Operazioni sui sottospazi di uno spazio vettoriale

Esistono 3 fondamentali operazioni, per quanto solo due abbiano senso: intersezione, unione, somma tra sottospazi.

Intersezione di due sottospazi

Dati due sottospazi di V, W_1 e W_2, $W_1 \cap W_2$ è ancora sottospazio di V

Dimostrazione:

- $\vec{0} \in W_1, W_2, \Rightarrow \vec{0} \in W_1 \cap W_2$
- Dati $\vec{u}, \vec{v} \in W_1 \cap W_2$, $\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W_1 \cap W_2$
- Dati $a \in \mathbb{K}$, $\vec{v} \in W_1 \cap W_2$, $\Rightarrow a \cdot \vec{u} \in W_1 \cap W_2$

Complementare di un sottospazio: esso non è un sottospazio, in quanto non vi è $\vec{0}$.

Unione di due sottospazi

Dati W_1, W_2 sottospazi di V, $W_1 \cup W_2$ generalmente non è sottospazio di V (a parte i casi $W_1 \subseteq W_2$; $W_2 \in W_1$)

Dimostrazione: supponiamo che $W_1 \not\subseteq W_2$; $W_2 \not\subseteq W_1$, $\vec{u} \in W_1 \notin W_1 \cap W_2$; $\vec{v} \in W_2 \notin W_1 \cap W_2$

La somma $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \in W_1$? Se sì, sia $\vec{u}$ che $\vec{v}$ dovrebbero appartenere a $W_1 \cap W_1$, e ciò è contro l'ipotesi.

Somma di sottospazi

Definizione: $W_1 + W_2$ è formato da quei vettori $\vec{v}$ dello spazio che sono somma di $\vec{w_1} \in W_1$ e $\vec{w_2} \in W_2$

$$W_1 + W_2 = \{ \vec{v} \in V : \vec{v} = \vec{w_1} + \vec{w_2}, \vec{w_1} \in W_1, \vec{w_2} \in W_2 \}$$

Lo spazio è formato da tutti quei vettori $\vec{v}$ che sono somma di $\vec{w}_1 \in W_1$ e $\vec{w}_2 \in W_2$ ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ qualunque purché appartengano ai relativi sottospazi).

Osservazioni:

1) $W_1 + W_2$ contiene $W_1 \cup W_2$
2) Se U è un sottospazio di V che contiene $W_1 \cup W_2$ allora $W_1 + W_2 \subseteq U$
3) $W_1 + W_2$ è un sottospazio

Formula di Grassmann

Supponiamo che W_1 e W_2 siano finitamente generati. Dunque anche $W_1 + W_2$ lo è.

Vale la relazione:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

N.B.: non è assolutamente detto che l'unione di una base per W_1 con una per W_2 formi base per $W_1 + W_2$: i vettori potrebbero non essere indipendenti!

Richiami a concetti di base su funzioni:

- Funzione: legge che ad ogni valore $a \in \text{dom} f$ (con f funzione) associa uno e un solo elemento $b \in B$, identificato come $f(a)$, detto "immagine di a". Si esprime con $f: A \to B$
- Controimmagine: un elemento $a \in A$ per cui $f(a) = b$. Si parte da $b \in B$ per trovare almeno un elemento $a \in A$

- Funzione suriettiva: una funzione in cui $\text{Im} f = B$
- Funzione iniettiva: una funzione in cui, con $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$; anche esprimibile come: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
- Funzione biunivoca: sia iniettiva che suriettiva.

Applicazioni lineari

Siano V, W due spazi vettoriali con uno stesso campo numerico.

Definizione: si dice applicazione lineare la funzione

$f: V \to W$

Se valgono le proprietà di linearità L1 ed L2:

L1: $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

L2: $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{v} \in V$, $f(a \cdot \vec{v}) = a \cdot f(\vec{v})$

Verificando su di una funzione L1 ed L2, si può capire se essa è o meno un'applicazione lineare.

Studiare una funzione sotto il punto di vista dell'algebra lineare non sempre è possibile: introdurre dei teoremi di analisi può risultare utile e talvolta obbligatorio.

Evitando questi infelici esempi, affermiamo che però esistono notevoli agevolazioni quando studiamo spazi finitamente generati. Vedremo meglio dopo come.

Il nucleo di un'applicazione lineare

Il nucleo di f (che indicheremo con $\text{Ker} f$) è l'insieme di tutti gli elementi di V che hanno per immagine $\vec{0}$

$$\text{Ker} f = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Teoremi sul nucleo di un'applicazione lineare

1) $Ker\ f = \phi \Longleftarrow f(a) = \vec{0}$

Ciò sta a significare che il nucleo di un'applicazione lineare non può essere vuoto: deve esserci almeno il vettore nullo $\vec{0}$

Dimostrazione: $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$

Applicando le proprietà di linearità abbiamo ottenuto tale risultato.

2) $Ker\ f$ è sottospazio di V

Dimostrazione: dati $\vec{v}, \vec{w} \in Ker\ f$. Dunque, $f(\vec{v}) = \vec{0}$, $f(\vec{w}) = \vec{0}$, $f(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}$, e dato sempre $\vec{v} \in Ker\ f$, $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot \vec{v} = 0$, $f(a\vec{v}) = a\ f(\vec{v}) = \vec{0}$, quindi $\vec{0} \in Ker\ f$, e $Ker\ f \subset V$.

3) $Ker f = \{\vec{0}\} \Longleftrightarrow f$ è iniettiva

Questo è uno dei teoremi più importanti, nonché uno dei motivi per cui si usa la definizione di nucleo di un'applicazione

Dimostrazione: la dimostrazione va fatta in due sensi:

- Se f è iniettiva, $Ker f = \{\vec{0}\}$

Prendiamo $\vec{v} \neq \vec{0}$; $f(\vec{v}) + f(\vec{0}) = f(\vec{v}) \neq \vec{0}$, ergo $\vec{v} \notin Ker f$, ergo nel nucleo può solo esserci $\vec{0}$

- Se $Ker\ f = \{\vec{0}\}$, f è iniettiva

Prendiamo $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$; se le immagini sono uguali, lo devono essere anche i punti di partenza

$f(\vec{v_1}) = f(\vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) + (-1) \cdot f(\vec{v_2}) = f(\vec{v_1} + (-1) f(\vec{v_2})) = f(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = \vec{0}$. Per ipotesi, $Ker\ f = \vec{0}$, ergo $\vec{v_1} = \vec{v_2}$, e l'ipotesi di iniettività è confermata $(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$

4) Sia $\vec{w} \in Im\ f$, $f^{-1}(\vec{w}) = \vec{v_0} + Ker\ f$, con $\vec{v_0}$ controimmagine di W.

