettori a due a due (punti) sono paralleli. Dunque, $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ devono essere paralleli.

Si prendono i vettori, si trovan le differenze, e se ne fa la matrice. Se il rango di questa non è massimo, allora non sono paralleli.

Finora abbiamo parlato di retta come rappresentazione nello spazio di un'equazione parametrica. In realtà, esiste un altro modo concettualmente diverso di concepire una retta nello spazio: immaginiamo di avere due piani, non paralleli tra loro. La loro intersezione, sarà una retta. Dunque, una retta è anche immaginabile come l'intersezione di due piani.

A seconda delle necessità, può tornar utile usare l'una o l'altra interpretazione.

Piani nello spazio

Un piano nello spazio si individua solitamente mediante tre punti non allineati, o mediante un punto appartenente al piano ed un vettore ortogonale al piano.

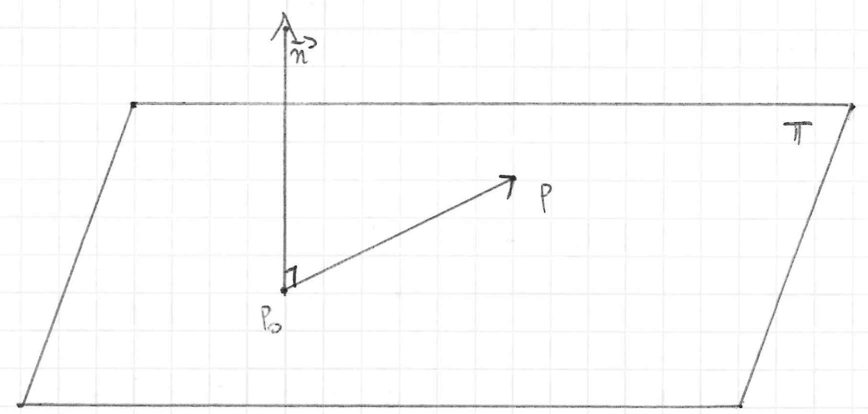
Di solito i piani si identificano con lettere greche.

Si dice che un punto P appartiene a un piano π se il vettore $(P - P_0)$ (con $P_0 \in \pi$) è ortogonale al vettore normale al piano $\vec{n}$ passante per P_0.

$P_0(x_0; y_0; z_0)$

Riscriviamo il tutto: $\vec{n}(a; b; c)$

$$P(x, y, z) \in \pi \iff (P - P_0) \perp \vec{n} \iff (P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$$



$(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$

$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) \cdot (a; b; c) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) =$$

$$= ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) \qquad -(ax_0 - by_0 - cz_0) = d$$

per comodità

$$= ax + by + cz + d = 0$$

Se $d = 0$, il piano passa per l'origine.

Se a, o b, o $c = 0$, il piano sarà // asse x, o y, o z.

Nota bene: in $\mathbb{R}^2$, un'equazione a due variabili rappresenterebbe una retta, qua in $\mathbb{R}^3$ un piano parallelo all'asse la cui variabile non è presente.

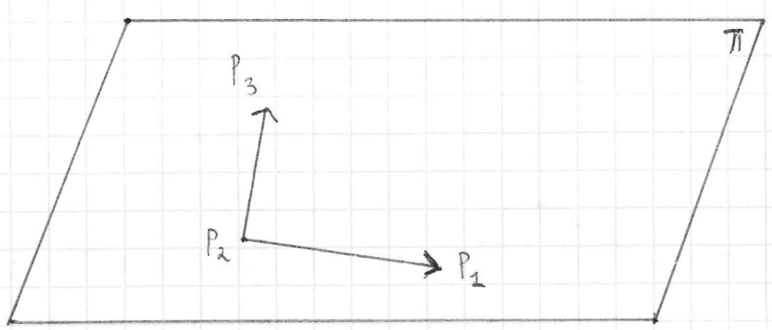
Piano per 3 punti

Vogliamo ora trovare l'equazione del piano contenente 3 punti non allineati:

$P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$, $P_3(x_3; y_3; z_3)$

$(P_1 - P_2)$, e $(P_3 - P_2)$ non sono dunque paralleli.

Esiste uno e un solo piano π contenente i 3 punti:



Consideriamo ora un vettore ottenuto dal prodotto scalare degli altri due:

$$(P_1 - P_2) \wedge (P_3 - P_2)$$

Facciamo un esempio numerico:

$P_1(-1; 3; 1)$ $\quad P_2(1, 0, 2)$ $\quad P_3(0, 0, 4)$

$$(P_1 - P_2) \wedge (P_3 - P_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-\vec{j} - 3\vec{k}) + 2(3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{n} = (6; 5; 3)$$

Il piano avrà dunque un'equazione del tipo:

$$6x + 5y + 3z + d = 0$$

Questo è un fascio improprio di piani. Sostituendo un punto, obbligando così il passaggio per esso, ottengo

Punto P_3

$$6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + d = 0 \qquad d = -12$$

$$\pi \equiv 6x + 5y + 3z - 12 = 0$$

Rappresentazione parametrica del piano

Dati 3 vettori, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $(P - P_0)$, complanari, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non paralleli, equivale a dire che $(P - P_0)$ è combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Esistono due numeri $t, s \in \mathbb{R}$ tali per cui:

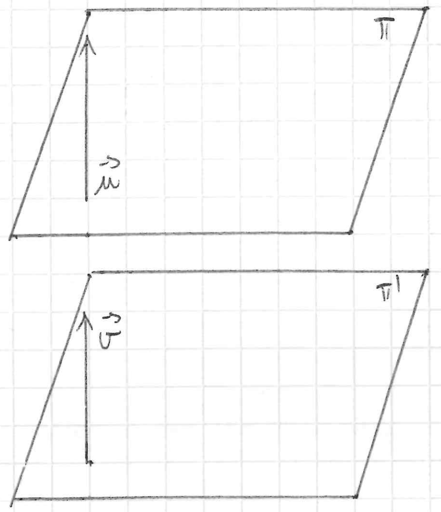
$$(x - x_0; y - y_0; z - z_0) = t(l, m, n) + s(l', m', n')$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's \\ z = z_0 + nt + n's \end{cases}$$

Abbiamo così espresso il piano con equazioni parametriche. Difficilmente verranno riutilizzate.

Parallelismo

Consideriamo due piani, π e π', e i relativi vettori normali $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



$\pi \equiv ax+by+cz+d=0$

$\vec{u}(a;b;c)$

$\pi' \equiv a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\vec{v}(a';b';c')$

I due piani π e π' sono paralleli se e solo se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli, e quindi se le loro componenti sono proporzionali.

$$\pi \parallel \pi' \iff (a;b;c)=t(a';b';c')$$

Passaggio da equazione cartesiana di una retta a parametrica, e viceversa

Da cartesiana a parametrica: il sistema di equazioni di piani che devono rappresentare la retta intersecandosi, avrà delle incognite libere (almeno 1); la ricaviamo, e la poniamo uguale a un parametro

Esempio

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2y+z+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1-3y \\ z=-2-y \end{cases} \Rightarrow y=t \Rightarrow \begin{cases} x=-1-3t \\ y=t \\ z=-2-2t \end{cases}$$

Da parametrica a cartesiana: è sufficiente ricavare da un'equazione il parametro, e procedere per sostituzione.

Fasci di piani

Viene detto fascio proprio di piani quando abbiamo una retta r, per la quale passano infiniti piani. Essi si dicono "fascio di piani di asse r".

Un piano π^* appartiene al fascio se e solo se il sistema tra due piani e π^* ha infinite soluzioni.

Dati i piani $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$, $\pi' \equiv a'x+b'y+c'z+d'=0$ $\qquad \pi^* \equiv \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$

Il sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \end{cases} \qquad \rho(A)=\rho(A|B)\leq 2$$

, Il sistema ha infinite soluzioni, ergo infiniti punti, ergo una retta.