Ergo, dato un vettore $\vec{w}$, appartenente a un sottospazio W, le sue controimmagini si otterranno prendendo un unico vettore $\vec{v_0}$, e aggiungendo ad esso i vettori di $Ker\ f$. Banalmente si vede che, con funzione iniettiva, la controimmagine sarà 1.

Applicazioni lineari e matrici

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definisce un'applicazione lineare $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Sia f_A un'applicazione lineare che chiede in ingresso n vettori per produrne m in uscita:

$f_A(x_1 \dots x_n) \longrightarrow (y_1 \dots y_m)$ Tale che $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$

Facciamo un esempio pratico: data $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f_A(x_1; x_2) \longrightarrow (y_1; y_2; y_3)$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$= (x_1 - 5x_2 ; 4x_1 + 7x_2 ; 3x_2 + 8x_2)$

Volessimo ora trovare l'immagine di un vettore, è sufficiente applicargli la f_A: dato $\vec{v}(3; -5)$, $f_A(\vec{v}) = (-22; -23; -31)$

Dato un vettore di dimensione 3, volendone trovare la controimmagine, bisognerebbe risolvere il sistema con le equazioni della funzione e il vettore da cui si vuole la controimmagine come soluzioni:

$$f^{-1}(1; 2; 3) = \begin{cases} x_1 - 5x_2 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 = 3 \end{cases}$$

Nucleo e immagine

Rivedendo il problema precedente, ossia $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, diamo la definizione del nucleo della funzione:

$$\operatorname{Ker} f_A = \left\{ (x_1 ; x_2) \in \mathbb{R}^2 : f_A(x_1 ; x_2) = (0;0;0) \right\} ; \quad f^{-1}(0;0;0)$$

Il $\operatorname{Ker} f_A$ è dunque la controimmagine di $(0;0;0)$. Se lo interpretiamo come sistema,

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow A \cdot X = 0$$

Riconduciamo tutto a un sistema omogeneo. Se l'unica soluzione del sistema omogeneo sarà quella nulla, la funzione sarà iniettiva, in quanto $\operatorname{Ker} f_A = \{\vec{0}\}$.

Proprietà: le colonne della matrice A forniscono i corrispondenti dei vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$. In parole povere, trasformando l'i-esimo elemento della base canonica, si ottiene una tal colonna. Ergo, la controimmagine della i-esima colonna sarà l'i-esimo elemento della base canonica.

Siamo dunque in grado di vedere se un'applicazione lineare è suriettiva, e capire qual è la dimensione dell'immagine.

Se considero un generico vettore di $\mathbb{K}^n$, $\vec{v} = (x_1 \dots x_n)$,

$$f_A(\vec{v}) = f_A\left[x_1(1;0;0 \dots ;0) + x_2(0;1; \dots ;0) + \dots + x_n(0;0; \dots 0;1)\right]$$

Ogni elemento dell'immagine è generato dalle colonne, ne è loro combinazione lineare. Dunque, l'immagine della funzione è lo spazio delle colonne della matrice A. Possiamo dunque capire qual è la dimensione dell'immagine di f_A, dal $\rho(A)$. Il metodo non è unico; possiamo:

- Applicare il metodo degli scarti successivi
- Trovare una base mediante riduzione di ${}^tA$.

Nell'esempio precedente, le colonne sono linearmente indipendenti, dunque formano una base, $\operatorname{Im} f_A = 2$

Si dice suriettiva una funzione se e solo se:

$$\dim \operatorname{Im} f_A = \dim \mathbb{K}^m \iff \rho(A) = m$$

Osservazione: $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$$\left.\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} f &= n - \rho(A) \\ \dim \operatorname{Im} f &= \rho(A) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$$

Dove n è la dimensione dello spazio di partenza, nell'esempio $\mathbb{R}^2$ e quindi 2. La formula vale ogni volta che si ha un'applicazione lineare $f : V \to W$ dato spazio V finitamente generato.

Torniamo alla relazione precedente: data $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$$\dim \operatorname{Im} f_A = \dim \mathbb{K}^m \iff \rho(A) = m$$

- Se $n > m$, poiché $\rho(A) \leq m$, $\dim \operatorname{Im} f_A \leq n$, $\dim \operatorname{Ker} f_A > 0$, ed f_A non può essere iniettiva
- Se $n < m$, $\rho(A) \leq n \leq m$, $\dim f_A < m$, ed f non può essere suriettiva
- Se $n = m$, una proprietà giustifica l'altra, dunque è sia iniettiva che suriettiva, e dunque vi è corrispondenza biunivoca.

Definizione: un'applicazione lineare si dice isomorfismo se è sia iniettiva che suriettiva, ossia se è una corrispondenza biunivoca.
Definizione: due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W si dicono isomorfi se esiste un'applicazione lineare $f: V \to W$ che sia un isomorfismo.

Prendiamo come esempio il caso $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:
- Se f è un isomorfismo, $n = m$
- Se $n = m$, A è una matrice quadrata, ed f è un isomorfismo se e solo se il rango della matrice è uguale a n, ossia se A è invertibile.