Dunque, la terza riga è combinazione lineare delle altre due

$$(\alpha;\beta;\gamma;\delta)=\lambda(a;b;c;d)+\mu(a';b';c';d')$$

$$\pi^* \equiv (\lambda a+\mu a')x+(\lambda b+\mu b')y+(\lambda c+\mu c')z+\lambda d+\mu d'$$

Ergo, conoscendo due piani del fascio, gli altri sono loro combinazioni lineari.

Per ricavare un particolare piano del fascio, è possibile ricavare i parametri, e imporre ad esempio il passaggio per un punto.

Si parla di fascio improprio di piani, ossia di tutti piani paralleli a uno dato.

Ripresa del parallelismo, e ortogonalità:

- Tra rette: due rette, $r: P = t\cdot\vec{v}$, e $r': P = t\cdot\vec{v}'$, sono ortogonali se e solo se $\vec{v}\cdot\vec{v}' = 0$. Sono al contrario parallele se e solo se $\vec{v}\wedge\vec{v}' = \vec{0}$, o $\vec{v} = a\cdot\vec{v}'$, $a\in\mathbb{R}$
- Tra piani: due piani, $\pi: (P-P_0)\cdot\vec{v} = 0$, e $\pi': (P-P_0')\cdot\vec{v}' = 0$ sono paralleli se e solo se $\vec{v}\wedge\vec{v}' = 0$, ortogonali se $\vec{v}\cdot\vec{v}' = 0$.
- Tra piano e retta: il piano $\pi: (P-P_0)\cdot\vec{v} = 0$ e la retta $r: P = t\cdot\vec{w}+P_1$ sono paralleli se e solo se $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$; ortogonali se e solo se $\vec{v}\wedge\vec{w} = 0$.

Proiezioni

È ora possibile applicare tutto ciò per compiere operazioni tra piani, rette, punti.

- Proiezione ortogonale di un punto su di una retta: dato $P(x_0; y_0; z_0)$ e $r: x = a+lt,\ y = b+mt,\ z = c+nt$ retta non passante per P, la proiezione ortogonale di P su r è data dall'intersezione di r con il piano π perpendicolare a r. Esso sarà $\pi: l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0) = 0$, in quanto il vettore $\vec{v}(l,m,n)$ è così parallelo a r, e il piano passa per $P(x_0; y_0; z_0)$. Sostituiamo ora a x, y, z, i corrispondenti $(a+lt)$, $(b+mt)$, $(c+nt)$, ottenendo l'equazione "in t": $l(a+lt-x_0)+m(b+mt-y_0)+n(c+nt-z_0) = 0$.
- Proiezione ortogonale di un punto su un piano: dato il punto $P(x_0; y_0; z_0)$ e il piano $\pi: ax+by+cz+d = 0$, non contenente P, la proiezione di P su π è il punto Q ottenuto con l'intersezione della retta r perpendicolare a π passante per P. La retta r deve essere parallela al vettore $\vec{v}(a; b; c)$, e passante per P, dunque

$$r: \begin{cases} x = x_0+at \\ y = y_0+bt \\ z = z_0+ct \end{cases} \quad \text{passaggio per piano} \iff a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d = 0$$

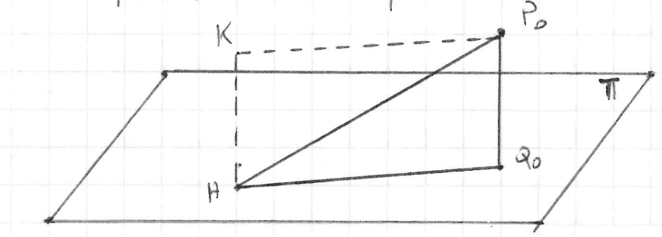
Si ricava il parametro $t = -\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.

E da qui si ricavano le soluzioni, ossia le coordinate di Q.

Distanze

Ci interesseremo ora di studiare distanze nello spazio, tra un punto e un piano o una retta, tra due rette di due piani paralleli, o di retta e piano tra loro paralleli, o tra due rette qualunque nello spazio.