Applicazioni lineari composte - applicazione inversa.
Abbiamo una $f_0: V \to W$; $f_1: W \to U$, entrambe lineari
Sono V, W, U tre $\mathbb{K}$-spazi vettoriali
Vogliamo fare la $f_0 \circ f_1(\vec{v})$, ossia passare "direttamente" da V a U
Proposizione: la funzione $f_0 \circ f_1(\vec{v})$ è ancora un'applicazione lineare
Prendiamo ora due funzioni f e g;
$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad f = f_A \quad A \in \mathbb{K}^{m,n}$
$g: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p \quad g = g_B \quad B \in \mathbb{K}^{p,m}$

$$g \circ f(\vec{v}) = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^n \xrightarrow{f} (y_1 \dots y_m) \xrightarrow{g} (z_1 \dots z_p)$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_p \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dato un vettore $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, $g \circ f(\vec{v})$, con $g: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$, $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

è uguale a $B \cdot A \cdot \vec{v}$

Corollario: prendiamo $f = f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, isomorfismo.
Essendo l'applicazione biunivoca, esiste la funzione inversa f^{-1}
Consideriamo l'applicazione lineare associata ad A^{-1} : f_A^{-1} (o $f_{A^{-1}}$ ora meglio vedremo)

$f_{A^{-1}} \circ f_A = f_{A^{-1} \cdot A} = f_I$ = la funzione identica.

La funzione inversa f^{-1} è la funzione associata alla matrice inversa, il prodotto delle due matrici sarà I, e sappiamo che f_I è la funzione identica.
N.B.: f_A^{-1} è lineare.
Alcune proprietà degli isomorfismi:
- La composizione di isomorfismi è un isomorfismo
- L'inverso di un isomorfismo è un isomorfismo.

Applicazioni lineari definite su $\mathbb{K}$-spazi vettoriali finitamente generati
Supponiamo di avere due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W, con V finitamente generato e con una base $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$
Teorema: per ogni scelta di n vettori in W, $\vec{w}_1 \dots \vec{w}_n$, esiste una e una sola applicazione lineare $f: V \to W$ per cui $f(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$, $f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$, ..., $f(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$

Dal momento che questa funzione esiste ed è unica, sono sufficienti questi dati.

Dimostrazione:

1) Esistenza di φ: per ipotesi, abbiamo $\varphi(x_1\vec{v_1}+\ldots+x_n\vec{v_n}) = x_1\vec{z_1}+\ldots+x_n\vec{z_n}$.
Essa dunque è un'applicazione lineare ben definita, in quanto ogni elemento $\vec{v} \in V$ si scrive in modo unico nella forma $\vec{v_i} = x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+\ldots+x_i\vec{v_i}$, e inoltre è lineare

2) Unicità di φ: se la funzione $\psi: V \to W$ è un'applicazione lineare tale che $\psi(\vec{v_1}) = \vec{z_1} \ldots \psi(\vec{v_n}) = x_1\vec{z_1}+\ldots+x_n\vec{z_n} =$
$= \varphi(x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+\ldots+x_n\vec{v_n})$, quindi φ e ψ coincidono.

Facciamo un esempio pratico per capire meglio:

Dati i vettori di $\mathbb{R}^2$ $\vec{v_1} = (1;2)$, $\vec{v_2} = (3;1)$, tali per cui esistono dei vettori per cui $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(1;2) = (4;3;0)$, $f(3;1) = (1;0;0)$, determinare f.

Innanzitutto, diciamo che ciò è interpretabile come un sistema matriciale: se scomponiamo i vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, otteniamo che

$$f(1;2) = f((1;0)+2(0;1)) = \begin{cases} f(1;0)+2f(0;1) = (4;3;0) \\ 3f(1;0)+f(0;1) = (1;0;0) \end{cases}$$
$$f(3;1) = f(3(1;0)+(0;1)) =$$

Dunque, isoliamo una componente e otteniamo che

$$\begin{cases} f(1;0) = (4;3;0) - 2f(0;1) \\ (12;15;0) - 3f(0;1) = (1;0;0) \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(0;1) = \left(\frac{11}{5};3;0\right) \\ f(1;0) = \left(-\frac{2}{5};-1;0\right) \end{cases}$$

Conclusione: l'applicazione lineare f di cui parla il teorema e l'applicazione lineare f_A trasformano nello stesso modo i vettori della base canonica a cui abbiamo ricondotto il problema, e dunque coincidono.

Abbiamo prima detto che per studiare un'applicazione lineare studiamo lo spazio delle colonne della matrice A associata.
Essa sarà, in questo esercizio,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad f(x_1;x_2) = \left(-\frac{2}{5}x_1+\frac{11}{5}x_2 ; -x_1+3x_2 ; 0\right)$$

Corollario: le applicazioni lineari di $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$ sono tutte e sole le applicazioni lineari associate come visto alle matrici $H \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Dimostrazione: data $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, si scrive la matrice che ha come colonne i componenti $f(\vec{e_1}) \ldots f(\vec{e_n})$ della base canonica. Le applicazioni lineari coincidono perché trasformano nello stesso modo i vettori di una base (in questo caso, la base canonica).

Abbiamo finora parlato di un caso specifico, ossia le trasformazioni da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$. È stato possibile ricondurre questo problema a un problema matriciale, poiché a ogni $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è associata una matrice $H \in \mathbb{K}^{m,n}$. Tutti gli altri problemi, dunque, dovranno essere ricondotti a questo.

Ci sono dati un sottospazio di partenza V, uno di arrivo W, finitamente generati, di dimensioni n e m.

$V \in \mathbb{K}^n$; $W \in \mathbb{K}^m$.

Per semplificare notevolmente il problema, possiamo ricondurci alle basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, trovando così una base per i sottospazi.