- Distanza di un punto da un piano: la distanza di un punto P_0 da un piano π è la distanza tra il punto stesso e la sua proiezione nel piano.



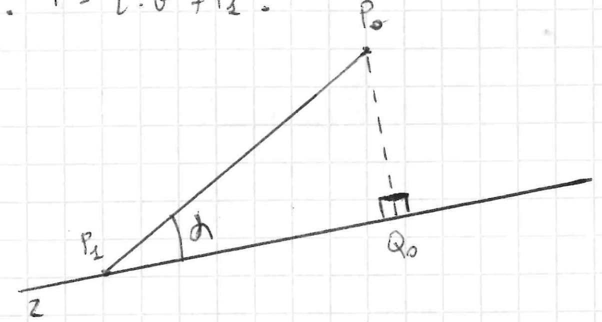
Ragioniamo: la distanza di P_0 da π equivale a $\overline{P_0Q_0}$, e anche a $\overline{KH}$. Dunque, $dist(P_0,\pi)$ è anche la proiezione del vettore (P_0-H) sulla retta che contiene P_0 e Q_0.

Esprimendo il tutto in forma geometrica, usando $\vec{n}$ come il versore normale a π, si ha che $\overline{P_0Q_0} = |(P_0-H)\cdot\vec{n}|$. Dal momento che $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ è un versore normale a π, possiamo dire che

$$d(P_0;\pi) = \left|(P_0-H)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- Distanza di un punto da una retta: la distanza di un punto P_0 da una retta r è la distanza di P_0 dalla sua proiezione ortogonale Q_0 su r.

Sia r: $P = t\cdot\vec{v} + P_1$.



Come vediamo dal disegno, $\overline{P_0Q_0} = \overline{P_0P_1}\cdot\sin\alpha$, che, ricordando la definizione di prodotto vettoriale, diventa:

$d(P_0; r) = \dfrac{|(P_0-P_1)\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}$. Si otterranno due vettori, uno al num e uno al den. Ricordando che sono espressi in "$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$", e che essi sono i versori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, la distanza sarà data dall'applicazione del Teorema di Pitagora sui coefficienti: $d(P_0; r) = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{d^2+e^2+f^2}}$.

- Distanza tra piani paralleli: dati due piani paralleli, α e β, α: $ax+by+cz+d=0$; $\beta = a'x+b'y+c'z+d'=0$, la loro distanza è la distanza tra due punti, P e P', ottenuti intersecando i due piani con la retta ortogonale a entrambi per O.

Le equazioni parametriche della retta saranno

$$r: \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}$$, tenendo conto che $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$.

$$\text{dist.}(\alpha; \beta) = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- Distanza di un punto da una retta, II° metodo:
- Trovare piano α passante per P_0 ortogonale a r
- Trovare punto di intersezione Q_0 tra α e r
- Calcolare distanza $\overline{Q_0P_0}$.

- Distanza tra due rette parallele nello spazio:

1) Il primo metodo consiste nel trovare il piano ortogonale ad entrambe, e i due punti di intersezione saranno la distanza
2) Prendere un punto qualsiasi di una retta, e usare la formula del prodotto vettoriale, o quella del piano passante per il punto ortogonale all'altra retta.

- Distanza di due rette non parallele nello spazio (sghembe):

1) Se due rette r ed s non sono parallele, allora esiste una e una sola retta n ortogonale ad entrambe che le interseca. Questi due punti di intersezione saranno la distanza che cerchiamo.

Prendiamo un punto $P_1 \in r$ e $P_2 \in s$, e calcoliamo la proiezione di $\overline{P_1P_2}$ su $\vec{n}$ (retta n). Sia r: $P = t\vec{v} + P_1$, s: $P = t\vec{w} + P_2$, n è parallela a $\vec{v}\wedge\vec{w}$, dunque

$$d(r, s) = \frac{|(P_2-P_1)\cdot\vec{v}\wedge\vec{w}|}{|\vec{v}\wedge\vec{w}|}$$

2) In alternativa, si può calcolare il valore di t e t' tali per cui $(P_1 + t\vec{v}) - (P_2 + t'\vec{w})$ sia perpendicolare a entrambe le rette.