Dato $B = (\vec{b}_1 ; \vec{b}_2 ; \dots ; \vec{b}_n)$ e $C = (\vec{c}_1 ; \vec{c}_2 ; \dots ; \vec{c}_m)$, con B base di V, e C base di W, costruiremo una matrice associata alla funzione f, le cui colonne sono date da $f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), \dots, f(\vec{b}_n)$

Più precisamente, nella i-esima colonna si scrivono le componenti di $f(\vec{b}_i)$ nella base C.

$$A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}$$

Autovalori, autovettori, autospazi

Sia f un endomorfismo di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, ossia un'applicazione lineare $f: V \to V$

Definizione 1: gli autovalori sono dei numeri. $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore per f se esiste un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ in V per cui $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Definizione 2: se λ è un autovalore per f, ogni vettore $\vec{v} \in V$ per cui $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, si dice autovettore per f relativo all'autovalore λ

Definizione 3: se λ è un autovalore, $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_2$ l'insieme degli autovettori relativi a λ, quest'ultimo si dice autospazio di f relativo a λ, e si indica con V_λ

Proposizione: se $f: V \to V$ è un endomorfismo, e λ è un autovalore, l'autospazio di λ, V_λ, è un sottospazio vettoriale di V

Dimostrazione:

1) Esiste il vettore $\vec{0}$

2) Dati $\vec{u}, \vec{v} \in V_\lambda$, quindi $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$, $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$,
$f(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

3) $f(a \cdot \vec{v}) = a \cdot f(\vec{v}) = a \cdot (\lambda \vec{v}) = a \cdot \lambda \cdot \vec{v}$

Alcuni esempi / chiarimenti:

- Il numero $0 \in \mathbb{R}$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$, è autovalore se e solo se f non è iniettiva. In questo caso, l'autospazio relativo a 0, V_0, è Ker f.

- λ è un autovalore se esiste un vettore $\vec{v} \neq 0$ per cui $f(\vec{v}) = \vec{v}$.

Riprendiamo il già citato caso precedente: endomorfismo di $\mathbb{K}^n$;
$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$
Quel che avevamo fatto prima con le funzioni lineari, era stato il ricondursi a forme matriciali.
Rifacciamolo ora, reinterpretando la nozione di autovalore.
La condizione $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$, si può anche interpretare come, data A matrice associata all'endomorfismo f, e λ autovalore,
$A \cdot X = \lambda \cdot X$; dunque, $A \cdot X - \lambda \cdot X = 0$.
Ma, detta I_n la matrice identica, $\lambda \cdot X$ si può anche scrivere $\lambda \cdot I \cdot X$.
$A \cdot X - \lambda \cdot I \cdot X = 0$; $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = 0$
Dire che λ è un autovalore equivale a dire che il sistema omogeneo con matrice dei coefficienti $(A - \lambda \cdot I)$ ha almeno una soluzione non nulla.
Concludendo, λ è autovalore per f se e solo se $\rho(A - \lambda \cdot I) < n$, e quindi $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$.

Polinomio caratteristico di una matrice
Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, il polinomio caratteristico p.c.(A) nella variabile T è definito come il determinante della matrice $(A - T \cdot I)$
N.B.: data una matrice $M \in \mathbb{K}^{n,n}$, il suo polinomio caratteristico avrà grado n.
Viene inoltre chiamata "traccia della matrice" la somma degli elementi della diagonale principale.

In generale, data $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, il polinomio caratteristico della matrice si può rappresentare così:
$-(-1)^n T^n + d_1 T^{n-1} + d_2 T^{n-2} + \ldots + d_{n-1} T + d_n$. N.B.: $\det(A) = d_n$!

Proposizione: λ è un autovalore per f (o per la matrice A) se e solo se è una radice del polinomio caratteristico di A.

Per determinare gli autovalori di f_A, dunque, scriviamo il polinomio caratteristico di A, ne troviamo le radici, e consideriamo quelle appartenenti a $\mathbb{K}$.
Caso particolare molto interessante è quello delle matrici triangolari o diagonali: in esse, gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale.

Parlando di autovalori, è sempre importante considerare la molteplicità: un autovalore può essere valido più di una volta, o, meglio, può essere una radice molteplice del polinomio caratteristico.
Quando si trova un autovalore λ, bisogna anche sempre trovare e specificare la sua molteplicità m.
Gli autovalori di $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, dunque, possono al più essere n, tenendo conto della molteplicità.

Dimensione degli autospazi
Data $f_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (endomorfismo), e λ autovalore trovato risolvendo il p.c.(A), osserviamo che gli autovalori formano un sottospazio vettoriale V_λ, che è lo spazio delle soluzioni del sistema

omogeneo $(A-\lambda I)x=0$.
Per esservi autovalori, ci deve essere almeno 1 incognita libera, ergo, $\dim V_\lambda$ è almeno 1.
La dimensione dell'autospazio relativo a λ è uguale al numero di incognite libere, ergo
$\dim V_\lambda \geq 1$; $\dim V_\lambda = n-\rho(A-\lambda \cdot I)$
Teorema: se λ è una radice del polinomio caratteristico di A, con molteplicità m, allora $\dim V_\lambda \leq m$
Conseguenze:
1) Se λ è radice semplice del p.c.(A), allora $\dim V_\lambda = 1$
2) Se λ è radice m-esima del p.c.(A), allora $\dim V_\lambda = 1$ o 2 o ... o m.
Per poter studiare un autovalore, dunque, ci si basa su due studi sulla sua molteplicità:
- molteplicità algebrica di λ (m_a): molteplicità dell'autovalore studiata in base al polinomio caratteristico
- molteplicità geometrica di λ (m_g): dimensione dell'autospazio relativo a λ (e dunque, studiando il sistema $(A-\lambda \cdot I)x=0$).
Le due molteplicità devono ovviamente coincidere.

Indipendenza lineare degli autovettori
Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ autovalori distinti di A, e siano $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_s}$ degli autovettori relativi ai precedenti autovalori. Dunque, $\vec{v_1} \dots \vec{v_s}$ sono linearmente indipendenti.
In parole povere, autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Questo teorema può tornare utile perché, se si considerano tutti gli autovalori distinti di A, e una base per ogni autospazio, l'unione di tali basi contiene vettori tra loro linearmente indipendenti. Il loro numero n è il massimo numero di autovettori linearmente indipendenti
Definizione: un'endomorfismo f di $\mathbb{K}^n$ si dice semplice se esiste una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori.
Proposizione: se $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è un endomorfismo semplice, e B è una base di autovettori, la matrice H associata ad f con questa base è diagonale. Nella diagonale principale, i valori sono gli autovalori.

Abbiamo prima parlato di endomorfismi semplici. Traiamone alcune conclusioni; un endomorfismo f è semplice se e solo se:
1) Tutte le radici del polinomio caratteristico della matrice A associata ad f han valori appartenenti a $\mathbb{K}$
2) Per ogni autovalore λ, molteplicità algebrica e geometrica devono coincidere
3) Una base di autovettori per $\mathbb{K}^n$ si ottiene unendo le basi per ogni sottospazio

Il concetto di endomorfismo semplice è strettamente legato a quello di matrice diagonalizzabile: diamo ora alcune definizioni
1) Data $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, A si dice "simile" a $B \in \mathbb{K}^{n,n}$, se esiste una matrice $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile, tale per cui $P^{-1} \cdot A \cdot P = B$
2) La matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice diagonalizzabile se è simile a una

matrice diagonale

Proposizione: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di A. In tal caso P è la matrice che ha i vettori di questa base come colonne

Si deve dunque prendere una matrice P con autovalori sulla diagonale.

Dunque, detto che $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, D è una matrice diagonale.

Analizziamo l'espressione: moltiplichiamo a sinistra in entrambi i membri per la matrice P, ottenendo

$P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = P \cdot D$; $A \cdot P = P \cdot D$

Si può dimostrare che necessariamente P ha come colonne n autovettori linearmente indipendenti di A (cioè una base per $\mathbb{K}^n$ di autovettori, pensati sempre come colonne), e D ha sulla diagonale i corrispondenti autovalori

Teorema

Se A è una matrice $n \times n$ simmetrica, allora essa è diagonalizzabile

Corollari

1) Il polinomio caratteristico di A simmetrica reale ha n radici reali

2) Se λ è una radice di molteplicità m_λ, l'autospazio corrispondente ha dimensione m_λ, cioè $n - \rho(A - \lambda I) = m_\lambda$

3) Regola di Cartesio: se $p(T)$ è un polinomio reale con radici tutte reali, scritto secondo potenze crescenti (o decrescenti, ma comunque in modo ordinato), il numero delle radici positive è dato dal numero dei cambiamenti di segno dei coefficienti. Possiamo così avere informazioni sul segno degli autovalori di A.

Autospazi di una matrice simmetrica reale

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, possiamo dire che

1) Se A ha un solo autovalore λ con molteplicità algebrica uguale a n, allora $V_\lambda = \mathbb{R}^n$, $A = \lambda \cdot I_n$

2) Se A ammette almeno due autovalori distinti, λ_1 e λ_2, possiamo dire che se $\vec{v}(v_1 \dots v_n)$ è un autovettore relativo a λ_1, e $\vec{w}(w_1 \dots w_n)$ è un autovettore relativo a λ_2, allora si ha che:

$v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n = \vec{0}$. In altre parole, autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Riprendiamo ora con un concetto già trattato alcuni nuovi argomenti, dopo aver dato una definizione vecchia ma che generalizzeremo e useremo con una nuova notazione:

Dati $(x_1 \dots x_n)$ e $(y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$, il numero "$x_1 + y_1 + \dots x_n y_n$" si dice "prodotto scalare euclideo" di $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e userò la notazione $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$. Se $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, i due vettori sono ortogonali.

Riprendiamo ancora alcuni concetti:

- Norma: dato un vettore $\vec{v}(v_1 \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$, si dice norma il numero reale $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$
- Versore: vettore di norma 1
- Base ortonormale in $\mathbb{R}^n$: data una base $B = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$, essa è ortonormale se è composta di versori a 2 a 2 ortogonali; ossia:

$\forall \vec{i}, \vec{j}$, $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{i,j}$

Il simbolo "$\delta_{i,j}$" è detto "simbolo di Kronecker", e rappresenta il prodotto scalare. Ora, diciamo che

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Matrici ortogonali

Una matrice si dice ortogonale se, moltiplicata a destra o a sinistra con la propria trasposta, dà la matrice identica.

Data $P \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\quad P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I$

In parole povere, la trasposta di P è uguale alla sua inversa.

${}^tP = P^{-1}$.

Proposizione: data $P \in \mathbb{R}^{n,n}$, è ortogonale se e solo se le colonne di P formano una base canonica per $\mathbb{R}^n$ (e anche le righe, ma non ci interessa).

Matrici reali simmetriche e matrici ortogonali

Ricordiamo che gli autovettori di matrici reali simmetriche sono tra loro ortogonali. Dire che la matrice $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ è diagonalizzabile, equivale a dire che $P^{-1} \cdot M \cdot P = D$, con $D \in \mathbb{R}^{n,n}$, diagonale, con gli autovalori sulla diagonale.

Il fatto di avere una matrice ortogonale ci dà notevoli vantaggi: la proprietà ${}^tP = P^{-1}$, permette una semplificazione notevole nel conto per diagonalizzare una matrice; ora avremo: ${}^tP \cdot M \cdot P = D$.

Vediamo più precisamente cosa possiamo fare:

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, simmetrica, esiste almeno una matrice P ortogonale tale per cui vale la relazione ${}^tP \cdot A \cdot P = D$ con D matrice diagonale di autovalori.

P si trova così: per ogni autospazio V_λ relativo all'autovalore λ, si trova una base ortonormale di autovettori e si fa l'unione di queste. Poiché autovettori relativi a diversi autovalori sono ortogonali, la base di $\mathbb{R}^n$ trovata sarà ortonormale.

La matrice P avrà come colonne gli autovettori di questa base, e come già detto, essendo ortogonale, ha la proprietà ${}^tP = P^{-1}$. Riassumendo,

1) Le colonne sono autovettori, ergo $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è diagonale

2) P è ortogonale, ergo $P^{-1} = {}^tP$, ergo ${}^tP \cdot A \cdot P$ è diagonale.

Forme quadratiche

Si dice forma quadratica nelle variabili $t_1 \dots t_n$ il polinomio omogeneo di II° grado

Una forma quadratica si dice in forma canonica se contiene solo quadrati delle variabili. Ciò è molto comodo per studiare il segno della forma quadratica.

Studiare il segno di una forma quadratica significa studiare il segno dei valori che il polinomio assume quando si attribuiscono valori numerici alle variabili.