Finiamo ora facendo alcuni accenni agli angoli.

Angoli:

- Angolo tra due rette: non necessariamente due rette formano un angolo, ma se esistono due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ paralleli alle medesime che lo formano, possiamo calcolarlo mediante questo ragionamento:

$$\cos \widehat{rs} = \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \pm \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} , = \frac{l \cdot l' + m \cdot m' + n \cdot n'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2} \cdot \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}$$

- Tra due piani, il ragionamento è medesimo: avendo i vettori perpendicolari $\vec{v}(a; b; c)$ e $\vec{w}(a'; b'; c')$ (di α e β)

$$\cos \widehat{\alpha\beta} = \pm \frac{a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

- Tra retta e piano, dal momento che il vettore di riferimento del piano è ad esso ortogonale, dovremo usare in linea di massima il prodotto scalare:

$$\cos \widehat{r\alpha} = \pm \frac{|\vec{v} \wedge \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} \quad ; \quad \sin \widehat{r\alpha} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} .$$

Algebra lineare

Spazi vettoriali

Sappiamo che i vettori sono sequenze di numeri reali, vogliamo ora estendere queste nozioni.

Parliamo di campo numerico quando parliamo di un insieme di numeri in cui si possono fare le quattro operazioni fondamentali (la divisione per 0 non è mai comunque permessa).

Da ciò ci è per esempio permesso capire che $\mathbb{N}$ non è un campo numerico: esso non è chiuso alle quattro operazioni (la divisione di due numeri appartenenti a $\mathbb{N}$ non può dare un numero naturale).

Dando una migliore definizione di quelle che sono le operazioni fondamentali, è possibile creare nuovi campi numerici.

Sia $\mathbb{K}$ un campo qualunque. Un insieme V si dice spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (o anche $\mathbb{K}$-spazio vettoriale) se in V sono definite due operazioni: somma e prodotto

Diamo una definizione alle due operazioni che abbiamo appena citato:

Somma: operazione che da due termini ne produce un terzo

Operazione "+": $V \times V = V$ (Si noti che "$\times$" è il prodotto cartesiano)

Prodotto: operazione che, da un termine di $\mathbb{K}$ e uno di V, dà un altro termine di V

Operazione "$\cdot$": $\mathbb{K} \times V = V$

Analizziamo ora le proprietà delle singole operazioni, e le proprietà comuni tra loro

Proprietà della somma:

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

3) $\exists\ \vec{0} \in V : \vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$

4) $\forall \vec{v} \in V\ \exists\ -\vec{v}, : \vec{v}+(-\vec{v}) = \vec{0}$

Commentiamole:

1) Per ogni vettore dello spazio, vale la proprietà commutativa

2) Per ogni vettore dello spazio, vale la proprietà associativa

3) Esiste un vettore nullo, detto $\vec{0}$, che ha le stesse proprietà del numero 0, ossia lascia invariato il primo addendo.

4) Per ogni vettore del sottospazio $\vec{v}$ esiste il suo opposto "$-\vec{v}$", tale per cui la loro somma è il vettore nullo.

Proprietà del prodotto

1) $\forall \vec{v} \in V$, $\forall a, b \in K$, $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

2) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$

Commentiamo brevemente:

1) Vale la proprietà associativa tra numeri e vettori

2) Un vettore dello spazio moltiplicato per il numero 1 resta tale e quale.

N.B.: gli elementi di V sono detti vettori, quelli di K scalari.

Proprietà di collegamento tra somma e prodotto

1) $\forall a \in K$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\cdot\vec{v} + a\cdot\vec{w}$

2) $\forall a, b \in K$, $\forall \vec{v} \in V$, $(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$

Si tratta di due proprietà distributive.