Quando nella forma canonica i coefficienti delle variabili sono sempre positivi, la forma quadratica si dice "definita positiva"; tutti negativi, "definita negativa". Se alcuni sono uguali a 0, "semidefinita positiva o negativa", altrimenti indefinita.

Le forme quadratiche si possono studiare mediante matrici.
Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, associata a una forma quadratica, $A = (a_{i,j})$ risulta essere simmetrica.
La matrice A sarà dunque di questa forma:

$a_{i,j} \longrightarrow$ con $i = j$, coefficienti di $t^2_{i,j}$

$a_{i,j} \longrightarrow$ con $i \neq j$, $a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2} \cdot$ coefficiente di $t_{i,j}$

In parole povere, sulla diagonale principale ci sono i coefficienti delle variabili al quadrato, negli altri posti la metà dei coefficienti delle variabili interessate. La matrice è simmetrica, come già detto.
Si verifica che, data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, e il vettore delle variabili $\vec{t}(t_1 \dots t_n)$, si ha quest'uguaglianza:

$$f(\vec{t}) = f(t_1 \dots t_n) = (t_1 \dots t_n) \cdot A$$
$$f(\vec{t}) = {}^tT \cdot A \cdot T$$

Inoltre, se si effettua un cambio di variabili, tale per cui

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

f si trasforma in una forma quadratica nelle nuove variabili $u_1 \dots u_n$ con lo stesso segno della precedente, e la matrice associata è ${}^tP \cdot A \cdot P = A'$

Se P è una matrice che ha come colonne una base ortonormale di autovettori (e quindi ortogonale), A' è diagonale, e la forma quadratica è in forma canonica. Gli autovalori sono i coefficienti dei termini al quadrato.
Dunque il segno è determinato dagli autovalori di A.

Data una forma quadratica, ne posso trovare la matrice associata, diagonalizzarla (dal momento che, essendo simmetrica, è diagonalizzabile), trovare la matrice degli autovalori, e così la forma quadratica canonica, e studiarne il segno.

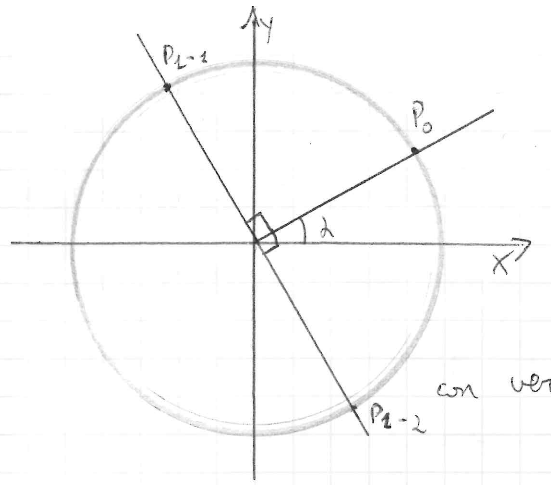
Matrici ortogonali e studio di coniche
Riprendendo la definizione di matrice ortogonale, ricordiamo brevemente che $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ è ortogonale se e solo se $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I$; $P^{-1} = {}^tP$.
P è ortogonale se e solo se le colonne di P formano una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$; stessa cosa per le righe.
Proposizione: se P è una matrice ortogonale, il determinante di P vale ± 1
Dimostrazione: per il teorema di Binet, $\det(P \cdot {}^tP) = \det I$, visto che $\det(P) \cdot \det({}^tP) = 1$
Quindi, $\det(P^2) = \pm 1$
Le matrici con determinante uguale a 1 hanno un forte significato geometrico, e vengono dette "matrici ortogonali speciali".
Analizziamo il caso di $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, ortogonale, speciale

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

CONDIZIONI PERCHÉ SIA SPECIALE:

$$(p;q) \cdot (r;s) = pr + qs = 0$$
$$\|(p;q)\| = \sqrt{p^2+q^2} = 1$$
$$\|(r;s)\| = \sqrt{r^2+s^2} = 1$$

Consideriamo ora due punti P_0 e P_1, $P_0 = (p;q)$, $P_1 = (r;s)$
Avendo norma 1, possiamo rappresentarli su di una circonferenza goniometrica, ossia con raggio unitario.



Consideriamo che P_0 sarà dunque uguale a $(\cos\alpha ; \sin\alpha)$, dato che ha norma 1 il suo vettore.

P_1 avrà due possibilità: essere ruotato di $\frac{\pi}{2}$ con verso orario o antiorario.

P_{1-1} : $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$: Ortogonale speciale

P_{1-2} : $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$: Ortogonale non speciale

Consideriamo dunque la matrice A_1: essa opera sui vettori della base canonica come la rotazione antioraria di α radianti; questa è un'applicazione lineare.

In altre parole, la funzione f_{A_1} a cui è associata la matrice A_1, è la rotazione di α radianti in senso antiorario.

Esempi:

1) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: rotazione di $0°$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: rotazione di $\frac{\pi}{2}$ radianti

3) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$: rotazione di $\frac{\pi}{3}$ radianti

Consideriamo i vettori della base canonica ortonormale di $\mathbb{R}^2$

$\vec{i} = (1;0)$, $\vec{j} = (0;1)$

$f(\vec{i}) = (\cos\alpha)\cdot\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$

$f(\vec{j}) = (-\sin\alpha)\vec{i} + (\cos\alpha)\vec{j}$

In altre parole, $\vec{I}$ e $\vec{J}$ definiscono una nuova base per i vettori del piano e un nuovo sistema di riferimento

Preso un punto Q del piano, ~~esso~~ avrà coordinate $(x;y)$ nel sistema di riferimento di partenza, e $(X;Y)$ nel secondo

$\overline{OQ} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} = X\cdot\vec{I} + Y\cdot\vec{J}$

$x\vec{i} + y\vec{j} = X\left[(\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}\right] + Y\left[(-\sin\alpha)\vec{i} + (\cos\alpha)\vec{j}\right]$

$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$; in forma matriciale : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Considerando P come la matrice di rotazione,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$; al contrario, ${}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Abbiamo quindi introdotto la rotazione, la sua matrice associata, e visto come funziona algebricamente e geometricamente.

Vediamo ora più direttamente l'applicazione di ciò che abbiamo visto sulle coniche

Forme quadratiche a 2 variabili - Coniche

Consideriamo la forma quadratica in x, y

$f(x;y) = ax^2 + 2\cdot bxy + cy^2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; $f(x;y) = (x;y)\cdot A$

Se effettuassimo un opportuno cambio di variabili, potremmo dire che: "$x = p_{1;1}\cdot X + p_{1;2}\cdot Y$" ; "$y = p_{2;1}X + p_{2;2}\cdot Y$"

In altre parole, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, data $P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$

Otteniamo così una nuova forma quadratica di $X; Y$

$f(x;y) = (x;y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$(x;y) = {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t\left[P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right] = {}^t\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \cdot {}^tP$

$f(x;y) = (x;y)\, {}^tP \cdot A \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(x;y)$

La P va scelta in modo opportuno, in modo da ottenere certi risultati.

Se P è una matrice ortogonale che ha come colonne due versori autovettori per A, possiamo dire che

$A' = {}^tP \cdot A \cdot P = D$ (diagonale)

$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ λ relativo alla I colonna di P, μ relativo alla II° colonna di P

$g(X,Y) = \lambda X^2 + \mu Y^2$ (Nuova conica trovata)

Studiamo l'equazione di II° grado

$ax^2 + 2bxy + cy^2 = K$, $K \in \mathbb{R}$

Vogliamo determinare i punti $Q(x;y)$ del piano $(x;y)$ in cui la forma quadratica assume un dato valore costante K (ricorda, il piano che taglia il cono)

Scegliamo una matrice P ortogonale, con colonne formate da autovettori di A e con $\det P = 1$ (ortogonale speciale). La sostituzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ si può interpretare come una rotazione che produce un cambiamento di riferimento nel piano.

L'equazione $f(x;y) = K$ diventa così: $\lambda X^2 + \mu Y^2 = K$

N.B.: nel processo, può capitare di fare scelte arbitrarie. Esse riguardano gli assi in considerazione (X e Y piuttosto che Y e X), oppure il verso di questi. La cosa non cambia la sostanza.

Studio dell'equazione di una conica in forma "$\lambda X^2 + \mu Y^2 = K$".

Distinguiamo 3 casi possibili, e relativi sottocasi (segni concordi o no)

1) λ, μ concordi (quindi, $\det A > 0$)

Equazione: $\lambda x^2 + \mu y^2 = K$

1,1) K concorde con λ e μ; equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ELLISSE)

1,2) K ha segno discorde a λ, μ; $\lambda x^2 + \mu y^2 = K$ non ha soluzioni (si dice che sia un'ellisse immaginaria)

1,3) $K = 0$; l'equazione ha una sola soluzione, ossia $O(0;0)$

2) λ, μ discordi (quindi, $\det A < 0$)

2,1) K concorde con λ. L'equazione avrà una forma del tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (iperbole con fuochi sull'asse delle x)

2,2) K concorde con μ. L'equazione avrà una forma del tipo: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (iperbole con fuochi sull'asse delle y)

2,3) Se $K = 0$, si ottengono gli asintoti dell'iperbole $\left(y = \pm \frac{b}{a} x\right)$

3) Un autovettore è nullo (poniamo $\mu = 0$)

3,1) Se λ e K sono concordi, $x^2 = a^2$; $x = \pm a$ (due rette)

3,2) Se λ e K sono discordi, $x^2 = -a^2$; soluzioni non reali

3,3) Se $K = 0$, la soluzione è $x = 0$; non esistono infatti vincoli sulle y.

Comunque, si passa sempre dal sistema $(x;y)$ a $(X;Y)$ con una rotazione del piano mediante matrice ortogonale speciale.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \qquad P = (\vec{u}\,|\,\vec{v}) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$\vec{u}$: autovettore versore relativo all'autovalore λ

$\vec{v}$: autovettore versore relativo all'autovalore μ.

Osservazione: se $\lambda=\mu$, l'equazione è $\lambda x^2+\lambda y^2=k$.
Se k e λ sono concordi, l'equazione è una circonferenza, se no, non vi sono soluzioni in $\mathbb{R}$. Se $k=0$, è un punto.

Equazioni generali e canoniche di una conica

Definizione: si dice conica il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano un'equazione di secondo grado a due variabili (spesso x, y, come nel sistema di riferimento).

Finora abbiamo osservato casi in cui non appaiono coefficienti di I grado.

L'equazione generale di una conica ha una forma del tipo:

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

Possiamo anche interpretare questa equazione in chiave matriciale:

$a_{1,1}x^2+2a_{1,2}xy+a_{2,2}y^2+2a_{2,3}x+2a_{3,2}y+a_{3,3}$

Consideriamo alcuni sottocasi, in cui mancano alcuni membri tra questa

I caso: manca il termine xy, quindi la conica non è ruotata rispetto agli assi x e y.

Se sono presenti i termini x e y di I grado, la conica è stata solo traslata. Raccogliendo i coefficienti di x^2 e y^2, e con il "metodo di completamento dei quadrati" (ovvia, considerando x^2 come primo termine di un quadrato, e $\frac{d}{a}\cdot x$ come il doppio prodotto, completare il quadrato del binomio), si può trovare la traslazione.

Caso I-2: se oltre a xy, mancano altri termini, in particolare uno dei due di secondo grado, si opera sempre lo stesso metodo di prima, e si troverà una parabola

Caso II: caso generale

Se sono presenti tutti i termini dell'equazione, allora conviene procedere in due tempi:

1) Detta A la matrice associata (con solo $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$), se ne calcolano gli autovalori, λ e μ, e si trasforma l'equazione nella forma $\lambda x_1^2+\mu y_1^2$.
2) Si eliminano i termini di I grado con una traslazione e il solito metodo.

N.B.: se $\det A=0$, è parabola.

Quadriche

Definizione: si dice quadrica il luogo dei punti $P(x;y;z)$ dello spazio che soddisfano un'equazione di II° grado.

Per portare una quadrica in forma canonica, si usano gli stessi metodi delle coniche, ma si possono avere 3 traslazioni, e 2 rotazioni. Si lavora inoltre con matrici più grandi, e quindi difficili da gestire.