Esempi:

1) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle 4 operazioni

2) K^n, $n \geq 1$, è un campo vettoriale su K con operazioni definite in modo analogo

3) $K[T]$, ossia i polinomi in T con coefficienti appartenenti a K, sono suoi spazi vettoriali

4) $\mathcal{F}(I)$, ossia l'insieme delle funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$, è un K-spazio vettoriale

Sottospazi

Definizione: sia V un K-spazio vettoriale; un sottoinsieme W di V si dice sottospazio se W è un K-spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V e ristrette in W.

Semplifichiamo, in questa proposizione: W è sottospazio di V se e solo se:

1) Il vettore nullo appartiene a W

2) $\forall \vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$, $\vec{w_1}+\vec{w_2} \in W$

3) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{w} \in W$, $a \cdot \vec{w} \in W$

In uno spazio vettoriale in parole povere non contano più di tanto gli elementi dello spazio, quanto le due operazioni fondamentali, e soprattutto le loro proprietà. Se un sottospazio o spazio che sia la somma deve avere valide le proprietà prima definite, idem il prodotto per scalare.

Generatori di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dice che i vettori (ossia gli elementi di V) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_z$ generino V se $V = \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_z)$, cioé se ogni vettore $\vec{v}_i \in V$ si può esprimere come combinazione lineare di $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z$. In altre parole, se vogliamo trovare alcuni vettori del sottospazio, é sufficiente assegnare i giusti coefficienti scalari ai vettori: $\vec{v}_i = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots a_z \vec{v}_z$; $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z \in V$, $a_1 \dots a_z \in \mathbb{R}$ (o, a $\mathbb{K}$ ancora meglio). Nota bene, che i vettori generano anche sé stessi.

Definizione: un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V si dice finitamente generato se esiste in V un numero finito di vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z$ che generano V.

Due esempi:

- $V = \mathbb{K}^{m,n}$ é finitamente generato: é l'insieme delle matrici che, sommate, danno la matrice $m \times n$.
- $W = \mathbb{R}[T]$ non é finitamente generato, e non é un sottospazio: non é chiuso alla somma.

Dipendenza lineare

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z$ suoi elementi.

I vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z$ sono linearmente indipendenti se:

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots a_z \vec{v}_z = \vec{0} \iff a_1 = a_2 = \dots = a_z = 0$$

Proposizione: $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z$ sono linearmente indipendenti se e solo se, indipendentemente dall'ordine in cui son disposti,

- $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$
- Ogni $\vec{v}_i$ $(i \geq 2)$ non é combinazione lineare dei precedenti $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_{i-1}$

Esempio di applicazione, su polinomi

Abbiamo z polinomi in variabile T, non nulli, di gradi diversi, $p_1(T) \dots p_z(T)$; essendo di gradi diversi, possiamo affermare per certo che essi sono linearmente indipendenti

Dimostrazione: se scriviamo in ordine crescente per grado, vediamo con facilitá che due polinomi combinati linearmente non possono produrne uno di grado superiore al loro.

Basi

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato.

Definizione: i vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z$ che formano una base per V devono per forza:

- Essere linearmente indipendenti
- Generare V

Proposizione: se $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z)$ é una base per V, ogni $\vec{v}_i \in V$ si esprime come combinazione lineare dei vettori della base, in modo unico. $\vec{v}_i = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_z \vec{v}_z$

Definizione: i numeri $a_1 \dots a_z \in \mathbb{K}$ si dicono componenti di $\vec{v}_i$ rispetto alla base $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_z)$

Casi particolari da ricordare sono:

$V = \mathbb{R}^n$ (o $V = \mathbb{K}^n$): la base canonica

$V = \mathbb{K}^{n,m}$: la base delle $n \cdot m$ matrici formate da 1 in una posizione e 0 in tutte le altre

$V = \mathbb{K}[T]$: i polinomi con coefficienti $\in \mathbb{K}$ e variabile T. Una base é data da $1, T, T^2, \dots T^n$