L'equazione canonica come al solito non ha termini misti o di I grado.

Consideriamo un'equazione del tipo:

$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = K$

Se la z appare solo al quadrato, e inverto il segno dell'ascissa, otterò anche il punto simmetrico rispetto al piano xy. Se ho una soluzione, in questo caso, avrò anche la simmetrica.

Il luogo è simmetrico rispetto ai piani.

Vogliamo ora capire come sia fatto il luogo: per farlo, ci riconduciamo allo studio delle coniche; dividiamo per K e troviamo

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

Dividiamo in vari casi:

1) Se A, B, e C sono negativi, abbiamo un "ellissoide immaginario".

2) Se $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$ abbiamo un'equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Per capire l'andamento, sezioniamo la quadrica con piani di diverso tipo: $(h \in \mathbb{R})$

- Sezione con piani "$z=h$": $\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \end{cases}$ AL VARIARE DI H, CI SI ALLONTANA SEMPRE PIÙ DA O. ABBIAMO DUNQUE DELLE IPERBOLI

- Sezione con piani "$y=h$": $\begin{cases} y = h \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2} \end{cases}$ SITUAZIONE MOLTO SIMILE ALLA PRECEDENTE

- Sezione con piani "$x=h$" $\begin{cases} x = h \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1 \end{cases}$ LA FIGURA ESISTE SE $\frac{h^2}{a^2} - 1 \geq 0$. SI TRATTA, IN TAL CASO, DI ELLISSOIDI, CON SEMIASSI CRESCENTI.

La superficie si chiama "iperboloide ellittico", o "iperboloide a due falde".

3) $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$: abbiamo equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Rifacciamo le sezioni con i piani:

- Sezione con piani "$z=h$" $\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \end{cases}$ ELLISSI, CHE DIVENTANO SEMPRE PIÙ GRANDI AL CRESCERE DI H.

- Sezioni con piani "$y=h$" $\begin{cases} y = h \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \end{cases}$ $1 - \frac{h^2}{b^2} = 0 \quad h = \pm b$ (DUE RETTE) LA SEZIONE È FORMATA DA DUE RETTE PER PIANO.

Senza dover fare la sezione $x=h$, vediamo che la quadrica è formata da rette. Identifichiamole:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) =$

$= \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$

Consideriamo le rette di equazione: $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = K\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{K}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$

Un punto che soddisfa tale sistema, appartiene alla quadrica

Una quadrica di questo tipo è un iperboloide a 1 falda, detto anche "superficie a righe".

4) $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$: equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Tagliamo solo con piani "$z=h$", l'effetto è sempre uguale:

$\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \end{cases}$

- Se $h^2 > c^2$, non è reale (ellissoide immaginario)
- Se $h^2 = c^2$, c'è il punto $(0, 0, h)$
- Se $h^2 < c^2$, abbiamo ellisse con semiassi decrescenti.

Dunque, si tratta di un ellissoide.
Se $A=B=C$, abbiamo una sfera.

Casi degeneri dell'equazione $\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2=K$

- $K=0$: $\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2=0$ (EQUAZIONE OMOGENEA)

Se λ, μ e ν sono concordi, la soluzione è solo $O(0;0;0)$

Analizziamo altri casi; in particolare, $\lambda, \mu > 0$ $\nu < 0$
L'equazione è : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; $O(0;0;0) \in$ AL LUOGO.

Ora, se un punto $P_0(x_0;y_0;z_0) \in$ AL LUOGO, $\mathcal{L}(x_0;y_0;z_0) \in$ LUOGO.
Consideriamo i punti della sezione con un piano "$z=h$":

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$$

SI TRATTA DI UN CONO, OSSIA DI UN LUOGO FORMATO DA RETTE CHE UNISCONO UN PUNTO FISSO, DETTO VERTICE, CON I PUNTI DI UNA CURVA. C'È IL CONO "POSITIVO" E QUELLO "NEGATIVO".

- $\nu=0$: $\lambda x^2+\mu y^2=K$

Trovandoci nello spazio, z può avere qualunque valore.
Il luogo dei punti $P_0(x_0;y_0;t)$ rappresenta, al variare di ~~x_0~~ e y_0, un luogo, per l'appunto. Al variare di t, questo stesso luogo trasla in alto o in basso rispetto al piano xy. Si tratta dunque di un cilindro. I cilindri possono essere a sezione circolare, ellittica, iperbolica.

- $\nu, \mu=0$: $\lambda x^2=K$

Se $K=0$, $x=0$
Se $\lambda \cdot K > 0$, $x=\pm\sqrt{\frac{K}{\lambda}}$

- $\nu, K=0$: $\lambda x^2+\mu y^2=0$

Se λ e μ sono discordi, avremo un cilindro, che contiene l'asse z.

$y=\pm\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}\cdot x$ (SI TRATTA DI DUE PIANI PER L'ASSE z)

- $K=0$, z di I grado, λ e $\mu \neq 0$

$z=\lambda x^2+\mu y^2$

Dobbiamo studiare due casi separati, sezionando in entrambi con piani il luogo:

a) λ, μ concordi
b) λ, μ discordi

a) Dati λ, μ concordi, sezioniamo con piani "$z=h$":

$$\begin{cases} z=h \\ \lambda x^2+\mu y^2=h \end{cases}$$

ABBIAMO UN LUOGO IMMAGINARIO SE h È DISCORDE CON λ E μ. ALTRIMENTI, AVREMO DEGLI ELLISSI. ESSI CONTINUANO AD AMPLIARSI. AVREMO UN "PARABOLOIDE ELLITTICO".

b) Dati λ, μ discordi, sezioniamo nuovamente con "$z=h$":

$$\begin{cases} z=h \\ \lambda x^2+\mu y^2=h \end{cases}$$

SE h È UGUALE A 0, AVREMO 2 RETTE : $y=\pm\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}\,x$

ALTRIMENTI, ABBIAMO DELLE IPERBOLI.
SE MANCASSE UNO DEI DUE QUADRATI, AVREMMO UNA PARABOLA.