$V = \mathbb{K}^{n,n}$ SIMMETRICHE, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Proposizione: ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base; inoltre,
- Se i generatori sono linearmente indipendenti essi già costituiscono una base
- Se non lo sono è possibile scartarne alcuni in modo che i rimanenti siano ancora dei generatori, ma risultino linearmente indipendenti

Esistono dei metodi per verificare l'indipendenza lineare di una certa base, o almeno eventuale base.
Consideriamo una base per V $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_2)$ e il fatto che vi è una corrispondenza biunivoca con i coefficienti (componenti) in $\mathbb{K}^2$,
"$\mathbb{K}^2 \longleftrightarrow V$", se i vettori sono linearmente indipendenti.
Inoltre, la corrispondenza deve risultare chiusa alle usuali operazioni di somma e prodotto, conservandone le proprietà ben definite
Riassumendo, lineare indipendenza significa:
1) Corrispondenza biunivoca $\mathbb{K}^2 \longleftrightarrow V$
2) Mantenimento delle proprietà di somma e prodotto per scalare

Esempio teorico:
$f: \mathbb{K}^3 \longrightarrow V$
$(a_1; a_2; a_3) \longrightarrow a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$
$(b_1; b_2; b_3) \longrightarrow b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$
$(a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) \longrightarrow (a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3) \longrightarrow$
$\longrightarrow (a_1+b_1)\vec{v}_1 + (a_2+b_2)\vec{v}_2 + (a_3+b_3)\vec{v}_3 = a_1\vec{v}_1 + b_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + b_2\vec{v}_2 +$
$+ a_3\vec{v}_3 + b_3\vec{v}_3 = (a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3) + (b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3)$.

Abbiamo così dimostrato che è chiuso alla somma.
Con $k \in \mathbb{K}$, $k \cdot \vec{v} = k(a_1; a_2; a_3) \longrightarrow (ka_1; ka_2; ka_3) \longrightarrow$
$\longrightarrow ka_1\vec{v}_1 + ka_2\vec{v}_2 + ka_3\vec{v}_3 = k(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3)$
E quindi è chiuso anche al prodotto per scalare.

Particolare caso: ci trovassimo quattro (ad esempio, come qua) polinomi, possiamo considerarli come appartenenti allo spazio $\mathbb{R}_3[T]$ (se a coefficienti reali come qua e grado ≤ 3):

$p_1(T) = T + T^2$
$p_2(T) = 1 - T + T^3$
$p_3(T) = 2 + T^2 - 3T^3$
$p_4(T) = -T^2$

Possiamo studiare la dipendenza lineare di questi polinomi tra loro, mediante lo studio del rango della matrice dei coefficienti

$\rho(A) = 4$, linearmente indipendenti
$\rho(A) < 4$, linearmente dipendenti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Altro metodo intelligente, avendo ad esempio tre funzioni, è quello di studiarne le soluzioni con dei parametri a, b, c, verificando se la funzione potrebbe annullarsi anche senza $a=b=c=0$
Esempio: $a \cdot e^x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x = 0$

Rivediamo infine la definizione di dimensione, con il Lemma di Steinitz

Lemma di Steinitz - Dimensione di uno spazio vettoriale

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato

Il Lemma di Steinitz afferma che, se $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_r \in V$ lo generano, e $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_s$ sono linearmente indipendenti, allora $r \geq s$

Conseguenze:

1) Se $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_r\}$ e $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_s\}$ sono due basi per V, allora $r = s$.

Viene dunque definita "dimensione" di V il numero di vettori che formano una base; Se $V = \{\vec{0}\}$, $\dim V = 0$.

2) Se $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_r$ generano V, e $\dim V = n$, $r \geq n$

3) Se $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_s$ sono linearmente indipendenti, e $\dim V = n$, $s \leq n$

4) Se $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ sono linearmente indipendenti e generano V, allora formano una base per V

5) Sia W un sottospazio di V. Dunque:

a) Poiché V è finitamente generato, lo è anche W

b) $\dim(W) \leq \dim(V)$

c) Se $\dim(W) = \dim(V)$, $\iff W \equiv V$.